2008 年 12 月

有限要素法（真直棒の縦振動による説明)

松本 敏郎（名古屋大学）

図 1 に示すように一端が固定され，他端に $\sigma = \bar{\sigma}(L)e^{i\omega t} = \frac{F}{A}e^{i\omega t}$ の調和加振力が作用する長さ L，断面積 A の真直棒を考える．

真直棒の点 x における x 軸方向の変位を u とする．真直棒に力が作用して変形し，変形前の点 x が変形後に $x+u$ に移動したものとすると，$u = u(x)$ は x の関数となり，これを点 x の変位と呼ぶ．このとき点 x から微小長さ dx だけ離れた点 $x+dx$ を考える．点 $x+dx$ の変位は点 x の変位より少しだけ値が変化していると考えることができる．その量を du とすると，点 $x+dx$ の変位は $u+du$ と書くことができ，変形後に点 $x+dx$ は点 $x+dx+u+du$ に移動したと考えることができる．図 2 のように dx が十分小さいときは $du \approx \dfrac{\partial u}{\partial x}dx$ と考えることができるので，点 x における真直棒のひずみは次のようになる．

$$\varepsilon(x) = \frac{\text{変形による } dx \text{ の伸び}}{\text{元の長さ } dx} = \frac{\left\{(x+dx+u+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx) - (x+u)\right\} - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

次に，図に示すように真直棒の微小部分に作用する力の釣り合いを考える．点 x における断面と点 $x+dx$ における断面の間の微小長さ dx の部分の力の釣り合いを考える．x 軸の正の方向を向いた面に作用する x 軸の正の方向の応力を正とすると，dx の部分の左側の面に作用する応力は $-\sigma$ となる．dx の右側の面では，応力は σ から少しだけ変化していると考えることができ，その値を $\sigma + d\sigma$ と書くことができる．$d\sigma$ は dx が微小であるから，

$$d\sigma \approx \frac{\partial \sigma}{\partial x}dx \tag{2}$$

となる．

真直棒の断面積を A とすると，微小長さ dx の部分の力の釣り合いは次のようになる．

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x}dx\right)A = \rho(A\,dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

ただし，ρ は真直棒の密度，$\partial^2 u/\partial t^2$ は dx の部分の加速度である．この式より，次の運動方程式が得られる．

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

ここで，応力・ひずみ関係式より，

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

であるから，運動方程式は変位 u を用いて次のように書ける．

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

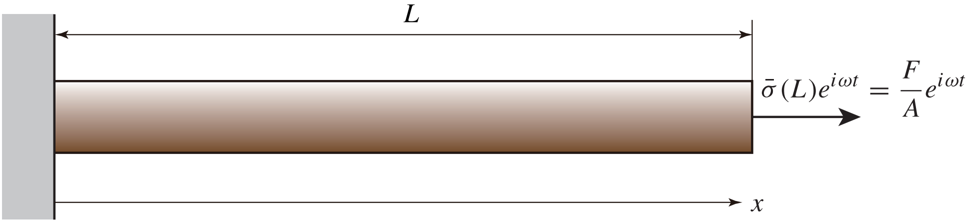

図 1: 一端を固定され，他端に力が作用する真直棒

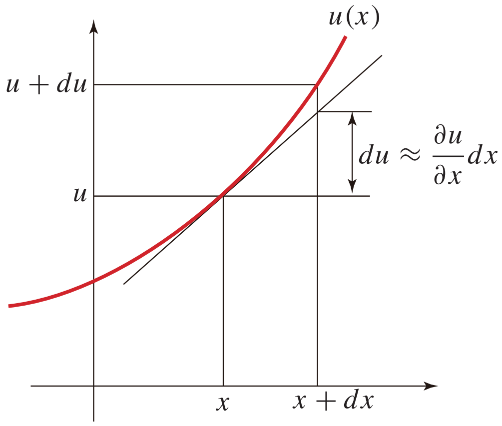

図 2: 変位の増分 du の考え方

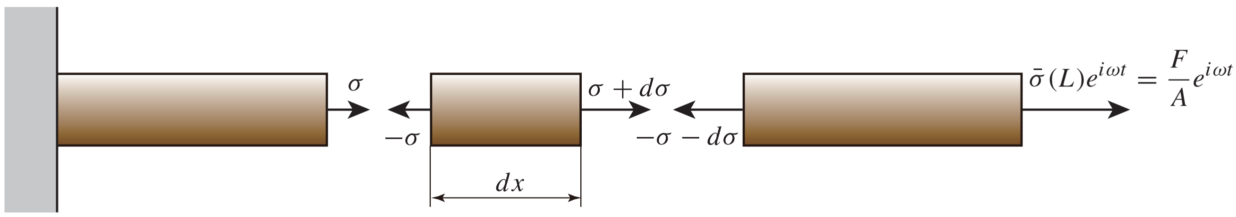

図 3: 真直棒の応力

ここで，真直棒が $u = u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}$ のように調和振動をしている状態を考える．$U(x)$ は調和振動の振幅，ω は角振動数である．この関係を上式に代入すると次式が得られる．

$$\left(E\frac{d^2U}{dx^2} + \rho\omega^2 U \right) e^{i\omega t} = 0 \tag{7}$$

よって，振幅に対する方程式（1 次元の Helmholtz 方程式）が次式のように得られる．

$$E\frac{d^2U}{dx^2} + \rho\omega^2 U = 0 \tag{8}$$

この式を有限要素法で解いてみよう．まず，重み関数を W とする次の重み付き残差式を出発点とする．

$$\int_0^L \left(E\frac{d^2U}{dx^2} + \rho\omega^2 U \right) W = 0 \tag{9}$$

この式を 1 階部分積分すると，次の弱形式が得られる．

$$\int_0^L E\frac{dU}{dx}\frac{dW}{dx}\,dx - \rho\omega^2 \int_0^L UW\,dx = \bar{\sigma}(L)W(L) - \sigma(0)W(0) \tag{10}$$

式 (10) を，u に近似式を用いて解く方法を考える．最も簡単な近似は，図 4 に示すように，区間 0, L に複数の点（節点と呼ぶことにする）を設け，節点の値を直線的に結んだ関数（折れ線）で近似する方法である．このような関数は，考えている節点で 1 を取り隣接する節点で 0 となるように直線的に変化し，その他のすべての節点で 0 の値を取るような関数の線形結合として表すことができる．たとえば図 4 には，節点 i で 1，隣接する節点およびその他のすべての節点で 0 となるように変化する関数 $N^i(x)$ を描いている．このような関数を基底関数と呼ぶ．また，各節点で囲まれた線分を要素と呼ぶことにすると，基底関数は有限要素基底と呼ぶことができる．各節点に関する有限要素基底を図示すると図 5 のようになる．有限要素基底を用いると，図 4 のような折れ線近似は，$U(x)$ の節点値を係数とする次のような線形結合で書くことができる．

$$U(x) = \sum_{j=0}^{n} N^j(x)\,U^j \tag{11}$$

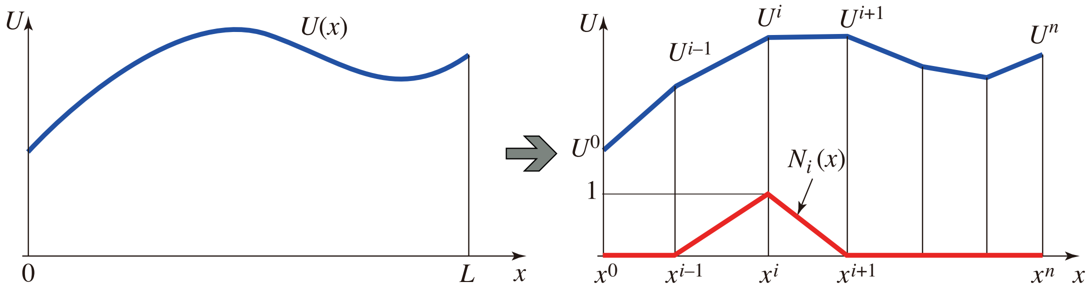

図 4: 関数 u の折れ線近似

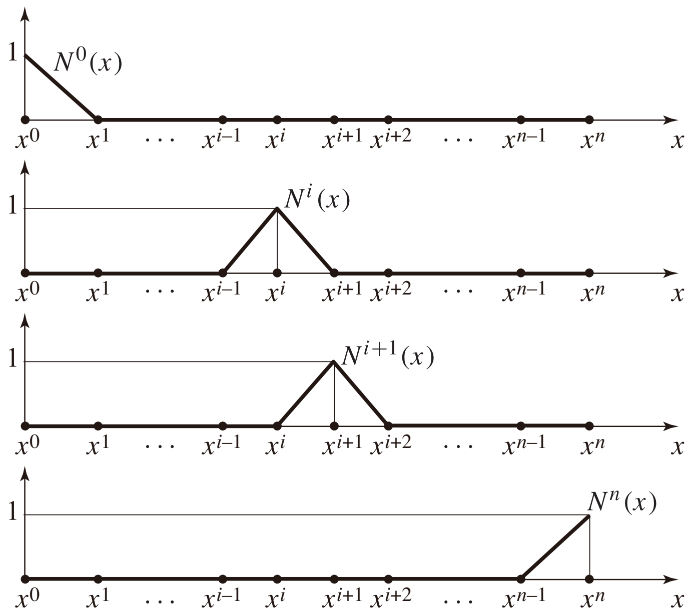

図 5: 各節点に対応する有限要素基底

ただし n は総節点数である．このように近似すると，関数 $U(x)$ を決定する問題は，節点値 $U^j, (j = 0, 1, \cdots, n)$ を決定する問題に帰着することになる．

基底関数 $N^j(x), (j = 0, 1, \cdots, n)$ は次式のようになる．

$$N^j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^{j-1}}{x^j - x^{j-1}} = \dfrac{x - x^{j-1}}{e^j} & x \in \left[x^{j-1}, x^j\right] \\ \dfrac{x^{j+1} - x}{x^{j+1} - x^j} = \dfrac{x^{j+1} - x}{e^{j+1}} & x \in \left[x^j, x^{j+1}\right] \\ 0 & \text{（上記以外）} \end{cases} \tag{12}$$

ただし，e^j は区間 $\left[x^{j-1}, x^j\right]$ の区間の長さ (要素長)，e^{j+1} は区間 $\left[x^j, x^{j+1}\right]$ の要素長を意味するものとする．

さて，区間 $[0, L]$ を図 4 のように n 個の要素に分割すると，弱形式の積分は次のように各要素ごとの積分で計算することができる．

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{x^{j-1}}^{x^j} E \frac{dU}{dx} \frac{dW}{dx}\, dx - \sum_{j=1}^{n} \rho\omega^2 \int_{x^{j-1}}^{x^j} UW\, dx = \bar{\sigma}(L)W(L) - \sigma(0)W(0) \tag{13}$$

ここで，式 (11) より $U(x)$ は区間 $[x^{j-1}, x^j]$ においては次のように書くことができる．

$$U(x) = N^{j-1}(x)\, U^{j-1} + N^j(x)\, U^j, \quad x^{j-1} \le x \le x^j \tag{14}$$

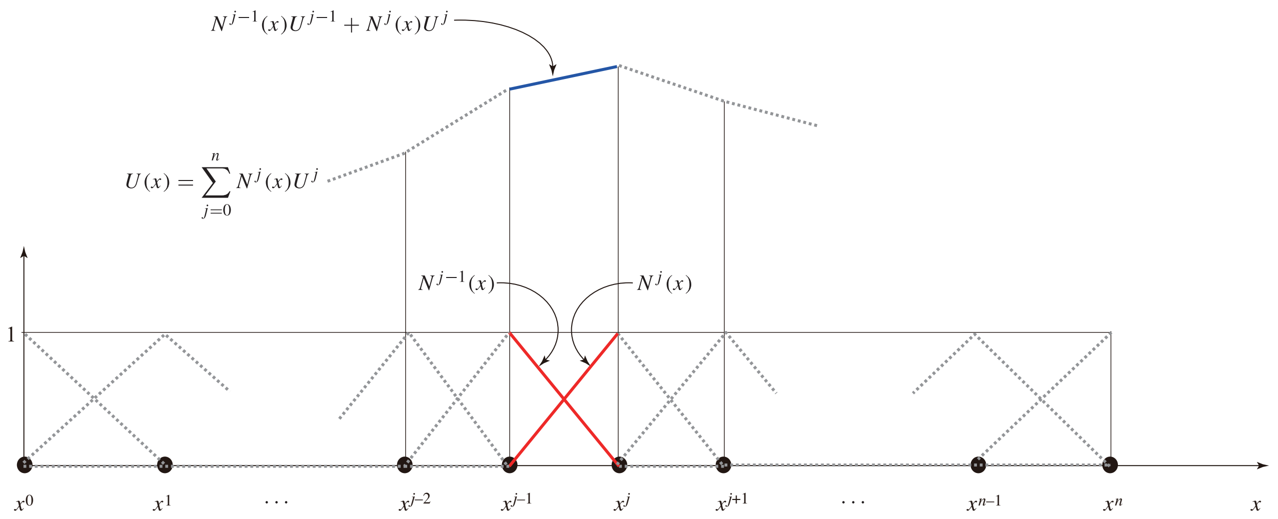

図 6: 区間 $\left[x^{j-1}, x^j\right]$ における近似関数

このことは，図 6 から容易に分かる．したがって，積分区間 $[x^{j-1}, x^j]$ においては dU/dx は次のようになる．

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{dN^{j-1}(x)}{dx} U^{j-1} + \frac{dN^j(x)}{dx} U^j, \quad x^{j-1} \le x \le x^j \tag{15}$$

基底関数の導関数は，式 (12) より次式のようになる．

$$\frac{dN^j(x)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^j} & x \in \left[x^{j-1}, x^j\right] \\ \dfrac{-1}{e^{j+1}} & x \in \left[x^j, x^{j+1}\right] \\ 0 & \text{（上記以外）} \end{cases} \tag{16}$$

よって，区間 $\left[x^{j-1}, x^j\right]$ では，$dU(x)/dx$ は次のようになることが分かる．

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{-1}{e^j} U^{j-1} + \frac{1}{e^j} U^j, \quad x^{j-1} \le x \le x^j \tag{17}$$

式 (14) と (15) を式 (13) に用いると次式が得られる．

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{x^{j-1}}^{x^j} E \left(\frac{dN^{j-1}}{dx} U^{j-1} + \frac{dN^j}{dx} U^j \right) \frac{dW}{dx}\, dx - \sum_{j=1}^{n} \rho\omega^2 \int_{x^{j-1}}^{x^j} \left(N^{j-1}U^{j-1} + N^j U^j \right) W\, dx$$
$$= \bar{\sigma}(L)W(L) - \sigma(0)W(0) \tag{18}$$

この式を整理すると次式が得られる．

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(\int_{x^{j-1}}^{x^j} E \frac{dW}{dx} \frac{dN^{j-1}}{dx}\, dx \right) U^{j-1} + \left(\int_{x^{j-1}}^{x^j} E \frac{dW}{dx} \frac{dN^j}{dx}\, dx \right) U^j \right\}$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(\rho\omega^2 \int_{x^{j-1}}^{x^j} W N^{j-1}\, dx \right) U^{j-1} + \left(\rho\omega^2 \int_{x^{j-1}}^{x^j} W N^j\, dx \right) U^j \right\}$$
$$= \bar{\sigma}(L)W(L) - \sigma(0)W(0) \tag{19}$$

式 (19) は $n+1$ 個の節点値 $U^0, U^1, \cdots, U^n$ の線形結合となっている．したがって，このような式を $n+1$ 個作れば連立方程式を得ることができ，節点値 $U^0, U^1, \cdots, U^n$ について解くことが可能となる．

式 (19) の形式で異なる式を $n+1$ 個作るには，$n+1$ 通りの重み関数を考えてやればよい．ここで基底関数 $N^j(x)$ が $n+1$ 通りあることを思い出すと，重み関数として $W(x)=N^i(\mathbf{x}), (i=0,1,\cdots,n)$ を用いればよいことがわかる．このとき，弱形式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\int_{x^{j-1}}^{x^j} E\frac{dN^i}{dx}\frac{dN^{j-1}}{dx}\,dx\right)U^{j-1}+\left(\int_{x^{j-1}}^{x^j} E\frac{dN^i}{dx}\frac{dN^j}{dx}\,dx\right)U^j\right\}\\
&-\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\rho\omega^2\int_{x^{j-1}}^{x^j} N^iN^{j-1}\,dx\right)U^{j-1}+\left(\rho\omega^2\int_{x^{j-1}}^{x^j} N^iN^j\,dx\right)U^j\right\}\\
&=\bar{\sigma}(L)N^i(L)-\sigma(0)N^i(0)
\end{aligned}\tag{20}$$

ここで，$N^i(x)$ は節点 i を含む区間以外では 0 となるから，式 (20) の積分は節点 i を含む区間のみ計算すればよいことが分かる．したがって $N^0(0)=1, N^0(L)=0$ を考慮することにより，$i=0$ のときは式 (20) が次式のように得られる．

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{x^0}^{x^1} E\frac{dN^0}{dx}\frac{dN^0}{dx}\,dx\right)U^0+\left(\int_{x^0}^{x^1} E\frac{dN^0}{dx}\frac{dN^1}{dx}\,dx\right)U^1\\
&-\left\{\left(\rho\omega^2\int_{x^0}^{x^1} N^0N^0\,dx\right)U^0+\left(\rho\omega^2\int_{x^0}^{x^1} N^0N^1\,dx\right)U^1\right\}=-\sigma(0)
\end{aligned}\tag{21}$$

次に $i=1,2,\cdots,n-1$ のときは $N^i(0)=0, N^i(L)=0$ を考慮することにより，式 (20) は次式のようになる．

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{x^{i-1}}^{x^i} E\frac{dN^i}{dx}\frac{dN^{i-1}}{dx}\,dx\right)U^{i-1}+\left(\int_{x^{i-1}}^{x^i} E\frac{dN^i}{dx}\frac{dN^i}{dx}\,dx\right)U^i\\
&+\left(\int_{x^i}^{x^{i+1}} E\frac{dN^i}{dx}\frac{dN^i}{dx}\,dx\right)U^i+\left(\int_{x^i}^{x^{i+1}} E\frac{dN^i}{dx}\frac{dN^{i+1}}{dx}\,dx\right)U^{i+1}\\
&-\left\{\left(\rho\omega^2\int_{x^{i-1}}^{x^i} N^iN^{i-1}\,dx\right)U^{i-1}+\left(\rho\omega^2\int_{x^{i-1}}^{x^i} N^iN^i\,dx\right)U^i\right.\\
&\left.+\left(\rho\omega^2\int_{x^i}^{x^{i+1}} N^iN^i\,dx\right)U^i+\left(\rho\omega^2\int_{x^i}^{x^{i+1}} N^iN^{i+1}\,dx\right)U^{i+1}\right\}=0
\end{aligned}\tag{22}$$

最後に $i=n$ のときは $N^n(0)=0, N^n(L)=1$ を考慮することにより，式 (20) は次式のようになる．

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{x^{n-1}}^{x^n} E\frac{dN^n}{dx}\frac{dN^{n-1}}{dx}\,dx\right)U^{n-1}+\left(\int_{x^{n-1}}^{x^n} E\frac{dN^n}{dx}\frac{dN^n}{dx}\,dx\right)U^n\\
&-\left\{\left(\rho\omega^2\int_{x^{n-1}}^{x^n} N^nN^{n-1}\,dx\right)U^{n-1}+\left(\rho\omega^2\int_{x^{n-1}}^{x^n} N^nN^n\,dx\right)U^n\right\}=\bar{\sigma}(L)
\end{aligned}\tag{23}$$

ここで，各区間の積分を具体的に計算すると以下のようになる．

まず，$i=2,3,\cdots,n$ に対して

$$\int_{x^{i-1}}^{x^i} E\frac{dN^i}{dx}\frac{dN^{i-1}}{dx}\,dx=\int_{x^{i-1}}^{x^{i-1}+e^i} E\frac{1}{e^i}\cdot\frac{-1}{e^i}\,dx=-\frac{E}{e^i}\tag{24}$$

$$\int_{x^{i-1}}^{x^i} E\frac{dN^i}{dx}\frac{dN^i}{dx}\,dx=\int_{x^{i-1}}^{x^{i-1}+e^i} E\frac{1}{e^i}\cdot\frac{1}{e^i}\,dx=\frac{E}{e^i}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\rho\omega^2\int_{x^{i-1}}^{x^i} N^iN^{i-1}\,dx&=\rho\omega^2\int_{x^{i-1}}^{x^{i-1}+e^i}\frac{(x-x^{i-1})(x^i-x)}{(e^i)^2}\,dx\\
&=\rho\omega^2\int_{x^{i-1}}^{x^{i-1}+e^i}\frac{(x-x^{i-1})(x^{i-1}+e^i-x)}{(e^i)^2}\,dx=\frac{1}{6}\rho\omega^2e^i
\end{aligned}\tag{26}$$

$$\rho\omega^2 \int_{x^{i-1}}^{x^i} N^i N^i \, dx = \rho\omega^2 \int_{x^{i-1}}^{x^{i-1}+e^i} \frac{(x - x^{i-1})^2}{(e^i)^2} \, dx = \frac{1}{3}\rho\omega^2 e^i \tag{27}$$

$i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ に対して

$$\int_{x^i}^{x^{i+1}} E \frac{dN^i}{dx} \frac{dN^i}{dx} \, dx = \int_{x^i}^{x^i+e^{i+1}} E \frac{1}{e^{i+1}} \cdot \frac{1}{e^{i+1}} \, dx = \frac{E}{e^{i+1}} \tag{28}$$

$$\int_{x^i}^{x^{i+1}} E \frac{dN^i}{dx} \frac{dN^{i+1}}{dx} \, dx = \int_{x^i}^{x^i+e^{i+1}} E \frac{1}{e^{i+1}} \cdot \frac{-1}{e^{i+1}} \, dx = \frac{-E}{e^{i+1}} \tag{29}$$

$$\rho\omega^2 \int_{x^i}^{x^{i+1}} N^i N^i \, dx = \rho\omega^2 \int_{x^i}^{x^i+e^{i+1}} \frac{(x^{i+1} - x)^2}{(e^{i+1})^2} \, dx = \frac{1}{3}\rho\omega^2 e^{i+1} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 \int_{x^i}^{x^{i+1}} N^i N^{i+1} \, dx &= \rho\omega^2 \int_{x^i}^{x^i+e^{i+1}} \frac{(x^{i+1} - x)(x - x^i)}{(e^{i+1})^2} \, dx \\ &= \rho\omega^2 \int_{x^i}^{x^i+e^{i+1}} \frac{(x^i + e^{i+1} - x)(x - x^i)}{(e^{i+1})^2} \, dx = \frac{1}{6}\rho\omega^2 e^{i+1} \end{aligned} \tag{31}$$

これらより，$i = 0$ に対する式 (21) は次のようになる.

$$\left(\frac{E}{e^1}\right) U^0 + \left(\frac{-E}{e^1}\right) U^1 - \left(\frac{1}{3}\rho\omega^2 e^1\right) U^0 - \left(\frac{1}{6}\rho\omega^2 e^1\right) U^1 = -\sigma(0) \tag{32}$$

$i = 1, 2, \cdots, n-1$ に対する式 (22) は次のようになる.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-E}{e^i}\right) U^{i-1} + \left(\frac{E}{e^i} + \frac{E}{e^{i+1}}\right) U^i + \left(\frac{-E}{e^{i+1}}\right) U^{i+1} \\ &- \left[\left(\frac{1}{6}\rho\omega^2 e^i\right) U^{i-1} + \left\{\frac{1}{3}\rho\omega^2 \left(e^i + e^{i+1}\right)\right\} U^i + \left(\frac{1}{3}\rho\omega^2 e^{i+1}\right) U^{i+1}\right] = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

$i = n$ に対する式 (23) は次のようになる.

$$\left(\frac{-E}{e^n}\right) U^{n-1} + \left(\frac{E}{e^n}\right) U^n - \left(\frac{1}{6}\rho\omega^2 e^n\right) U^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\rho\omega^2 e^n\right) U^n = \bar{\sigma}(L) \tag{34}$$

式 (32), (33), (34) をまとめると，次のマトリックス形に書くことができる．

$$
\begin{aligned}
&E\begin{bmatrix}
\frac{1}{e^1} & \frac{-1}{e^1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\frac{-1}{e^1} & \frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^2} & \frac{-1}{e^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{-1}{e^2} & \frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3} & \frac{-1}{e^3} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{-1}{e^3} & \frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{e^{n-2}}+\frac{1}{e^{n-1}} & \frac{-1}{e^{n-1}} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{e^{n-1}} & \frac{1}{e^{n-1}}+\frac{1}{e^n} & \frac{-1}{e^n}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{e^n} & \frac{1}{e^n}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \bar{U}^0\\ U^1\\ U^2\\ U^3\\ \vdots\\ U^{n-2}\\ U^{n-1}\\ U^n \end{Bmatrix}\\
&-\frac{\rho\omega^2}{6}\begin{bmatrix}
2e^1 & e^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
e^1 & 2(e^1+e^2) & e^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & e^2 & 2(e^2+e^3) & e^3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & e^3 & 2(e^3+e^4) & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(e^{n-2}+e^{n-1}) & e^{n-1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{n-1} & 2(e^{n-1}+e^n) & e^n\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^n & 2e^n
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \bar{U}^0\\ U^1\\ U^2\\ U^3\\ \vdots\\ U^{n-2}\\ U^{n-1}\\ U^n \end{Bmatrix}\\
&=\begin{Bmatrix} -\sigma(0)\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \bar{\sigma}(L) \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

式 (35) を簡単に書くと次のような形に表すことができる．

$$\Big([K]-\omega^2[M]\Big)\{U\}=\{F\} \tag{36}$$

マトリックス $[K]$ と $[M]$ はそれぞれ剛性マトリックス，質量マトリックス，ベクトル $\{F\}$ は節点力ベクトル（外力ベクトル）と呼ばれる．$x=0$ の端節点 x^0 においては変位が固定されている（変位既知）であるから，x^0 の節点変位を既知量であるという意味を表すために，式 (35) において $\bar{U}^0$ のように”バー”をつけて標記していることに注意しよう．

式 (35) の既知量はすべて右辺に移項することができるから，$\bar{U}^0$ に関する項を右辺に移項し，右辺に未知反力を有する式（ここでは式 (36) の 1 行目）は別に書くことにより，式 (35) を次式のように 2 つに分けて書くことがで

きる．

$$
E\begin{bmatrix}
\frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^2} & \frac{-1}{e^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\frac{-1}{e^2} & \frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3} & \frac{-1}{e^3} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{-1}{e^3} & \frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{e^{n-2}}+\frac{1}{e^{n-1}} & \frac{-1}{e^{n-1}} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{e^{n-1}} & \frac{1}{e^{n-1}}+\frac{1}{e^n} & \frac{-1}{e^n}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{e^n} & \frac{1}{e^n}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} U^1\\ U^2\\ U^3\\ \vdots\\ U^{n-2}\\ U^{n-1}\\ U^n \end{Bmatrix}
$$

$$
-\frac{\rho\omega^2}{6}\begin{bmatrix}
2(e^1+e^2) & e^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
e^2 & 2(e^2+e^3) & e^3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & e^3 & 2(e^3+e^4) & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2(e^{n-2}+e^{n-1}) & e^{n-1} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & e^{n-1} & 2(e^{n-1}+e^n) & e^n\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^n & 2e^n
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} U^1\\ U^2\\ U^3\\ \vdots\\ U^{n-2}\\ U^{n-1}\\ U^n \end{Bmatrix}
$$

$$
=\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \bar{\sigma}(L) \end{Bmatrix}
-E\begin{Bmatrix} \frac{-1}{e^1}\bar{U}^0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}
+\frac{\rho\omega^2}{6}\begin{Bmatrix} e^1\bar{U}^0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{37}
$$

および

$$
E\begin{bmatrix} \frac{1}{e^1} & \frac{-1}{e^1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \bar{U}^0\\ U^1\\ U^2\\ U^3\\ \vdots\\ U^{n-2}\\ U^{n-1}\\ U^n \end{Bmatrix}
-\frac{\rho\omega^2}{6}\begin{bmatrix} 2e^1 & e^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \bar{U}^0\\ U^1\\ U^2\\ U^3\\ \vdots\\ U^{n-2}\\ U^{n-1}\\ U^n \end{Bmatrix}
=-\sigma(0)
\tag{38}
$$

式 (37) の右辺は，既知量のみであるから一つの列ベクトルにまとめることができ，ω を与えれば，その角振動数で作用する外力に対する変位の周波数応答が得られる．特に，$\omega=0$ の場合について式 (37) を解くと，静的な釣り合い状態における変位が求められる．

また，式 (38) は，式 (37) を解いて求まった各節点の変位から，変位が与えられている節点（ここでは x^0 における反力 $-\sigma(0)$ を求める式となっている．

さらに，次の固有値問題を解いて ω^2 に対する固有値を求めればこの系の共振周波数が得られる．

$$
E\begin{bmatrix}
\frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^2} & \frac{-1}{e^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{e^2} & \frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3} & \frac{-1}{e^3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-1}{e^3} & \frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{e^{n-2}}+\frac{1}{e^{n-1}} & \frac{-1}{e^{n-1}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{e^{n-1}} & \frac{1}{e^{n-1}}+\frac{1}{e^n} & \frac{-1}{e^n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{e^n} & \frac{1}{e^n}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{\rho\omega^2}{6}\begin{bmatrix}
2(e^1+e^2) & e^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
e^2 & 2(e^2+e^3) & e^3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & e^3 & 2(e^3+e^4) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2(e^{n-2}+e^{n-1}) & e^{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & e^{n-1} & 2(e^{n-1}+e^n) & e^n \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^n & 2e^n
\end{bmatrix} \tag{39}
$$

次に実際の数値計算例を考える．区間 0，L を 6 等分した場合を考える．このとき要素寸法は $e^1=e^2=e^3=e^4=e^5=e^6=L\equiv e$ となる．式 (37) と (38) は以下のようになる．

$$
\left(E\begin{bmatrix}
\frac{2}{e} & \frac{-1}{e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{e} & \frac{2}{e} & \frac{-1}{e} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-1}{e} & \frac{2}{e} & \frac{-1}{e} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-1}{e} & \frac{2}{e} & \frac{-1}{e} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-1}{e} & \frac{2}{e} & \frac{-1}{e} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{e} & \frac{1}{e}
\end{bmatrix}-\frac{\rho\omega^2}{6}\begin{bmatrix}
4e & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e & 4e & e & 0 & 0 & 0 \\
0 & e & 4e & e & 0 & 0 \\
0 & 0 & e & 4e & e & 0 \\
0 & 0 & 0 & e & 4e & e \\
0 & 0 & 0 & 0 & e & 2e
\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \\ U^5 \\ U^6 \end{Bmatrix}
$$

$$
=\begin{Bmatrix} \frac{E}{e}\bar{U}^0+\frac{\rho\omega^2}{6}e\bar{U}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\sigma}(L) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\sigma}(L) \end{Bmatrix} \tag{40}
$$

および $\bar{U}^0=0$ であるから，

$$
E\begin{bmatrix} \frac{-1}{e^1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \\ U^5 \\ U^6 \end{Bmatrix}-\frac{\rho\omega^2}{6}\begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \\ U^5 \\ U^6 \end{Bmatrix}=-\sigma(0) \tag{41}
$$

まず，$\omega=0$ のときの静的な解を求めてみる．このとき，式 (45) は次式となる．

$$
E\begin{bmatrix}
\frac{2}{e} & \frac{-1}{e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{e} & \frac{2}{e} & \frac{-1}{e} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-1}{e} & \frac{2}{e} & \frac{-1}{e} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-1}{e} & \frac{2}{e} & \frac{-1}{e} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-1}{e} & \frac{2}{e} & \frac{-1}{e} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{e} & \frac{1}{e}
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \\ U^5 \\ U^6 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\sigma}(L) \end{Bmatrix} \tag{42}
$$

この式は簡単に解くことができて，解は次のようになり厳密解 $U(x) = \dfrac{\bar{\sigma}(L)}{E}x$ と一致する．

$$\begin{aligned} &\bar{U}^0 = 0, && U^1 = \frac{\bar{\sigma}(L)e}{E} = \frac{\bar{\sigma}(L)}{E}\cdot\frac{L}{6}, \quad && U^2 = \frac{\bar{\sigma}(L)}{E}\cdot\frac{2L}{6}, \quad U^3 = \frac{\bar{\sigma}(L)}{E}\cdot\frac{3L}{6}, \\ &U^4 = \frac{\bar{\sigma}(L)}{E}\cdot\frac{4L}{6}, \quad && U^5 = \frac{\bar{\sigma}(L)}{E}\cdot\frac{5L}{6}, && U^2 = \frac{\bar{\sigma}(L)}{E}L \end{aligned} \tag{43}$$

さらにこれらを式 (44) で $\omega = 0$ とした式に用いると，点 $x^0 = 0$ における反力が次のように得られ，左右端で力が釣り合っていることが分かる．

$$-\sigma(0) = E \times \frac{-1}{e} \times U^1 = E \times \frac{-6}{L} \times \frac{\bar{\sigma}(L)L}{6E} = -\bar{\sigma}(L) \tag{44}$$

次に $E = 1$，$\rho = 1$，$L = 6$ (すなわち $e = 1$)，$\bar{\sigma}(L) = 1$ とし，周波数応答を具体的に求めてみる．

たとえば $\omega = 1.1$ [rad/sec] に対する応答を求める連立方程式は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \frac{179}{150} & \frac{-721}{600} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-721}{600} & \frac{179}{150} & \frac{-721}{600} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-721}{600} & \frac{179}{150} & \frac{-721}{600} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-721}{600} & \frac{179}{150} & \frac{-721}{600} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-721}{600} & \frac{179}{150} & \frac{-721}{600} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-721}{600} & \frac{179}{300} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \\ U^5 \\ U^6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{45}$$

この連立方程式を解くと，$\omega = 1.1$ [rad/sec] に対する応答が次のように得られる．

$$\begin{aligned} &\bar{U}^0 = 0, && U^1 = 0.832, \quad && U^2 = 0.823, \quad && U^3 = -0.012, \\ &U^4 = -0.838, \quad && U^5 = -0.821, \quad && U^6 = 0.023 \end{aligned} \tag{46}$$

この結果を用いて $U(x) = \sum_{i=0}^{6} N^i(x)U^i$ をグラフにプロットすると図 7 のようになる．

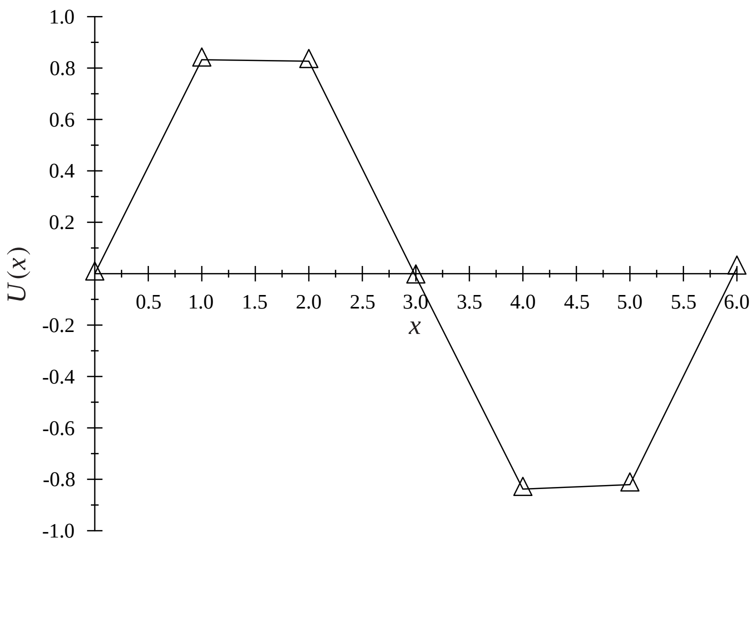

図 7: $\omega = 1.1$ のときの応答

ちなみに数式処理ソフトウェアの Maple を用いて任意の ω の値に対して応答を求めると，たとえば端点 $x = x^6$ の変位は次のようになる．

$$U^6 = \frac{72(3-\omega^2)(1296 - 6048\omega^2 + 5400\omega^4 - 1128\omega^6 + 65\omega^8)}{46656 - 793152\omega^2 + 1769040\omega^4 - 1208736\omega^6 + 323244\omega^8 - 35604\omega^{10} + 1351\omega^{12}} \tag{47}$$

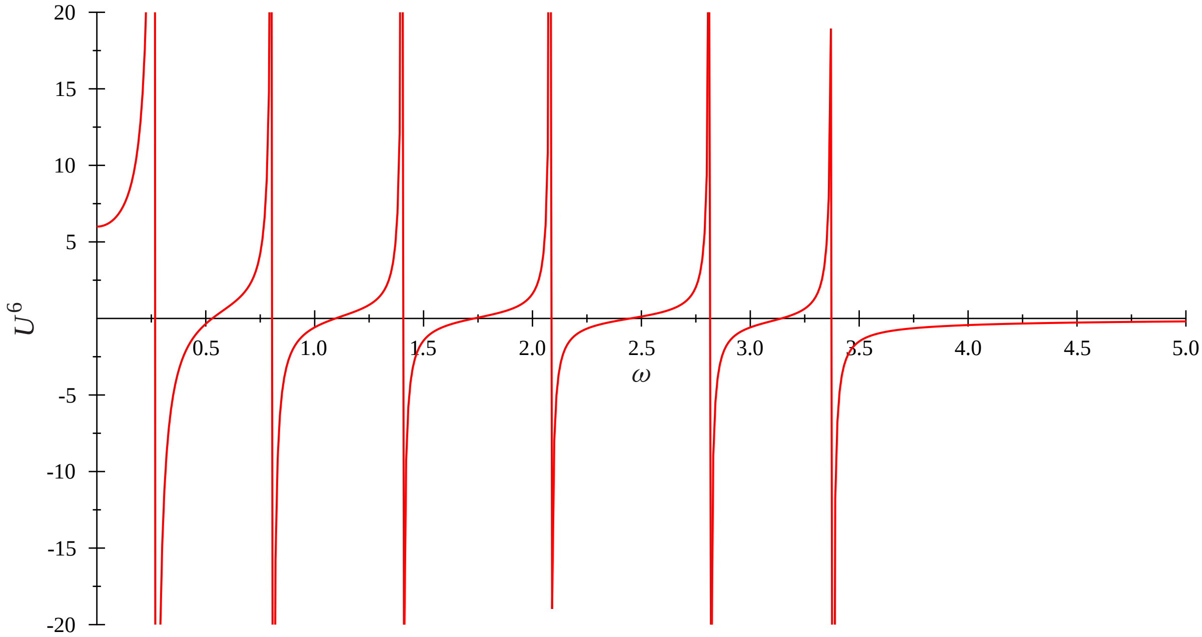

図 8: 任意の ω に対する U^6 の応答

これを，角振動数 ω を変化させてグラフにプロットすると図 8 のようになる．

厳密解は，

$$U(x) = \frac{\bar{\sigma}(L)\sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega x\right)}{\omega\sqrt{\rho E}\cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega L\right)} = \frac{\sin(\omega x)}{\omega\cos(\omega L)} \tag{48}$$

であり，厳密解の共振角振動数は，$\omega = 0.2618$，0.7854，1.3090，1.8326，2.3562，2.8798，3.4034，$\cdots$ であるのに対して，有限要素法の共振角振動数は，式 (47) の分母が 0 となる ω を計算することにより ω =0.2625, 0.8057, 1.4031, 2.0827, 2.81465, 3.3774 と得られる．