

CAE における境界要素法 — 境界要素法の概要

松本 敏郎 (名古屋大学 大学院工学研究科 機械理工学専攻)

E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp

1 境界要素法による要素分割

境界要素法は、取り扱う物理現象の支配微分方程式から導出される境界積分方程式を、離散化することにより近似的に解く方法である。境界要素法では、求めたい関数とその勾配のいずれもが直接の未知量となりうる。例えば熱伝導問題では、温度と熱流束、静電界問題では電位と電界、静弾性問題では変位と表面力などがいずれも直接の未知量となる。また弾性問題では、表面力が未知の境界で表面力を未知量として直接扱うことができる。面と面の境目に応力の不連続性が存在する場合も厳密に扱うことができ、しかも高精度に計算することが可能である。特に破壊力学のような応力を高精度に評価する必要がある問題では境界要素法が有効である。

境界要素法にはまた、無限領域を厳密に取り扱うことができるという特徴があり、開空間が対象となるような電磁気問題や音響問題、地盤の波動伝播問題などで有効である。

境界要素法では、その名の通り境界の要素分割のみで数値解析を行うことが可能である。境界要素法における要素分割を模式的に図示すれば、図1や図2のようになる。

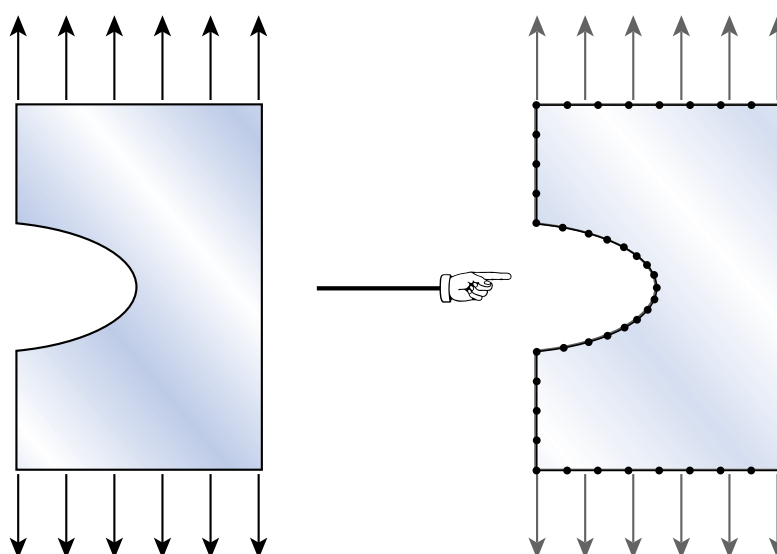


図1: 境界要素法における2次元問題の要素分割例

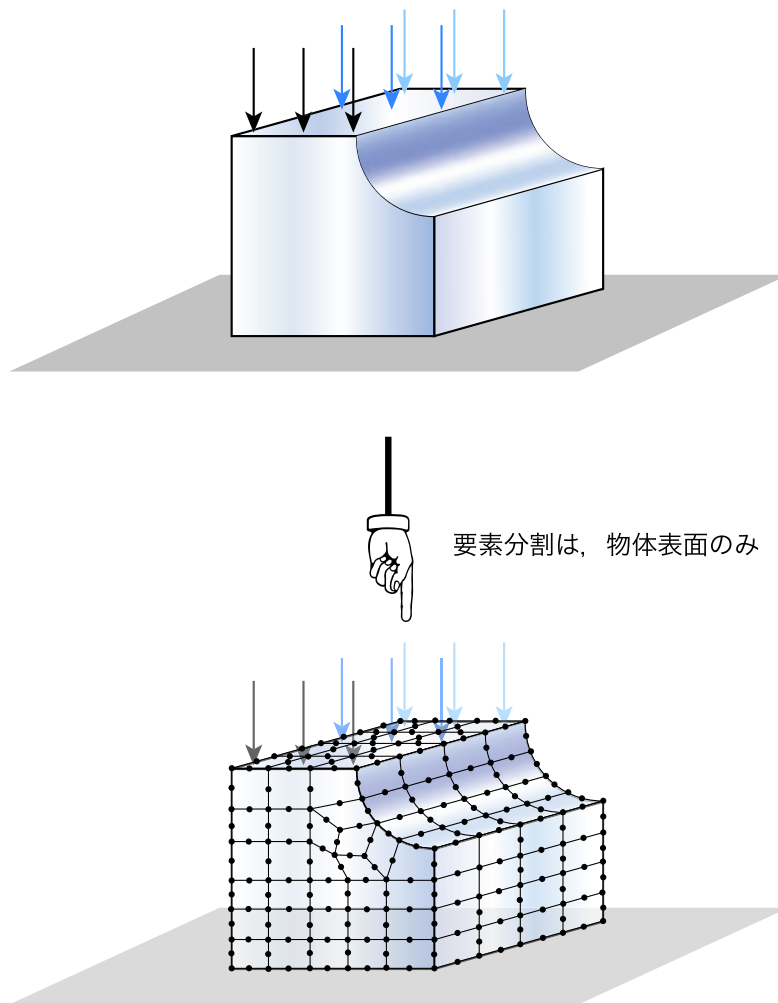


図 2: 境界要素法における 3 次元問題の要素分割例 (物体の表面のみ)

大多数の線形問題で、このように境界の要素分割のみで解析が可能である。また、非線形問題においても定式化の工夫により境界を要素分割するだけで解析できる。

境界要素法の定式化と解析の手順を簡単に示すと、図 3 のようになる。

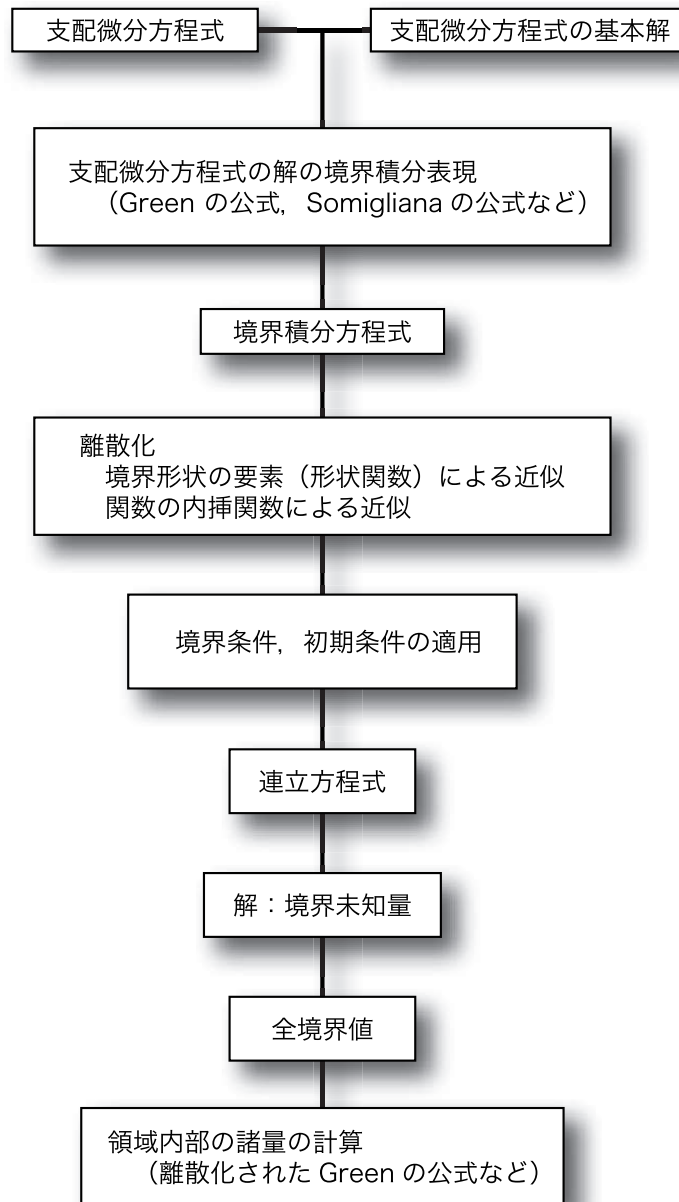


図 3: 境界要素法の定式化と解析の流れ

取り扱う物理現象が異なるごとに、支配微分方程式、支配微分方程式の基本解、支配微分方程式の解の境界積分表現、境界積分方程式、境界条件や初期条件は異なるものとなるが、それ以外の部分は共通のテクニックを用いることができる。

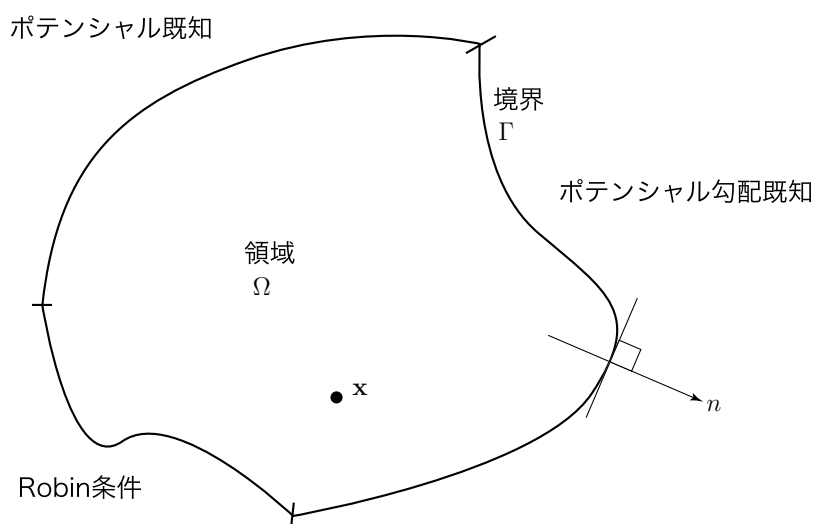


図 4: 境界と領域, 境界条件

2 境界要素法の概要

2.1 ポテンシャル問題の支配微分方程式と境界条件

まず線形ポテンシャル問題の境界要素法による解析手順について解説する。静電界, 静磁界, 定常熱伝導, ポテンシャル流れ (非粘性非圧縮性渦なし流れ), Saint-Venant の弾性棒のねじり問題など多くの物理現象が, Laplace 方程式や Poisson 方程式を支配方程式とするポテンシャル問題として扱うことができる。ポテンシャル問題に対する境界要素法の解析手順は, 最も簡単で他の問題の基本となるものであり, 他の多くの問題における境界要素法の定式化・数値的取り扱い方法は, ポテンシャル問題の延長線上にある。

ポテンシャル問題の支配微分方程式は, 図 4 に示すような区分的になめらかな境界 Γ を有する, 2次元または 3次元の閉領域または開領域 Ω 内における Poisson 方程式である。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

ここで, $u(\mathbf{x})$ は Ω 内のある点 \mathbf{x} におけるポテンシャルの値という意味であり, $b(\mathbf{x})$ は, ある点 \mathbf{x} におけるソース (電荷, 湧き出し, 発熱等) の値である。個々の問題におけるポテンシャルの物理的意味は, 表 1 のようになる。

表 1: ポテンシャルの意味

問題	対応する物理量
定常熱伝導	温度
静電界	電位
静磁界	磁位
ポテンシャル流れ	速度ポテンシャル
Sait-Venant 軸ねじり	ゆがみ関数

Poisson 方程式を2次元と3次元の場合について具体的に書くと、次のようになる。

2次元：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x, y) + b(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

3次元：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(x, y, z) + b(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \quad (3)$$

特に、領域内にソース分布が存在しないときは、Poisson 方程式は次の Laplace 方程式になる。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4)$$

ポテンシャル問題における境界条件は次のようになる。

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (5)$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = \bar{q}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q \quad (6)$$

上式は、境界の一部 Γ_u において、ポテンシャルの値が \bar{u} と分かっており、境界の残りの部分 Γ_q において、境界から外向き法線方向 n へのポテンシャル勾配（流束） $\frac{\partial u}{\partial n}$ が既知であるという意味である。

さらに、ポテンシャルが既知の境界ではポテンシャルの外向き法線方向勾配（流束）は未知であり、流束が既知の境界では、ポテンシャルが未知である。

また、上記以外にも境界条件としては Robin 条件と呼ばれるポテンシャルと流束が1次式で表される関係がある。この場合も、ポテンシャルまたは流束のいずれか一方が未知であることにはかわりはない。

流束は、単にポテンシャルの外向き法線方向の傾きを意味する。例えば熱伝導問題では、法線方向の温度勾配は次のように法線方向の熱流束 $q[\text{W}/\text{m}^2]$ とフーリエの法則によって関係づけられる。

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \begin{cases} -\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) & (2 \text{次元問題}) \\ -\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \frac{\partial u}{\partial z} n_z \right) & (3 \text{次元問題}) \end{cases} \quad (7)$$

ただし、 λ は熱伝導率 $[\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})]$ である。上式から、境界上のある点で熱流束が既知のときは、その点で温度勾配が既知であることを意味し、温度勾配が未知であるとは、熱流束が未知であることを意味することがわかる。

線形の熱伝導問題で考える必要があるもう一つの境界条件として、熱伝達境界条件（対流境界条件）がある。これは、次のような熱流束と温度の1次式である。

$$q = h(u - u_\infty) \quad (8)$$

ここで、 h は熱伝達率 $[\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})]$ 、 u_∞ は、外部雰囲気温度（温度境界層の外の主流の温度） $[\text{K}]$ である。熱伝達境界条件が規定された場合も、境界上の温度と熱流束という2つの量が式(8)により1つにまとめられることがわかる。

同様に、静電界問題では境界の外向き法線方向の電界の強さを E_n [V/m] とすると

$$E_n = -\frac{\partial u}{\partial n} \quad (9)$$

となり、電位勾配がそのまま外向き法線方向の電界の強さに対応する。

ポテンシャル流れでは、速度ポテンシャルを ϕ としたとき、境界の外向き法線方向の流速 v_n [m/sec] は、次式で速度ポテンシャルと関係づけられる。

$$v_n = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (10)$$

ポテンシャル問題では、境界の全ての点でポテンシャル勾配を与えて問題を解いた場合は解が一意に求まらないことに注意する必要がある。これは例えば、電界が全て分かっている場合でも、電位はどこかに基準値を与えなければ決まらないことと同じである。したがって、実際の解析では境界全体で流束を与えるときも、どこか1点だけはポテンシャルの値を規定することにより、解が一意に決まるようにする。

2.2 解の境界積分による表現

境界要素法では、支配微分方程式の境界積分による表現を用いる。例えば、式(4)の Laplace 方程式を満足する解は、次の Green の公式となる。

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(x) d\Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Omega \quad (11)$$

ただし、 \mathbf{x} は境界上の全ての点、 \mathbf{y} は領域内部の1点であり、 $u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は Laplace 方程式の基本解である。 $u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は2次元問題の場合は次のようになる。

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (12)$$

ただし、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ は2点 \mathbf{x} と \mathbf{y} の間の距離である。3次元問題の場合の基本解は次のようになる。

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (13)$$

また、 $q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、基本解 $u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対応づけられる流束であり、2次元問題の場合は、

$$q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (14)$$

3次元問題の場合は、

$$q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} = \frac{-1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (15)$$

となる。

式(11)は、境界上の全ての点のポテンシャルと流束の値を、基本解と基本解に関係づけられる関数を用いて境界積分を評価することにより、領域内部の任意の点のポテンシャルを計算する式となっている。このことを図示すると図5のようになる。

境界要素法においては、Green の公式は境界上のポテンシャルと流束が全て求まった後で、領域内のポテンシャルを計算するために用いられる。

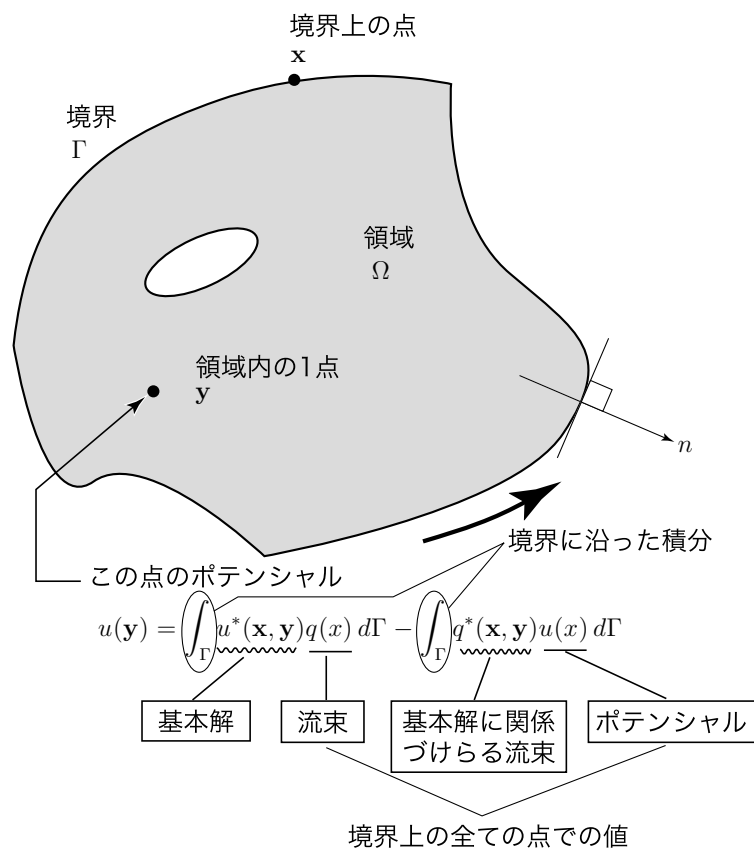


図 5: Green の公式の意味

2.3 境界積分方程式

Greenの公式を用いるためには、まず境界のポテンシャルと流束を全て求めておかなければならない。そこで境界要素法では、境界のポテンシャルと流束だけを関係づける境界積分方程式を近似的に解くことで、これらの量を計算する。

境界積分方程式は、式(11)のGreenの公式において点 \mathbf{y} を境界に移行した式であり、次のようになる。

$$cu(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(x) d\Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad (16)$$

ここで、 c は点 \mathbf{y} が置かれている境界の形状によって決まる定数である。式(16)は、境界の未知量と既知量が混在した境界の値だけについて成り立つ方程式となっている。

2.4 境界積分方程式の離散化による解

境界要素法による解析の考え方を簡単に説明する。

境界要素法によるポテンシャル問題の解析法は、次の境界積分方程式を満足するポテンシャルと流束の値を数値的に求める方法であると言える。

$$cu(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(x) d\Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad (17)$$

式(17)は積分方程式であるから、式(17)を解くためには式(17)の積分が計算できなければならないことになる。解析対象の物体あるいは領域の形状はあらかじめ分かっているはずであるが、積分の計算のためには形状が何らかの式(関数)として表現されていなければならない。一方、ポテンシャルや流束は境界条件として既知の場合はその関数形を式として与えることができる。さらに、基本解や基本解に関係づけられる流束も既知関数である。したがって、式(17)の積分項のうち、ポテンシャルや流束が既知の境界に対応する部分は計算が可能であることが分かる。しかしながら、それらが未知の場合はこのままでは積分を計算できないので、それらの関数形に何らかの仮定を設ける必要がある。また、境界形状もできるだけ簡単な形状の集まりとして表現した方が、積分の計算は簡単となる。

以上のことを2次元問題で簡単に説明する。図6に示すように、物体の境界を直線(セグメント)の集まりとしてまず近似する。さらに、図に示すように各セグメントの中点を節点とし、ポテンシャルや流束のセグメント内の値は、この節点における値を代表値としてセグメント内で一定であると近似する。このように形状や関数値を近似することを、一定要素で離散化するという。セグメント、すなわち要素の総数を N とし、各要素におけるポテンシャルと流束の節点値を $u_i, q_i, (i = 1, 2, \dots, N)$ と書くことにする。また、各セグメントを $\Gamma_j, (j = 1, 2, \dots, N)$ と書くことにする。いま、境界積分方程式(17)の境界上の1点 \mathbf{y} が要素 Γ_i の節点 \mathbf{y}_i にあるとすると、 $u(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y}_i) = u_i$ であるから、式(17)はつぎのようになる。

$$cu_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)u_j d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)q_j d\Gamma \quad (18)$$

ここで、 $u_j, q_j, (i = 1, 2, \dots, N)$ は、各 Γ_j 内で一定であるから、積分記号の外に出すことができるので、上式は次のようになる。

$$cu_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) d\Gamma \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) d\Gamma \right) q_j \quad (19)$$

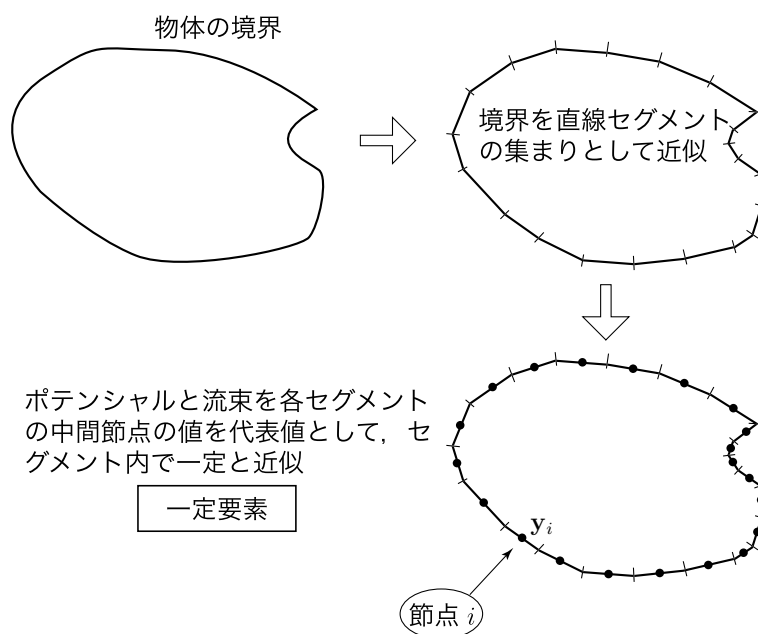


図 6: 一定要素による離散化

式 (19) では、積分記号の中は既知の関数の直線に沿った積分となっているので簡単に積分値を計算することができる。これらの積分を計算した結果を、次式のように書くことにする。

$$h_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) d\Gamma \quad (20)$$

$$g_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) d\Gamma \quad (21)$$

このように書くと、式 (18) はさらに次のように簡単に書くことができる。

$$cu_i + \sum_{j=1}^N h_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N g_{ij} q_j \quad (22)$$

以上のように、境界の形状を簡単な形状（要素）の集まりとして近似し、ポテンシャルや流束も要素内で簡単な関数として近似することにより、境界積分方程式は式 (22) のような**節点値の線形結合**に帰着させることができる。

式 (22) は、ポテンシャルの節点値が N 個、流束の節点値が N 個、合計 $2N$ 個の節点値からなっている。各要素においては、ポテンシャルまたは流束のいずれか一方が境界条件として与えられる。したがって、 $2N$ 個の節点値のうち未知量は N 個ということになる。式 (22) は、未知節点値に関する項を左辺に、既知節点値に関する項を右辺に移項することができるので、式 (22) のような式を N 個作ることができれば、未知節点値を計算できることが分かる。

ところで、式 (22) は境界上の 1 点 \mathbf{y} を要素 i の中間節点 \mathbf{y}_i にとった式であり、このような点 \mathbf{y} の取り方は N 通りあることが分かる。点 \mathbf{y} の位置を変えれば式 (20) と (21) の被積分関数は別の値となり、

h_{ij} , g_{ij} も別の値となる。したがって、 N 通りの点 \mathbf{y} の取り方に対応して、 N 個の異なる式を得ることができる。それらを一つの式にまとめると、次のようなマトリックスの形に書くことができる。

$$c \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \quad (23)$$

式(23)の左辺をまとめると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} c + h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & c + h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & c + h_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \quad (24)$$

次に、式(24)の節点値の中で、未知のものに関する項を左辺に、既知のものを右辺に集めよう。

たとえば、ポテンシャルの節点値 u_2 は未知量で、それ以外のポテンシャルの節点値は既知であるとしよう。このとき、流束は q_2 だけが既知で、それ以外は未知となるから、式(24)は次のように未知量だけを左辺に集めることができる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -g_{11} & h_{12} & -g_{13} \cdots & -g_{1N} \\ -g_{21} & c + h_{22} & -g_{23} \cdots & -g_{2N} \\ -g_{31} & h_{32} & -g_{33} \cdots & -g_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_{N1} & h_{N2} & -g_{N3} \cdots & -g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ u_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -c - h_{11} & g_{12} & -h_{13} \cdots & h_{1N} \\ -h_{21} & g_{22} & -h_{23} \cdots & h_{2N} \\ -h_{31} & g_{32} & -c - h_{33} \cdots & h_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -h_{N1} & g_{N2} & -h_{N3} \cdots & -c - h_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ q_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

このように未知量だけを左辺に集めたとき、節点値の N 個の未知量を x_i , ($i = 1, 2, \dots, N$)、既知量を y_i , ($i = 1, 2, \dots, N$) のように書くと、式(24)は次のような形の連立方程式に帰着する。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (26)$$

ただし、 f_i , ($i = 1, 2, \dots, N$) は節点の既知量とその係数マトリックスを掛けて得られるベクトルである。

連立方程式(26)を解くことにより、境界上の全ての節点のポテンシャルと流束を得ることができる。

2.5 領域内部のポテンシャルの計算

境界のポテンシャルと流束が全て得られれば、Green の公式 (11) を用いることにより、領域内部の任意の点のポテンシャルを計算することができる。ただし、Green の公式においても境界積分の計算が必要となるので、境界を離散化して近似的に積分を計算することになる。例えば一定要素で離散化したときは次のようになる。

$$u(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \right) q_j - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \right) u_j, \quad \mathbf{y} \in \Omega \quad (27)$$

ただし今度は、点 \mathbf{y} は領域内部の任意の 1 点であることに注意する。

2.6 境界要素法の解析の流れのまとめ

2次元のポテンシャル問題について、一定要素で離散化した場合についての境界要素法による解析法の流れを説明したが、3次元ポテンシャル問題や弾性問題、音響問題等の他の問題においても、基本的な流れは同じである。典型的な境界要素法ソルバーの処理の流れを図7に示す。

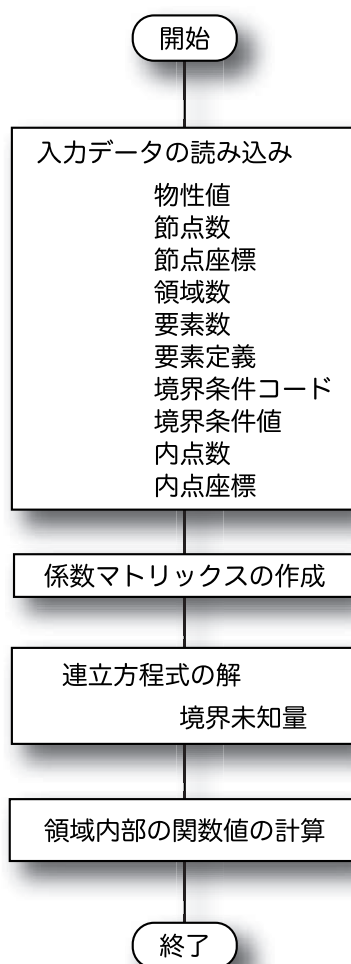


図 7: 典型的な境界要素法ソルバーの処理の流れ

2.7 種々の要素と内挿関数

一定要素は、境界形状を直線で近似し、ポテンシャルや流束の境界上の値も要素内で一定であるという最も簡単な近似法であった。2次元問題で境界要素法でよく用いられる要素は、線形要素と2次要素である。

線形要素では、図8に示すように要素の端点に節点を置き、ポテンシャルや流束の要素内での値を、端点の節点値を直線で結ぶことにより内挿する。

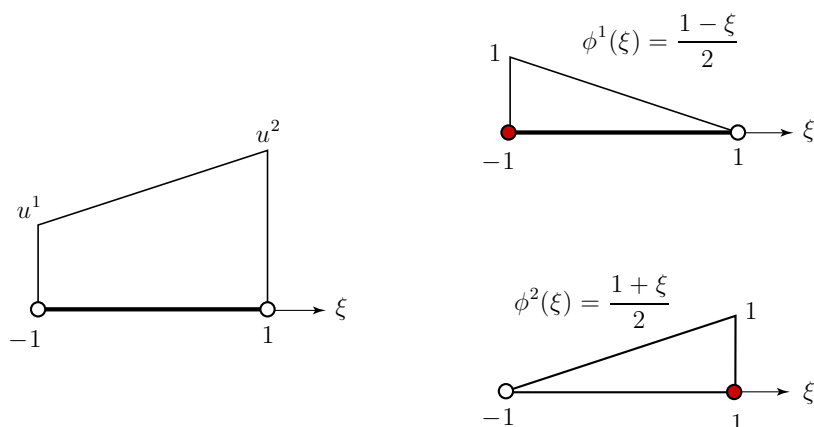


図 8: 2次元問題における線形要素

実際には、 -1 から $+1$ まで変化する無次元座標 ξ による関数 $\phi^1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$ と $\phi^2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$ を用いて、たとえば要素 j 内のポテンシャル u_j を次式のように表すことによって直線近似している。

$$u_j = u_j(\xi) = \phi^1(\xi)u_j^1 + \phi^2(\xi)u_j^2 = \frac{1-\xi}{2}u_j^1 + \frac{1+\xi}{2}u_j^2, \quad \xi \in [-1, +1] \quad (28)$$

関数 ϕ^1 や ϕ^2 を内挿関数と呼ぶ。積分を変数 ξ で実行するためには、要素内の座標 \mathbf{x}_j も変数 ξ で表しておかなければならない。すなわち次のようにする。

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j(\xi) = \phi^1(\xi)\mathbf{x}_j^1 + \phi^2(\xi)\mathbf{x}_j^2, \quad \xi \in [-1, +1] \quad (29)$$

同様に、2次要素の場合は次式のようになる。

$$\begin{aligned} u_j &= u_j(\xi) = \phi^1(\xi)u_j^1 + \phi^2(\xi)u_j^2 + \phi^3(\xi)u_j^3 \\ &= \frac{\xi(\xi-1)}{2}u_j^1 + (1-\xi)(1+\xi)u_j^2 + \frac{\xi(\xi+1)}{2}u_j^3, \quad \xi \in [-1, +1] \end{aligned} \quad (30)$$

2次要素の節点と内挿関数を図示すると、図9のようになる。

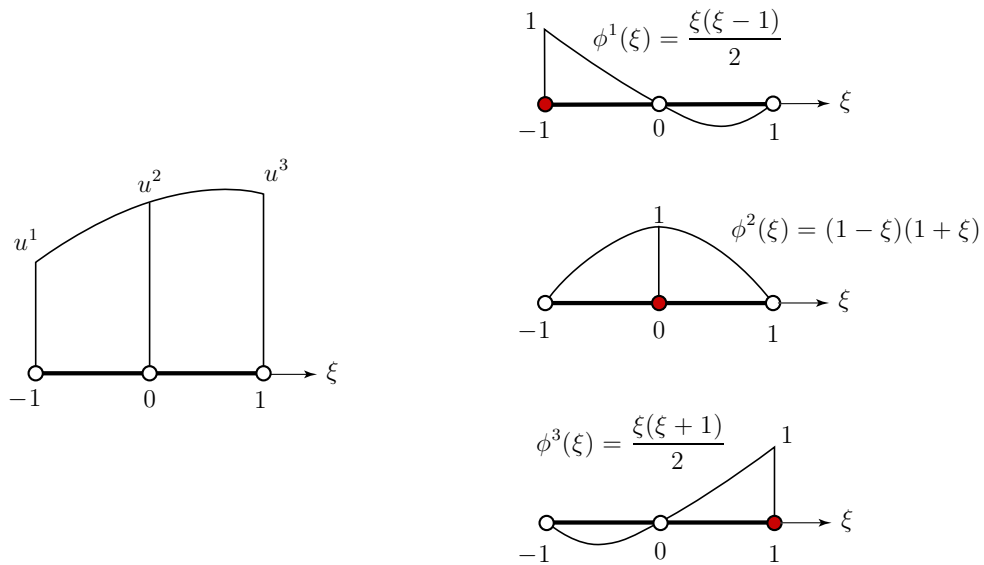


図 9: 2次元問題における2次要素

線形要素や2次要素などの高次要素で離散化したときは、境界条件を要素ごとに与える。例えば2次要素の場合は、図10のように各要素ごとに、節点1、節点2、節点3のように与える。

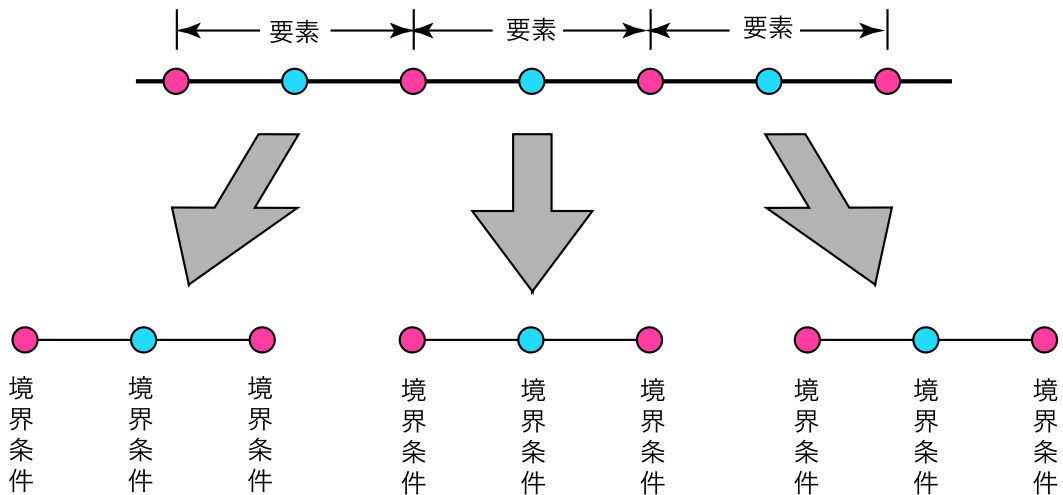


図 10: 高次要素で離散化したときの境界条件の与え方

3次元問題では一般に三角形や四角形の要素が用いられる。四角形要素の局所座標形は、図11のように取る。また、四角形要素における1次要素と2次要素（セレンディピティ要素）は、それぞれ図12と13のようになる。

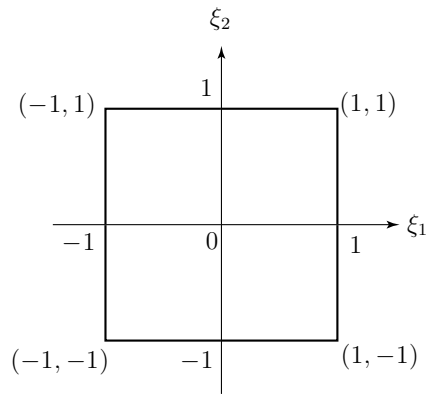
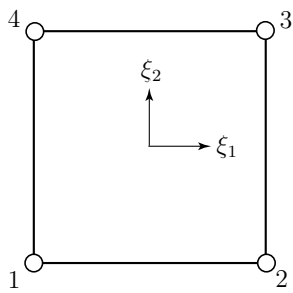
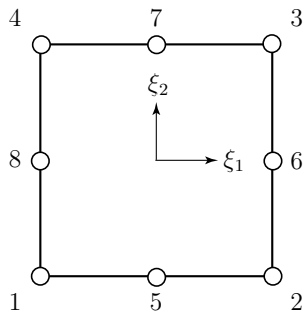


図 11: 3次元問題における四角形要素の局所座標形



$$\begin{aligned} \phi^1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \phi^2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \phi^3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\ \phi^4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \end{aligned}$$

図 12: 四角形 1 次要素



$$\begin{aligned} \phi^1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(-\xi_1 - \xi_2 - 1) \\ \phi^2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2 - 1) \\ \phi^3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 1) \\ \phi^4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(-\xi_1 + \xi_2 - 1) \\ \phi^5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \phi^6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2) \\ \phi^7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\ \phi^8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2) \end{aligned}$$

図 13: 四角形 2 次要素

また，三角形要素の局所座標形と 1 次要素と 2 次要素は，それぞれ図 14，15，16 のようになる。

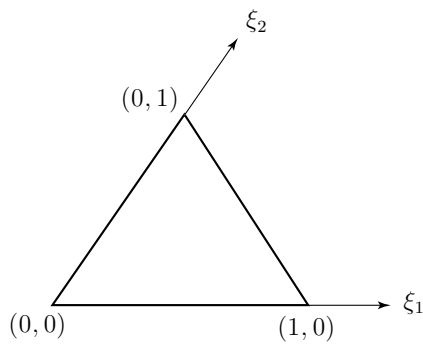


図 14: 3 次元問題における三角形要素の局所座標形

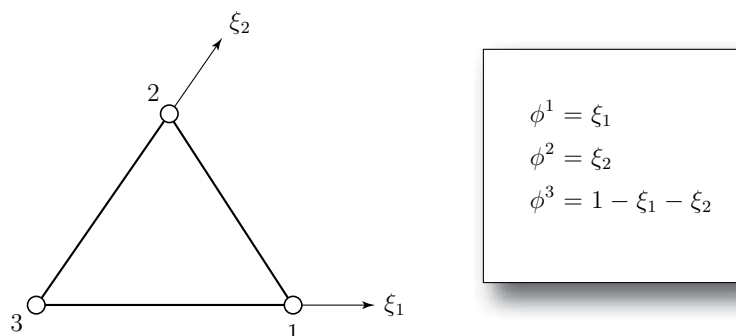


図 15: 三角形 1 次要素

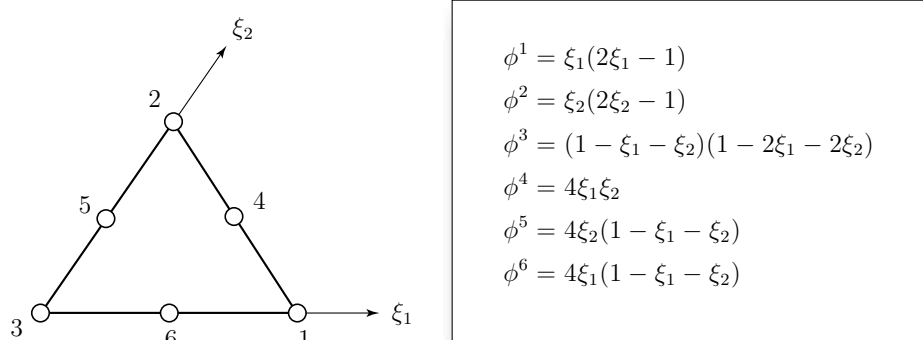


図 16: 三角形 2 次要素

2.8 ポテンシャル問題の解析例

図 17 に示すような二重厚肉円筒断面の 1/4 領域を考える。内側の円筒の熱伝導率を $100\text{W}/(\text{mK})$ 、外側の円筒の熱伝導率を $50\text{W}/(\text{mK})$ 、円筒内壁の温度を 200°C 、外壁の温度を 0°C とする。この問題は軸対称問題であり、図 17 のように 1/4 領域だけを解析対象として解くことができる。境界条件として与えられる既知量と未知量の関係は、図 18 ようになる。内側の円筒と外側の円筒が接する境界では温度と熱流束の両方が未知であるが、温度と熱流束の連続性を考慮することにより、未知量を 1 つにできる。

図 19 に、境界要素法で得られた x 軸に沿った温度分布を厳密解と比較して示す。

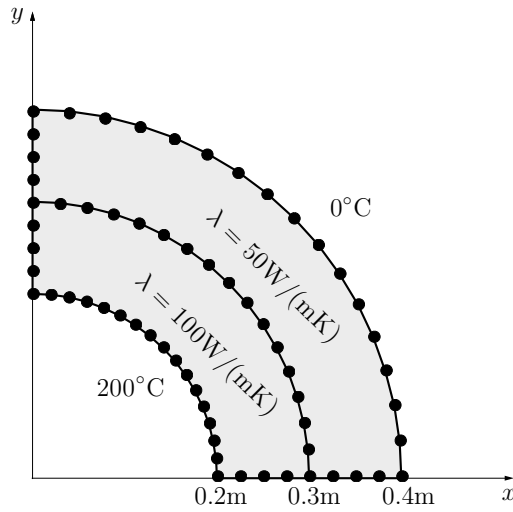


図 17: 二重厚肉円筒断面の 1/4 領域と要素分割

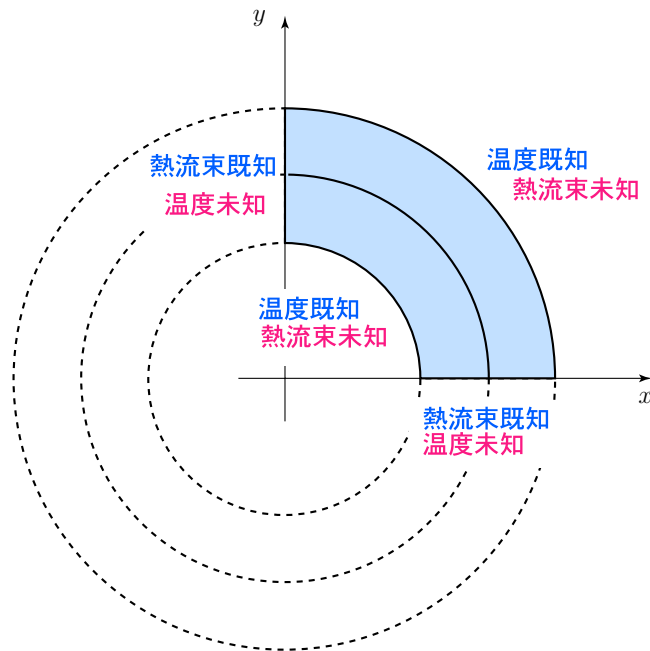
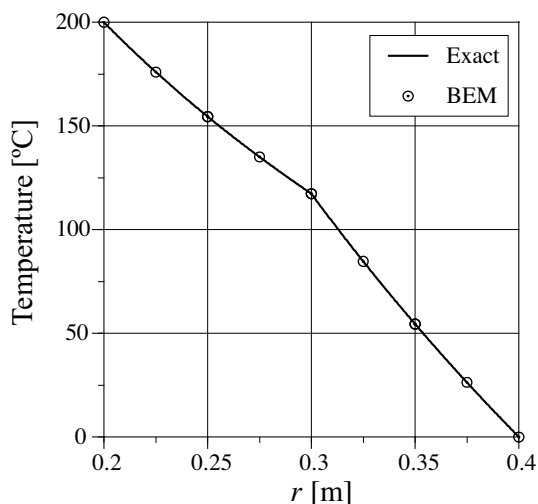


図 18: 軸対称な形状, 境界条件の 1/4 領域の境界条件と未知量

図 19: 境界要素法により得られた円筒の x 軸に沿った温度分布

3 定常音響問題

3.1 基礎となる方程式

定常音響問題の支配微分方程式は、次の Helmholtz 方程式である。

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (31)$$

ただし、 $p(\mathbf{x})$ は領域 Ω 内の点 \mathbf{x} の音圧 [Pa], $k = \omega/C = 2\pi f/C$ は位相定数 [m^{-1}], ω は角振動数 [rad/s], C は音速 [m/s], f は振動数 [s^{-1}] である。定常音響問題では、音圧 p は位相と振幅を含む量として、複素数として扱う。

定常音響問題における境界条件は、次のようになる。

$$p(\mathbf{x}) = \bar{p}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p \quad (32)$$

$$v(\mathbf{x}) = \bar{v}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v \quad (33)$$

ただし、 v は粒子速度 [m^2/s] である。粒子速度 v は、音圧と次の関係がある。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -(i\omega\rho)v \quad (34)$$

ただし、 i は虚数単位、 ρ は媒質の密度 [kg/m^3] である。

定常音響問題で重要なもう 1 つの境界条件は、インピーダンス境界条件である。インピーダンス境界条件は、次式のように書ける。

$$p = zv \quad (35)$$

z は音響インピーダンス密度 [Ns/m^3] であり、平面波では、 z は実数となる。

音響問題における境界積分方程式もポテンシャル問題と同様、次のようになる。

$$c p(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(x) d\Gamma = - \int_{\Gamma} i\omega\rho p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(x) d\Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad (36)$$

ただし、 ρ は媒質の密度 [kg/m^3], p^* は Helmholtz 方程式の基本解, q^* は基本解の法線方向勾配であり, 2次元問題の場合はそれぞれ次のようになる。

$$p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (37)$$

$$q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} = -\frac{k}{4} H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (38)$$

ここで、 $H_0^{(2)}$ と $H_1^{(2)}$ はそれぞれ 0 次と 1 次の第 2 種 Hankel 関数である。

また、3次元問題の場合は基本解は次のようになる。

$$p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-ikr) \quad (39)$$

$$q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1+ikr}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \exp(-ikr) \quad (40)$$

3.2 簡単な解析例

簡単なモデルについて、解析例を示す。図 20 に示すような正方形キャビティ内において、左側の壁で音圧が 1Pa, 右側の壁で音圧が 0Pa, 上下の壁で粒子速度が 0m/s である。

この問題の解析結果 (x 軸に沿った点の音圧の絶対値) は、図 21 のようになり、厳密解と一致した解が得られる。

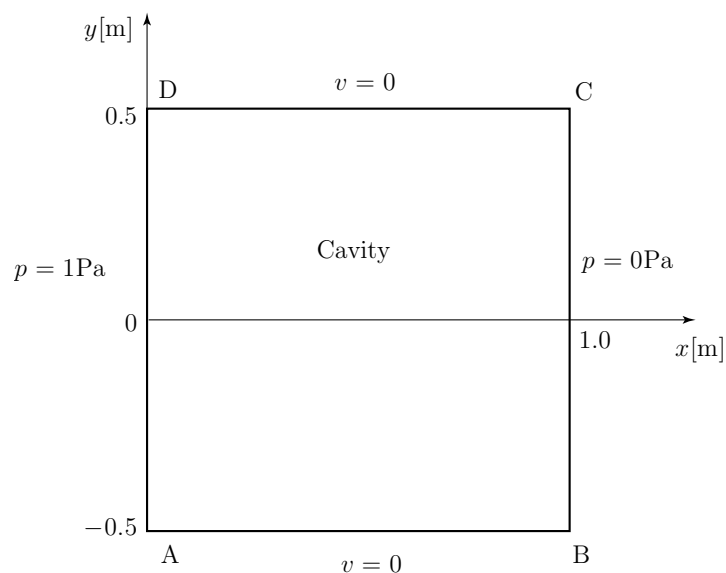


図 20: 正方形キャビティ

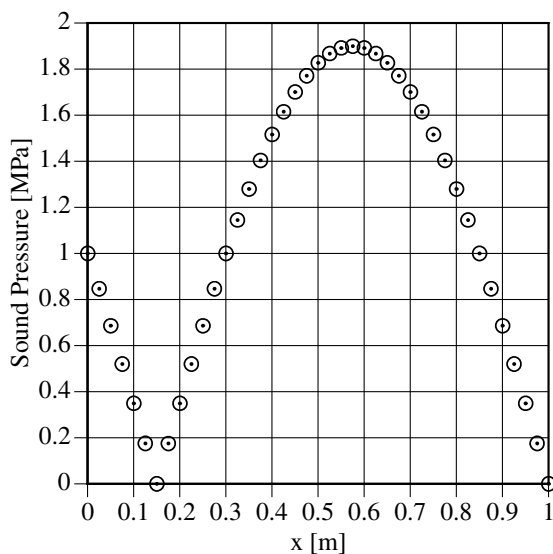


図 21: 正方形キャビティの解析結果

4 静弾性問題

4.1 支配微分方程式

等方線形弾性体の支配微分方程式は、次の Navier の方程式である。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (41)$$

ただし、 u_i は変位ベクトル、 b_i は物体力ベクトルであり、繰り返し用いられている添え字 j については 1 から 3 まで和をとるものとする。また、 λ と μ はそれぞれ Lamé の定数であり、Young 率を E 、Poisson 比を ν とすると、

$$\lambda = \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{E}{1+\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (42)$$

と書くことができる。

式 (41) は連立の 2 階の偏微分方程式である。式 (41) を各座標軸 x_1 , x_2 , x_3 方向成分ごとに具体的に書き下すと、次のようになる。

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + b_1 = 0 \quad (43)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + b_2 = 0 \quad (44)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + b_3 = 0 \quad (45)$$

静弾性問題における境界条件は変位または表面力に関して与えられ、次のようになる。

$$u_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (46)$$

$$t_i(\mathbf{x}) = \bar{t}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (47)$$

ただし、 t_i は表面力ベクトルであり、応力テンソル σ_{ij} と境界の外向き単位法線ベクトル n_i を用いて、次式 (Cauchy の公式) で表される。

$$t_i = \sigma_{ji}n_j \quad (48)$$

ただし、繰り返し用いられている添え字 j については 1 から 3 まで和をとるものとする。参考までに、式 (48) を各座標軸 x_1, x_2, x_3 方向成分ごとに具体的に書くと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ t_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ t_3 &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

応力テンソルは、次の構成方程式によりひずみテンソルと関係づけられる。

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (50)$$

また、ひずみテンソルは次式により変位ベクトルと関係づけられる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (51)$$

式 (50) と (51) を式 (48) に代入すると、

$$t_i = [\lambda\delta_{ij}u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})]n_j \quad (52)$$

となることから、表面力は変位勾配に関係づけられることが分かる。すなわち、支配微分方程式は変位ベクトルに関する 2 階の偏微分方程式であり、境界条件としては変位ベクトルまたは変位勾配に関する量が規定されることがわかる。

静弾性問題における変位の境界積分による変位の解は、次の Somigliana の公式である。

$$u_j(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_i(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Omega \quad (53)$$

ここで、 u_{ij}^* は Navier の方程式の基本解、 t_{ij}^* は u_{ij}^* に対応する表面力であり、2次元問題のときはそれぞれ次のようになる。

$$u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (54)$$

$$t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad (55)$$

また、3次元問題のときは次のようになる。

$$u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (56)$$

$$t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad (57)$$

Somigliana の公式は、Green の公式と異なり 2 次元問題の場合は 2 個の積分公式、3 次元問題の場合は 3 個の積分公式となっていることに注意されたい。

静弾性問題の境界積分方程式も、次のようにポテンシャル問題のと似たものになる。

$$C_{ij}u_i(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_i(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_i(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad (58)$$

ただし、 C_{ij} は境界上の 1 点 \mathbf{y} が置かれている境界の形状に依存する定数マトリックスである。

弾性問題がポテンシャル問題や音響問題と異なるのは、弾性問題においてはベクトル量を扱わなければならないという点である。すなわち、境界条件は各要素の各節点において、それぞれの座標軸方向ごとに与えなければならない。たとえば、 x 方向には変位が拘束され、表面力が未知量であるが、 y 方向には表面力が与えられ、変位が未知となる場合が生じる。

また、ポテンシャル問題の場合と同様境界の全ての点で表面力を与えた場合は、解が一意に決定できない。これは境界全体に力を与えても物体の平行移動と剛体回転の自由度が残されたままとなっているからである。したがって、このような場合は物体のどこか 1 点を固定して平行移動のモードを除き、さらに別の点のある方向の変位を 0 と置くことにより剛体回転のモードを除く必要がある。

式 (58) も、ポテンシャル問題のときと同様に離散化すれば連立一次方程式に帰着する。さらに、各座標軸方向ごとに境界条件を与えることにより、未知量に関する連立方程式が得られる。

4.2 静弾性問題における解析例

静弾性問題の簡単な解析例として、図 22 のような一様な内圧が作用する平面ひずみ状態の厚肉円筒断面を考える。この問題は形状・境界条件とも軸対称な問題であり、図のように 1/4 領域で問題を解くことができる。内壁上では表面力既知であり、その値は内壁上の点 $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ に対して、 $(p \cos \theta, p \sin \theta)$ のようになる。また、外壁は自由表面であるから、表面力既知（ただし、どの成分も 0）となる。1/4 領域を取り出すことによって、新しい切り口の境界が生じる。この境界の境界条件は、例えば x 軸に沿った切り口では x 軸の方向には自由に移動できるから表面力既知であり、その値は 0 と与える。 y 軸方向は、変形が許されないから変位既知であり、その値はやはり 0 となる。 y 軸に沿った切り口についても同様に考える。このように、方向によって、境界条件として与える変位と表面力が混在する場合がある。

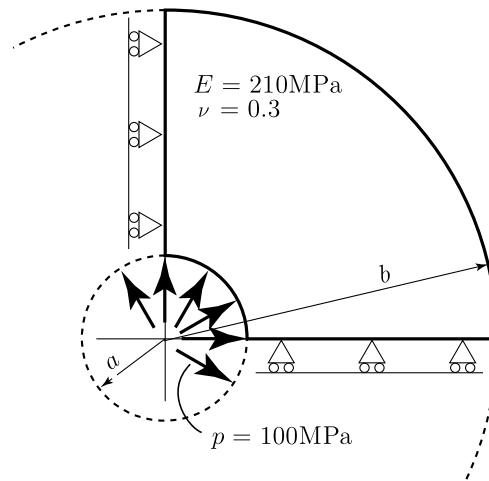


図 22: 一様な内圧が作用する厚肉円筒断面

図 23 と 24 とには, 厚肉円筒断面の問題を境界要素法で解析した結果を厳密解と比較して示す.

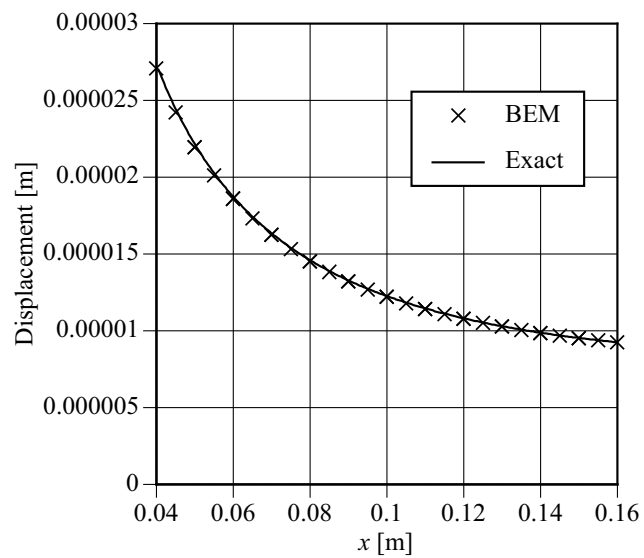


図 23: 一様な内圧が作用する厚肉円筒断面の解析結果 (半径方向の変位)

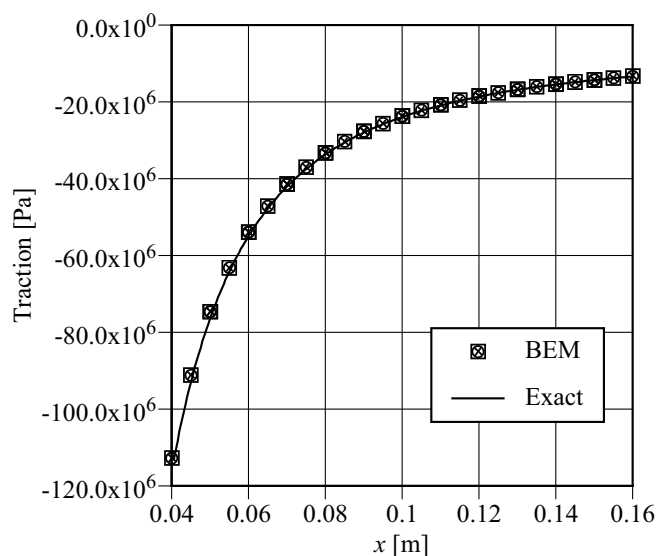


図 24: 一様な内圧が作用する厚肉円筒断面の解析結果 (x 軸に沿った y 方向の表面力)

5 設計感度解析

設計上のパラメータ (設計変数) の最適値を決定する最適化問題における CAE の役割は重要である。最適化問題は一般に非線形問題であり、最適解を得るためには多くの反復計算を必要とする。このため、設計変数が構造物の境界のみに分布しているときは、未知量が境界のみで領域内部の要素分割が不要な境界要素法が有利となる。特に、構造物の形状最適化問題においては、反復計算の仮定で物体の形状が変化していくので、要素の再分割に必要なコストの面からも境界要素法は有用である。

また、実際に最適化計算を実行しなくても、設計変数の値を少しだけ変化させたときに、応答特性がどのように変化するかという変化率を計算するだけでも有用である。この変化率 (感度) を用いれば、設計上のパラメータの変化に対する応答の変化を、線形近似で予測することができる。

境界要素法で基礎とする境界積分方程式は、離散化により次のような連立一次方程式に帰着することは既に示した。

$$[H]\{u\} = [G]\{q\} \quad (59)$$

ある設計上のパラメータ b の値を変化させると、系の応答が変化するような問題を考えよう。例えば、射出成形金型の冷却管の位置や冷却水の温度を変えると、金型キャビティの温度分布が変化するような場合を想定されたい。式 (59) のマトリックス $[H]$ や $[G]$ は物体形状について積分して得られるマトリックスであるから、例えば考えているパラメータ (設計変数) が形状をコントロールするような場合、 $[H]$ も $[G]$ も設計変数の関数となる。また、境界値 u も q も、設計変数の値が変われば一緒に変化する可能性がある。したがってある設計変数を b と書くと、式 (59) は次のように書くことができる。

$$[H(b)]\{u(b)\} = [G(b)]\{q(b)\} \quad (60)$$

式 (60) を設計変数 b で微分すると、次式が得られる。

$$[H(b)] \left\{ \frac{du(b)}{db} \right\} = [G(b)] \left\{ \frac{dq(b)}{db} \right\} - \left[\frac{dH(b)}{db} \right] \{u(b)\} + \left[\frac{dG(b)}{db} \right] \{q(b)\} \quad (61)$$

式 (61) において、境界条件として u や q が分かっているところでは、 $\frac{du}{db}$ や $\frac{dq}{db}$ も既知のはずである。また、式 (60) を解くことによって $\{u\}$ や $\{q\}$ も求まっているはずである。したがって、式 (61) を感度係数 $\frac{du}{db}$ と $\frac{dq}{db}$ の未知量について解くことができる。

定式化の詳細は省略するが、設計変数が物体の形状に関するパラメータの場合、式 (61) の係数マトリックスを計算するためには境界の座標感度も入力データとして準備する必要がある。

5.1 応力感度解析の例

形状感度解析の例として、図 (22) の内壁の半径 a を変化させたときの変位や応力の変化率を計算する場合を考える。この問題は設計変数 a が物体の形状に関するパラメータであり、座標感度が必要となる。座標感度は、図 (25) に示すように境界の座標を予め設計変数を用いて表現しておき、それを設計変数で微分することにより得られる。

たとえば x 軸上の座標は

$$(x, y) = (a + t(b - a), 0), \quad t \in [0, 1] \quad (62)$$

と書くことができるから、

$$\left(\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da} \right) = (1 - t, 0) = \left(\frac{b - x}{b - a}, 0 \right) \quad (63)$$

となる。

また、内壁に沿っては

$$(x, y) = (a \cos \theta, a \sin \theta), \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (64)$$

と書けるから、

$$\left(\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da} \right) = (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right) \quad (65)$$

となる。

図 (26) と (27) には、この問題の半径方向変位の感度係数と周方向応力の感度係数を厳密解と比較して示す。

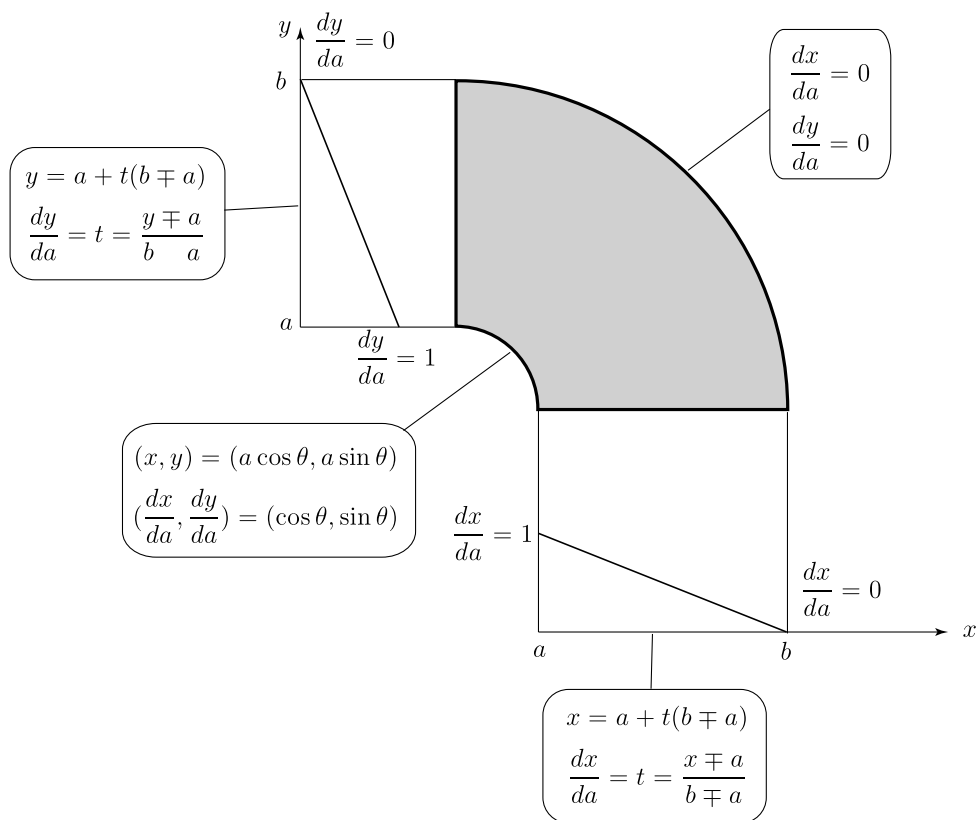


図 25: 座標感度の考え方

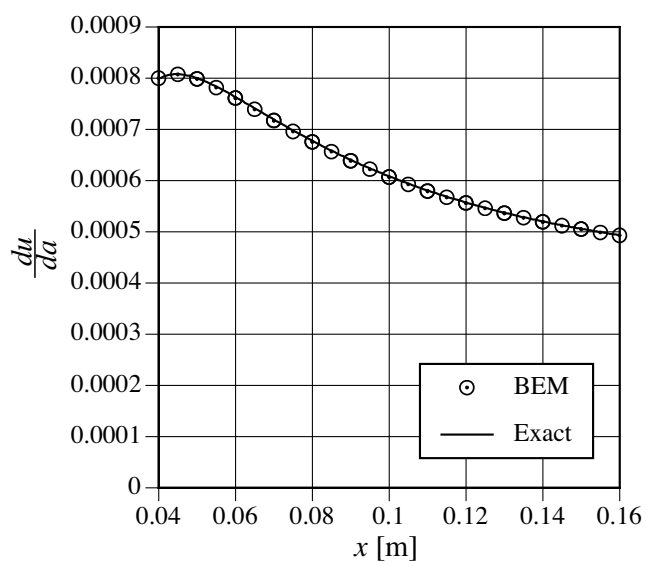


図 26: 半径方向変位の感度係数の計算結果

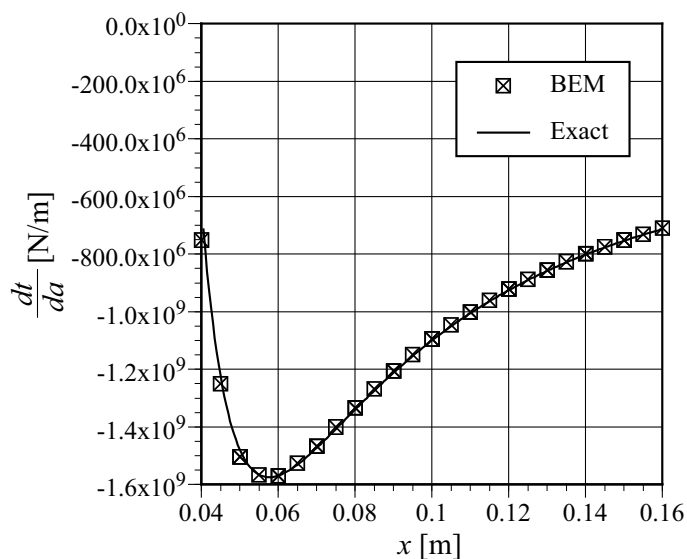


図 27: 周方向応力の感度係数の計算結果

5.2 金型の解析例

ここでは、熱伝導問題に関係した形状最適化問題への簡単な応用例を示す。図 28 に示すような金型断面モデルの冷却管の位置を設計変数として、金型キャビティの温度分布をなるべく均一にするような最適化問題を考える。

図 29 のように、対称性を利用して問題を単純化し、設計変数は冷却管 1 の中心の座標と半径、冷却管 2 の中心の y 座標と半径の合計 5 個とする。目的関数を f 、設計変数を $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ としたとき、この最適化問題は次のように書ける。

$$\text{最小化 } f(\mathbf{b}) = \int_{\text{キャビティ表面}} (T(\mathbf{b}) - T_{\text{目標温度}})^2 d\Gamma \quad (66)$$

ただし、設計変数は各冷却管の中心の座標と半径である。

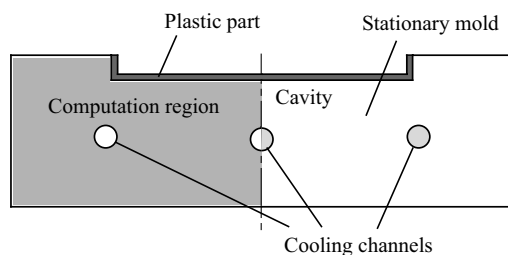


図 28: 金型断面モデル

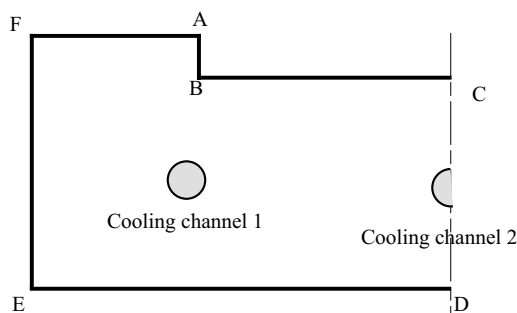


図 29: 金型冷却管の最適化のためのモデル

式 (66) は、キャビティ表面の温度が全て目標温度になったときに最小値 0 となる。実際には、 $f = 0$ となる設計変数の値の組が存在するとは限らないので、 f が 0 になるべく近い最小値をとる設計変数の値を、非線形計画法のアルゴリズムを用いて計算することになる。

最急降下法や共役勾配法などの非線形計画法アルゴリズムにおいては、目的関数の設計変数に関する勾配が計算に用いられる。いま取り上げている問題の場合、ある設計変数 b_i に関する f の勾配は次のようになる。

$$\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial b_i} = \int_{\text{キャビティ表面}} 2(T(\mathbf{b}) - T_{\text{目標温度}}) \frac{\partial T(\mathbf{b})}{\partial b_i} d\Gamma \quad (67)$$

したがって、目的関数の勾配を計算するためには、キャビティ上の温度の感度係数 $\frac{\partial T(\mathbf{b})}{\partial b_i}$ を設計感度解析によって計算する必要がある。

このような最適化問題の解析では、設計変数の最初の値をまず仮定して計算を出発し、最適値が得られるまで設計変数の値を修正しながら何度も解析を繰り返すことになる。金型の冷却管の最適配置の決定問題のような最適化問題では、設計変数は冷却管の位置や大きさに関する形状パラメータであるから、有限要素法で計算する場合には、冷却管の位置の変化に応じて要素分割をやり直さなければならなくなる。このことは、境界要素法で解析する場合についても同じであるが、境界要素法の方がはるかに要素分割が容易である。

図 30 と 31 にはそれぞれ、冷却管の位置の仮定時と最適化後のキャビティ表面の温度分布、および最適化後の冷却管の位置を示す。

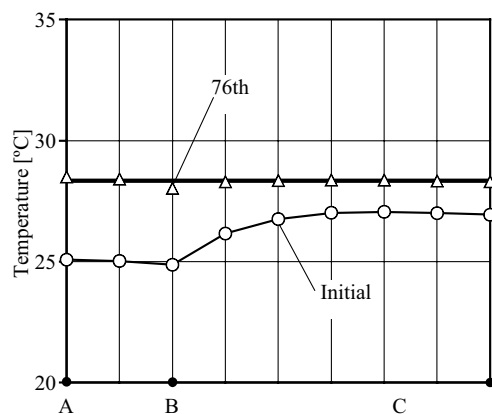


図 30: 仮定時と最適化後のキャビティ表面の温度分布

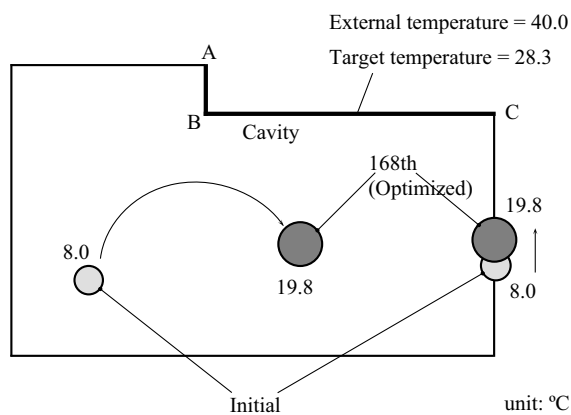


図 31: 仮定時と最適化後の冷却管の位置

図 32 には、同様の解析例として圧縮成形金型の 3 次元モデルについての解析例を示す。図には、キャビティ表面の温度分布が最適化の繰り返し計算の仮定で次第に均一になっていく様子が、温度分布の等高線で示されている。形状が変化する問題の繰り返し計算における要素分割のコストは、特に 3 次元問題において著しく、このような問題における境界要素法の有用性は大きいと考えられる。

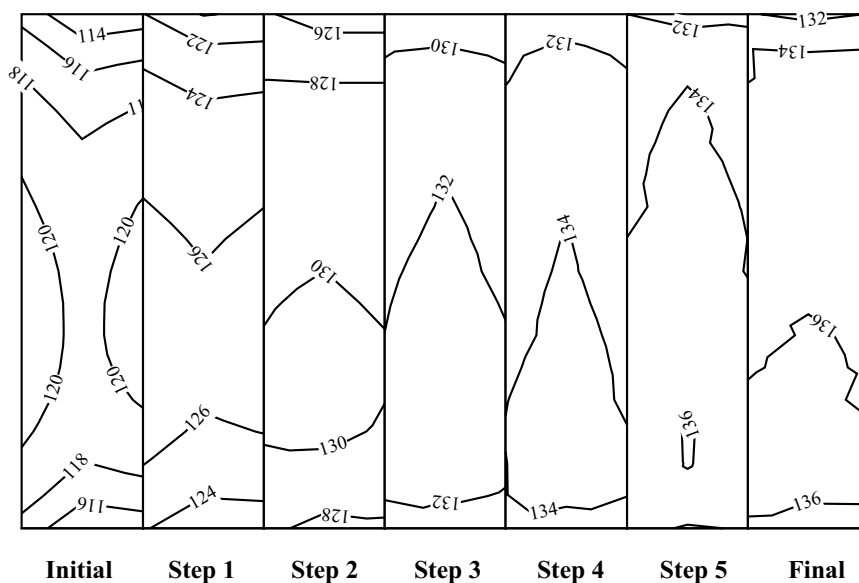


図 32: 圧縮成形金型の蒸気パイプの位置の最適化の仮定におけるキャビティ表面の温度分布の変化

6 参考書

1. 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行, 計算力学と CAE シリーズ 2 「境界要素法」, 培風館, 1991.
2. 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行 (共訳), 詳解境界要素法, オーム社, 1993.
3. 境界要素法研究会編, 境界要素法の理論と応用, コロナ社, 1986.
4. L.C. Wrobel, The Boundary Element Method, Volume 1, Applications in Thermo-Fluids and Acoustics, Wiley, 2002.
5. M.H. Aliabadi, The Boundary Element Method, Volume 2, Applications in Solids and Structures, Wiley, 2002.