多種類の材料からなる構造のためのトポロジー最適化

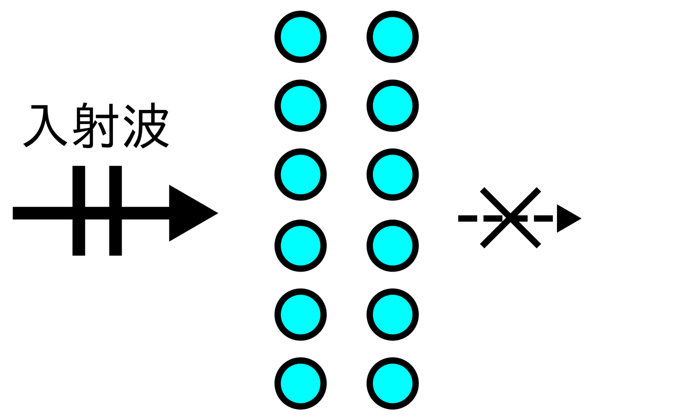
名古屋大学大学院工学研究科機械システム工学専攻 計算力学研究室
松田祐輔, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎

研究の背景

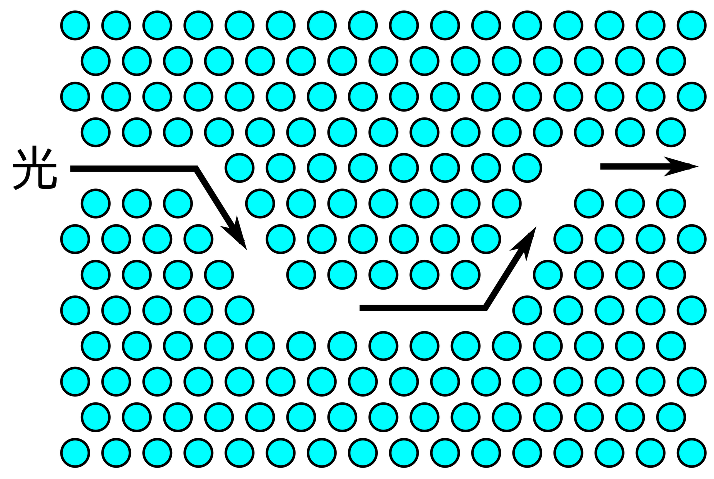
●フォトニック結晶・フォノニック結晶

フォトニック結晶：特定周波数帯(フルバンドギャップ)の光を遮断する特殊な周期構造をもつ材料
フォノニック結晶：バンドギャップの弾性波を遮断する特殊な周期構造をもつ材料

当研究室では、これらの構造を用いた様々な波動デバイスの設計を行っている。
→トポロジー最適化を用いた最適設計



フォトニック・フォノニック結晶の模式図

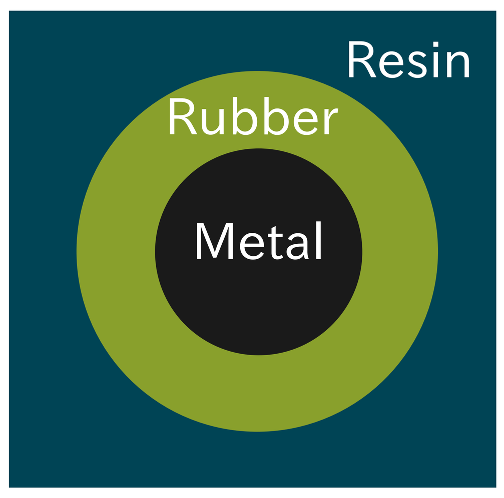


フォトニック結晶を利用した導波管

●多種類の材料からなる構造の設計

従来の研究では2種類の材料からなる構造の設計が行われてきた。
しかし2領域構造ではフルバンドギャップを実現できる周波数帯が制限されてしまう。
→多種類の材料からなる構造の設計へと拡張

これにより局所共振構造を形成できる(右図)など設計の自由度が大きく向上する。



局所共振フォノニック結晶

固い材料(Metal)を柔らかい材料(Rubber)で覆うこと構造により局所共振が発生し、弾性波を吸収する効果が得られる。2種類の材料からなるフォノニック結晶と比べて2桁程度低い周波数帯をフルバンドギャップに含む。

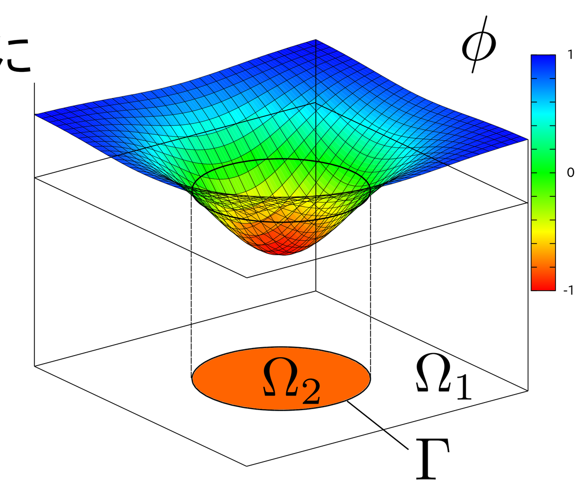
●研究目的：多種類の材料からなる構造に対するトポロジー最適化手法の開発

多種類の領域からなる形状の表現

●レベルセット法

レベルセット法とは、レベルセット関数 ϕ を用いて次のように2種類の領域を表現する方法である。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\boldsymbol{x}) \le 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega_1 \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \boldsymbol{x} \in \Gamma \\ -1 \le \phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$



レベルセット法

●Multi-Material Level Set法 (MM-LS法)

MM-LS法とはレベルセット法の拡張であり、$m+1$種類の領域をm種類のレベルセット関数を用いて表現する。

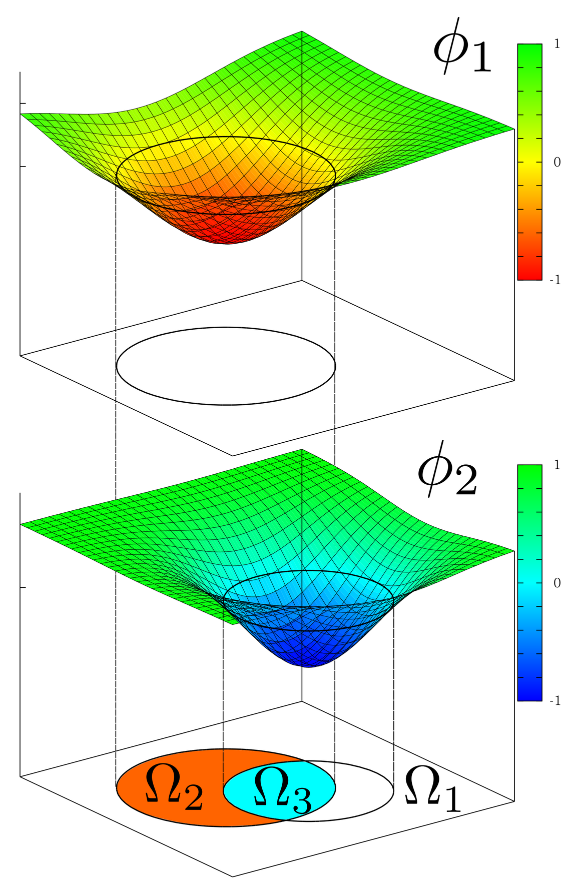
When $\forall j \in \mathbb{N},\ -1 \le \phi_j(\boldsymbol{x}) < 0,\ j < i$

$$\begin{cases} 0 < \phi_i(\boldsymbol{x}) \le 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega_i \\ \phi_i(\boldsymbol{x}) = 0 & \boldsymbol{x} \in \Gamma \\ -1 \le \phi_i(\boldsymbol{x}) < 0 & \boldsymbol{x} \in \cup_{k=i+1}^{m} \Omega_k \end{cases}$$

たとえば3種類の領域は2種類のレベルセット関数を用いて以下のように表現できる。

ϕ_1	ϕ_2	領域
$+$	$+$	Ω_1
	$-$	
$-$	$+$	Ω_2
	$-$	Ω_3

3種類の領域とレベルセット関数の関係



MM-LS法(3領域)

MM-LS法に基づいたトポロジー最適化

●レベルセット法に基づいたトポロジー最適化

トポロジー最適化とは、領域の形状のみならずトポロジーの変化まで許容した自由度の高い設計手法である。
特にレベルセット法 (MM-LS法)を用いることで、最適化問題を各レベルセット関数の最適な分布を求める問題へと帰着することができる。

●トポロジー導関数を用いたレベルセット関数の更新

MM-LS法に基づいた各レベルセット関数の最適な分布は、適当な初期形状から次の式を用いて時間発展的に計算する。

$$\frac{\partial \phi_i(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} sK\mathcal{T}^{(k\to j)}(\boldsymbol{x}) + \tau \nabla^2 \phi_i(\boldsymbol{x}, t)$$

ここにsは領域番号j,k の大小関係で決定される符号である。
また$\mathcal{T}$はトポロジー導関数と呼ばれる関数と呼ばれる、トポロジーの変化に対する目的関数 J の変化の割合である。今回は固定設計領域中のある点 $\boldsymbol{x} \in \Omega_k$に微小円形領域 Ω_j(半径 ε)が生じた場合を考え、次の式でトポロジー導関数を定義する。

$$\delta J = \pi \varepsilon^2 \mathcal{T}^{(k\to j)} + o(\varepsilon^2)$$

$\mathcal{T}^{(k\to j)} < 0$: Ω_jが発生すると目的関数が増加
$\mathcal{T}^{(k\to j)} > 0$: Ω_jが発生すると目的関数が減少

数値計算例

実際に最適化を行った例を示す。ここでは3種類の誘電体からなる領域に電磁波が入射する2次元電磁波散乱問題を考え、観測点における磁場強度の最小化を行った。ただし入射波は面外方向に偏光された磁場をもつ角周波数0.5の平面波とした。観測点は$x_1 = 50$、$-10 \le x_2 \le 10$ の範囲に等間隔に11点とり、以下の問題を計算した。

Find $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \subset D$ such that

$$\min\ J = \sum_{i=1}^{11} \frac{1}{2} |u(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{obs}})|^2$$

subject to

★ Ω_3が Ω_2に覆われる形状

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) > \phi_2(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D$$

★2次元電磁波散乱問題

支配方程式

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) + k_i u(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_i$$

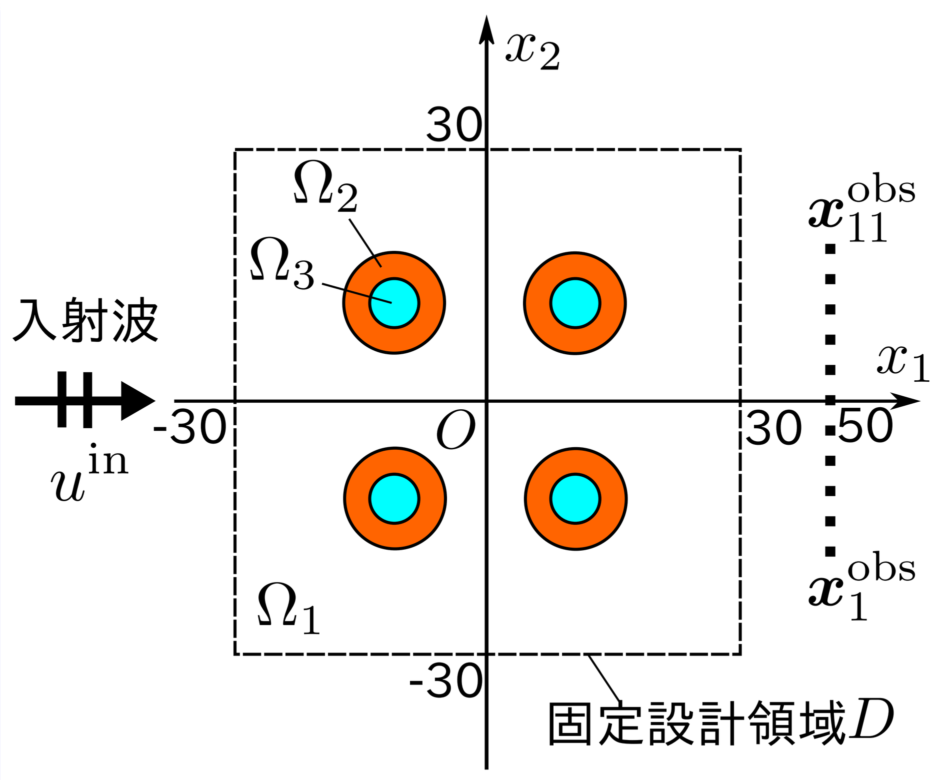
境界条件

$$u^{(i)}(\boldsymbol{x}) = u^{(j)}(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{ij}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_j}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial n} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{ij}$$

(磁場・電場の接線方向の連続性)

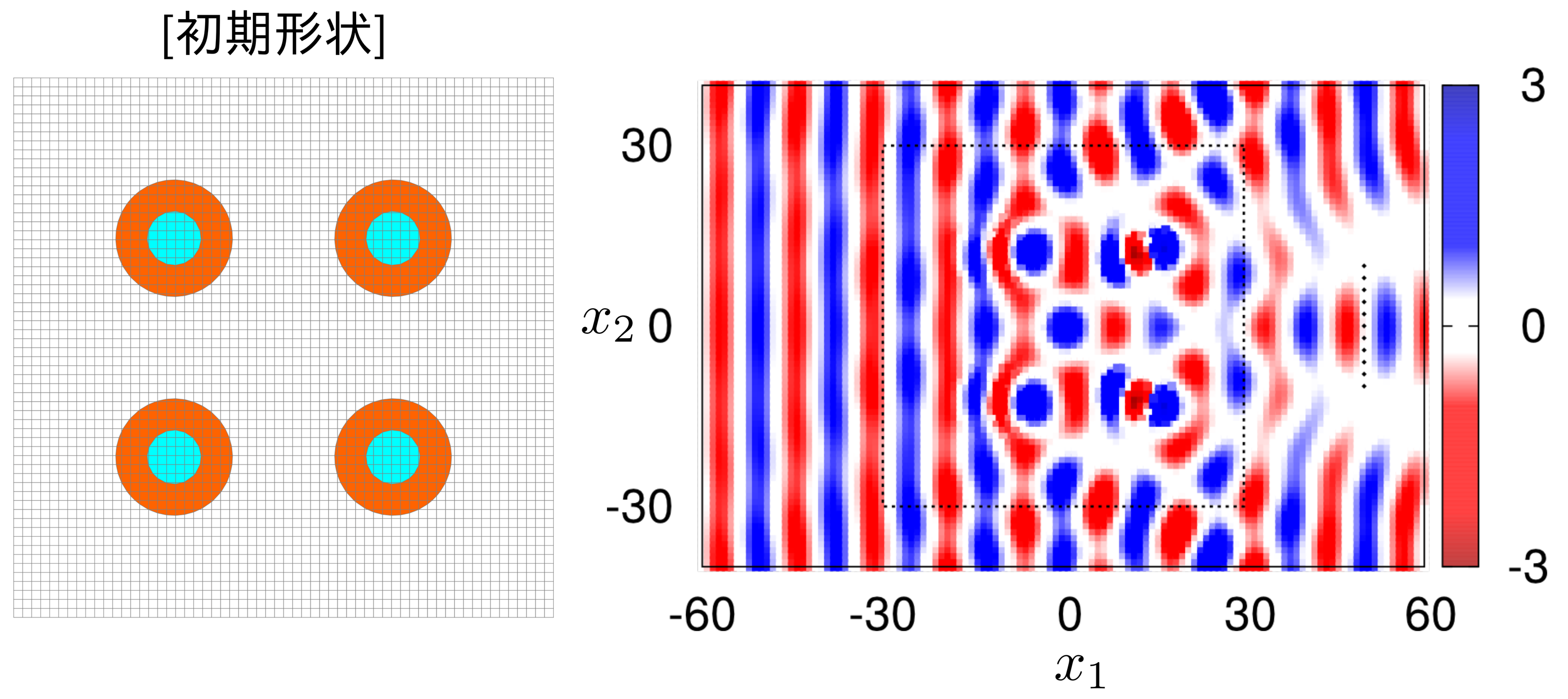
放射条件 $|\boldsymbol{x}| \to \infty$



u ：磁場の面外成分
k_i: Ω_iにおける波数
Γ_{ij}: Ω_iとΩ_jの境界
ε_i: Ω_iの誘電率
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, 2, 3)$

以下に初期形状および得られた最適形状と、各形状における磁場の分布を示す。初期形状において目的関数は2.973であったが、最適形状での目的関数は0.044へと減少しており、3種類の領域に対する最適化に成功したと言える。

[初期形状]



[最適形状]