

## 写像変換を用いたエレメントフリー解析

## ELEMENT FREE ANALYSIS USING MAPPING TECHNIQUE

大上 俊之<sup>1)</sup>, 野町 直秀<sup>2)</sup>, 豊島 栄次<sup>3)</sup>

Toshiyuki OHKAMI, Naohide NOMACHI and Eiji TOYOSHIMA

1) 信州大学工学部社会開発工学学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: tohkami@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

2) 高知県警 (〒 780-8554 高知市丸ノ内 2-4-30 )

3) (株) フクザワコーポレーション (〒 389-2414 飯山市常盤 1234 )

This paper presents an element free method using mapping technique. The region defined in physical domain is mapped into computational domain of rectangular grid, and the stiffness matrix for the element free method is also transformed and calculated numerically in the mapped computational domain. By using mapping technique, the essential boundary conditions can be directly evaluated and boundary value problems with curvilinear boundary shape can be easily treated in the mapped domain. The efficiency of the calculation is attempted by applying the nodal integration to the domain integral. The validity of this method is examined for two-dimensional elastic problems.

**Key Words:** element free method, mapping, elastic problem, essential boundary condition, nodal integration

## 1. はじめに

要素分割を必要としない数値解析手法としてメッシュレス法あるいはエレメントフリー法と呼ばれる手法が工学のさまざまな分野で研究されている<sup>(1)</sup>. メッシュレス法の中で最も著名な手法の一つに Belytschko ら<sup>(2)</sup> によって提案されたエレメントフリーガラキン法 (EFGM) がある. EFGM は弱形式で表示された連続体の支配方程式を節点群のみで離散化し, 物理量の関数近似に移動最小二乗法 (MLSM) を用いることによりメッシュレス化を可能としている手法であり, 有限要素法で用いられる内挿近似が節点を介してその微分値が不連続であるのに対して, EFGM による近似はどの区間も連続で得ることができるという特徴を有している. 反面, EFGM では MLSM に基づいているが故に基本境界条件を満足させることが困難であるといった欠点がある. 基本境界条件の解決方法を含めこれまでに数多くのエレメントフリー法に関する研究が報告されている<sup>(3)-(9)</sup>.

著者らもエレメントフリー法の 1 手法として実平面における形状を写像変換するとともに写像平面上において剛性マトリックスの作成を行う方法を提案した<sup>(10)</sup>. そこでは, 写像変換をすることによって曲線境界を有する形状の問題に対しても写像平面上では解析対象の領域をバックグラウンドセルと一致させることができ, 計算が容易になること, また, 写像平面上において重み関数を必要としない近似関数 (内挿関数) を用いているため関数値がそのまま節点の未知量とな

り, 基本境界条件を通常の FEM と同様に直接評価できることを示した.

EFGM では領域積分を実施するためにバックグラウンドセルが用いられる. そのためにデータ構造が複雑となり計算時間を多く必要とするという問題点を有している.

本論文では剛性マトリックス作成のための領域積分に対して節点データのみで評価する節点積分法 (NBNM)<sup>(11)(12)</sup> を写像平面上で適用し, 計算の効率化を図ることを検討する.

数値計算例として厳密解が既知な 2 次元弾性問題について, 本手法による解析結果と厳密解, FEM による結果との比較を行い, 本手法の適用性について検討を行う.

## 2. 写像変換と内挿関数

パラメータ  $t$  によって決まる関数を  $u(t)$ , 内挿関数を  $\psi_i(t)$  とすると,  $i = 0 \sim n$  の  $n + 1$  個の  $u_i$  を通る近似関数  $u^h(t)$  は

$$u^h(t) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) u_i \quad (1)$$

と表すことができる.

2 次元では, 写像可能な領域形状の場合 Fig.1 に示すように領域の境界に沿ってパラメータ  $t_1, t_2$  を導入し, 写像変換をすることによって直交格子が得られる. 空間内に与えられた  $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1)$  個の点をとる平面  $(x, y)$  は  $t_1, t_2$  の関数

として次式によって表すことができる。

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) x_{ij} \\ y(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) y_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに  $x_{ij} = x(i, j)$ ,  $y_{ij} = y(i, j)$  であり,  $t_1, t_2$  は, それぞれ,  $0 \leq t_1 \leq n_1$ ,  $0 \leq t_2 \leq n_2$  を満たす実数である。

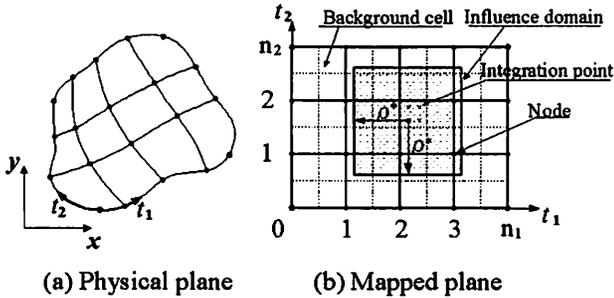


Fig. 1 Physical plane and mapped plane

写像平面上では解析対象の全領域とバックグラウンドセルを足し合わせたものを一致させることができるため, 剛性マトリックス作成のためのセルの領域積分についても, 写像平面上でセルごとに積分し, その全体和を求めるだけでよいことになる。

Fig.2 に示すように写像平面における影響領域として, 評価点  $(t_1, t_2)$  を中心とする 1 辺の長さ  $2\rho^*$  の正方形領域を考え, 変位  $u, v$  の関数近似に対しても内挿関数  $\psi_i(t)$  を適用すると, 写像平面上の影響領域内に含まれる  $(m_1+1) \times (m_2+1)$  個の節点に対して, 変位  $u, v$  が

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) u_{ij} \\ v(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) v_{ij} \end{aligned} \quad (3)$$

と表現される。

関数値  $u(t_{1i}, t_{2j})$ ,  $v(t_{1i}, t_{2j})$  が節点の変位値  $u_{ij}$ ,  $v_{ij}$  そのものを表すことになるので, 基本境界条件の処理を通常の FEM と同様の方法で行うことができる。本研究では内挿関数  $\psi_i(t)$  として次式で与えられる Lagrange 多項式を用いた。

$$\begin{aligned} \psi_i(t) &= \prod_{k=0, k \neq i}^N L_{k,i}(t) \\ L_{k,i}(t) &= \begin{cases} 1 & (k=i) \\ \frac{t-t_k}{t_i-t_k} & (k \neq i) \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

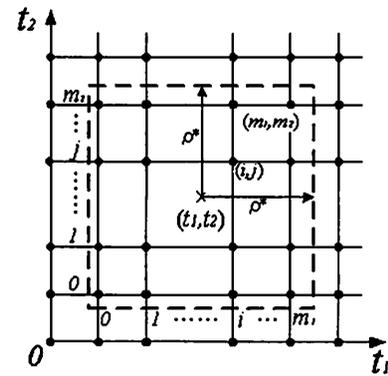


Fig. 2 Influence domain near evaluation point<sup>10)</sup>

### 3. 写像平面上におけるエレメントフリー法

EFGM による定式化は FEM の定式化とほぼ同じであり, 実平面上のデカルト座標系において弱形式化された弾性問題の剛性マトリックスは, 形式的には EFGM でも FEM と同様に以下のような形で求めることができる。

$$\mathbf{K} = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \quad (5)$$

ここに,  $\Omega$  は実平面上における領域を示し,  $\mathbf{K}$  は剛性マトリックス,  $\mathbf{B}$  はひずみ変位マトリックス,  $\mathbf{D}$  は応力ひずみマトリックスである。

式 (5) を写像平面  $(t_1, t_2)$  座標に変換することによって,  $\mathbf{K}$  は以下のように写像平面上におけるバックグラウンドセルごとの積分の和として表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \iint_{\Omega^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 \\ &= \sum_{cell} \iint_{\Omega_{cell}^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6)$$

ここに,  $\Omega^*$  は写像平面上における領域を示し,  $|J_D|$  はヤコビアンである。式 (6) の第 2 式に示すように, 領域積分がセルごとの積分の和と一致することが写像変換を用いる手法の特徴の 1 つである。

式 (6) に対して Gauss の数値積分を適用すると

$$\mathbf{K} = \sum_{cell} \sum_{g_1} \sum_{g_2} W_{g_1} W_{g_2} [\mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D|]_g |J|_g \quad (7)$$

のように表現できる。ここに, 添え字の  $g$  は Gauss の積分点についての寄与であることを意味しており,  $W_g$  は Gauss 積分点の重み,  $|J|_g$  はヤコビアンである。また,  $\mathbf{B}$  が

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

であることから，式 (8) を変数変換することによって， $\mathbf{B}^*$  は次のように求めることができる。

$$\mathbf{B}^* = \frac{1}{J_D} \begin{bmatrix} y_{t_2} \partial_{t_1} - y_{t_1} \partial_{t_2} & 0 \\ 0 & -x_{t_2} \partial_{t_1} + x_{t_1} \partial_{t_2} \\ -x_{t_2} \partial_{t_1} + x_{t_1} \partial_{t_2} & y_{t_2} \partial_{t_1} - y_{t_1} \partial_{t_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに，

$$\begin{aligned} x_{t_1} &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{\partial \psi_i(t_1)}{\partial t_1} \psi_j(t_2) x_{ij} \\ x_{t_2} &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \frac{\partial \psi_j(t_2)}{\partial t_2} x_{ij} \\ y_{t_1} &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{\partial \psi_i(t_1)}{\partial t_1} \psi_j(t_2) y_{ij} \\ y_{t_2} &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \frac{\partial \psi_j(t_2)}{\partial t_2} y_{ij} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\partial_{t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad \partial_{t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (11)$$

であり，本研究で用いた Lagrange 多項式の場合，内挿関数の 1 階微分は次のようになる。

$$\frac{\partial \psi_i(t)}{\partial t} = \sum_{k=0, \neq i}^N \frac{\prod_{m=0, \neq k}^N L_{m,i}(t)}{t_i - t_k} \quad (12)$$

#### 4. 節点積分法による計算の効率化

一般に，剛性評価のための領域積分には式 (7) に示すように数値積分が用いられる。ここでは計算効率の向上を図るために節点積分法 (NBNM)<sup>(11)(12)</sup> を適用する。NBNM は，節点データのみを用いて領域積分を評価するもので，節点と数値積分点を一致させることにより計算時間を短縮することができる。

通常の節点積分法ではバケット法を用いて数値積分の重みを節点に分配する作業が必要となるが，本手法では解析領域を節点間隔が 1 の矩形格子状の領域に写像変換しているため，Fig.3 に示すように各節点に配分する重みが領域内節点では 1，境界上では 0.5，隅各点では 0.25 となり，節点位置に応じて自動的に設定することが可能となる。

剛性マトリクス  $\mathbf{K}$  を節点  $I$  の積分で評価する場合は， $\mathbf{K}$  は節点の周囲に設定した領域  $\Omega_I^*$  を用いて次のように表現できる。

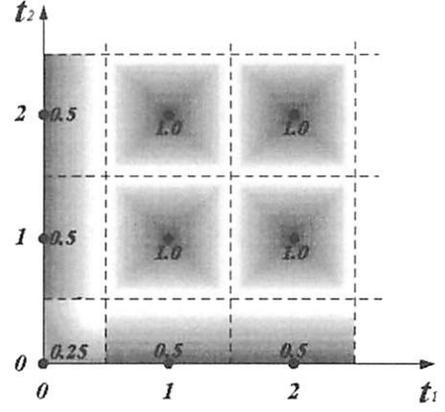


Fig. 3 Nodal weights on mapped plane

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \iint_{\Omega^*} \mathbf{B}^*(t_1, t_2)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^*(t_1, t_2) |J_D| dt_1 dt_2 \\ &= \sum_{I=1}^{NP} \iint_{\Omega_I^*} \mathbf{B}_I^*(t_1, t_2)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I^*(t_1, t_2) |J_D| dt_1 dt_2 \\ &= \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{k}_I \end{aligned} \quad (13)$$

ここに， $NP$  は解析領域内に分布する総節点数であり， $\mathbf{k}_I$  は節点剛性を表す。式 (13) を節点での 1 点積分で評価する場合， $\mathbf{k}_I$  は次式のように表される。

$$\mathbf{k}_I = \mathbf{B}_I^*(t_{1I}, t_{2I})^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I^*(t_{1I}, t_{2I}) |J_D| W_I \quad (14)$$

ここに  $W_I$  は  $I$  についての領域積分のための重みである。

式 (14) による剛性評価は単純であるが，積分精度の低下に起因して精度良い解が得られない場合がある。その対策として，NBNM では Taylor 級数展開を用いた剛性評価法が用いられる<sup>(12)</sup>。

本手法の場合， $\mathbf{B}_I^*$  は座標  $(t_{1I}, t_{2I})$  の関数であるので， $\mathbf{B}_I^*$  を節点  $I$  を基準とした座標で Taylor 級数展開をする。2 階以上の高次項を無視すると  $\mathbf{B}_I^*$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_I^*(t_1, t_2) &= \mathbf{B}_I^*(t_{1I}, t_{2I}) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}_I^*(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|_{(t_{1I}, t_{2I})} (t_1 - t_{1I}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial \mathbf{B}_I^*(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right|_{(t_{1I}, t_{2I})} (t_2 - t_{2I}) \end{aligned} \quad (15)$$

と表現できる。式 (15) を式 (13) の第 2 式に代入して剛性評価の安定化を図る。

#### 5. 数値解析例

##### 5.1. 先端に荷重をうける片持ちばり

解析例として，Fig.4 に示すような先端に集中荷重を受ける片持ちばりを対象とし，平面応力問題として解析を行う。

材料定数はヤング率  $E = 205.8GPa$ , ポアソン比  $\nu = 0.3$  と仮定し, 通常の4節点平面応力要素を用いたFEM, 写像平面上でのEFGMおよびNBNMを用いて解析を行った. 節点数は3通りの解析法とも  $11 \times 5 = 55$  であり, EFGMおよびNBNMの計算では影響領域の大きさを  $\rho^* = 3$  とした. EFGM, FEMにおける領域積分のためのセル, 要素の数は  $10 \times 4 = 40$  とし, 数値積分は  $3 \times 3$  の Gauss 積分を用いた. 各手法の解析モデルを Fig.5, Fig.6 に示す.

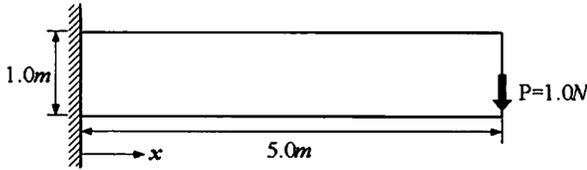


Fig. 4 Cantilever beam model

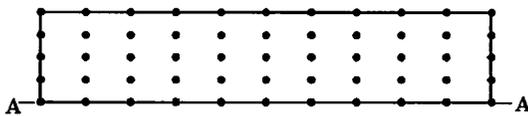


Fig. 5 Meshless model (physical plane)

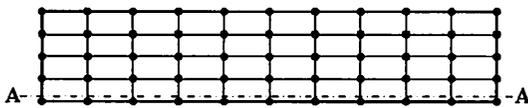


Fig. 6 FEM model

Fig.7は軸線に沿うたわみについて厳密解<sup>(13)</sup>に対する相対誤差の分布を示したものである. 安定化を考慮しない場合のNBNM解析では, FEM解, EFGM解と比較して誤差が増大しているが, 安定化を考慮することにより精度が大きく改善されていることがわかる.

Fig.8は, はりの下縁における応力  $\sigma_x$  の誤差分布を示したもので, 比較のためのEFGM, FEMでは, はりの下縁に最も近い Gauss 積分点 (Fig.6のA-A線)における値を図示している. 荷重載荷点の近傍ではどの手法も誤差の増大がみられるものの, 応力についても安定化を考慮することによりNBNMの結果が改善されている. しかしながら, その効果は変位の場合と比べ小さい. 反面, 固定端では逆に精度が低下している. Fig.9に示すように, 領域内部に比べ端点における精度が影響領域  $\rho^*$  の値に大きく依存しており, 影響領域の設定に注意を要することを示している.

なお, FEMの結果が3点ごとに鋸刃の形状を示しているが, これは, FEMでは要素間境界で内挿近似の微分値が不連続となるためであり, 本計算例では, 要素ごとに  $3 \times 3$  点の Gauss 積分を用いているためにA-A線上では3点ごとにその影響が表れている.

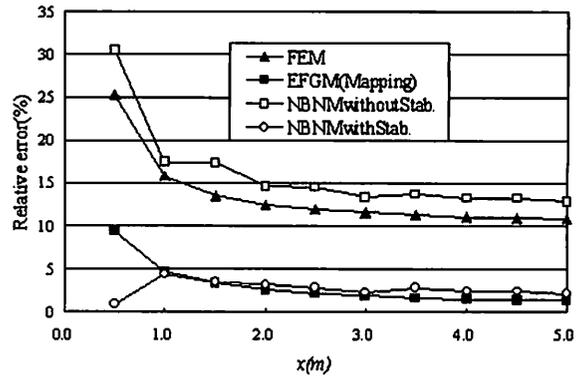


Fig. 7 Relative errors of deflection along the axis

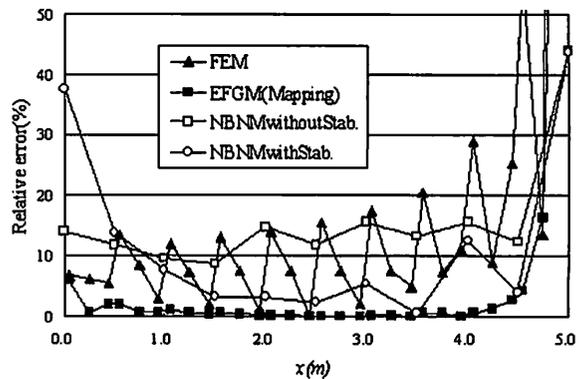


Fig. 8 Relative errors of stress  $\sigma_x$  along the line A-A

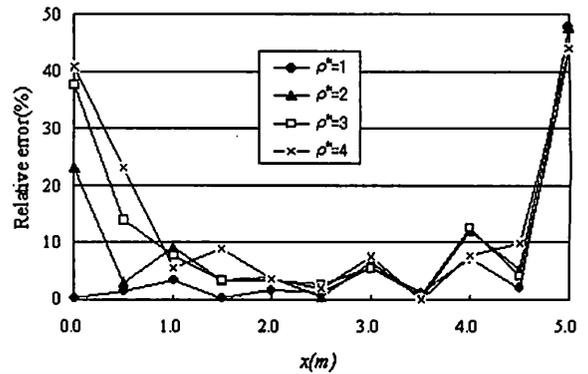


Fig. 9 Relative errors of stress  $\sigma_x$  by NBNM with stabilization

## 5.2. 一様な圧力を受ける厚肉円筒

次に正解値が既知な曲線境界を有する解析モデルとして, Fig.10に示すような一様な圧力を受ける厚肉円筒問題を解析する. 対称性より1/4部分について考え, モデルの材料定数はヤング率  $E = 205.8GPa$ , ポアソン比  $\nu = 0.3$  と仮定した. 実平面における解析モデルの節点の配置を Fig.11に, 比較のためのFEM解析の分割図を Fig.12に示す. 領域積分のため

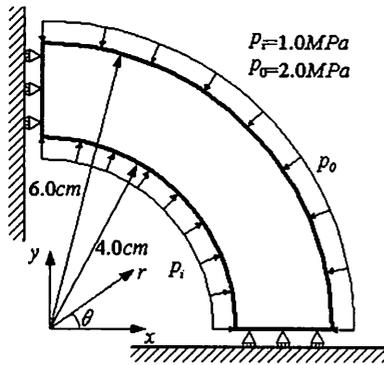


Fig. 10 Thick walled tube model

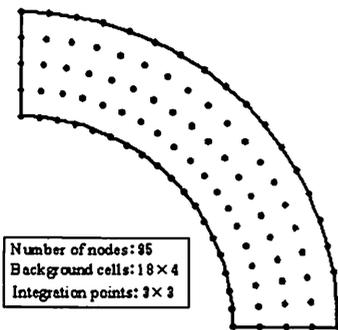


Fig. 11 Data points in meshless method (physical plane)

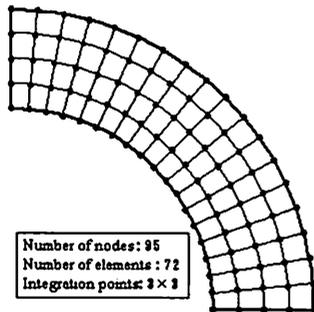


Fig. 12 Mesh division in FEM

のバックグラウンドセルの数はFEMの要素数と同じ72個、数値積分は各要素、各セルについて3×3点積分とした。ここでは、影響領域 $\rho^*$ の大きさを変化させて計算を行い、 $\rho^*$ の大きさがNBNMの解析結果へ与える影響について検討する。

Fig.13, Fig.14は、影響領域 $\rho^* = 2$ とした場合の各手法による応力結果の比較図であり、それぞれ $r = 4cm$ の位置における接線方向応力 $\sigma_\theta$ 、 $r = 6cm$ の位置の半径方向応力 $\sigma_r$ について厳密解<sup>(14)</sup>に対する相対誤差を示したものである。

安定化を考慮することによりNBNMの解の改善が図られ、特に $\theta = 25 \sim 75(deg)$ の範囲の領域内部ではいずれもFEMより精度良い結果が得られている。

Fig.15, 16, 17は安定化を考慮したNBNMの $r = 4, 5, 6cm$ の位置における $\sigma_r$ の解析結果であり、影響領域 $\rho^* = 1, 2, 3, 4$ の場合について、厳密解との相対誤差をFEMの結果

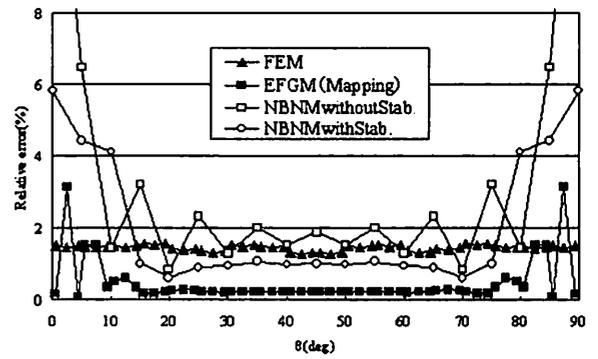


Fig. 13 Relative errors of tangential stress  $\sigma_\theta$  ( $r = 4cm$ )

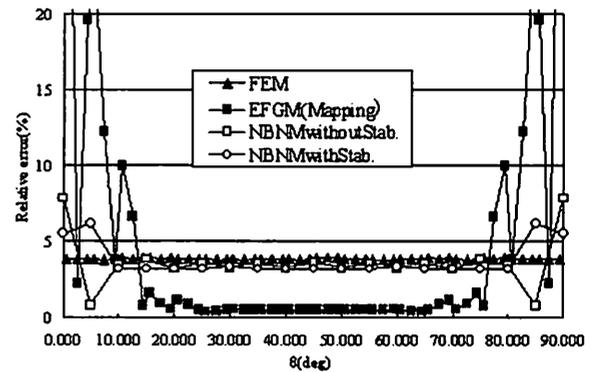


Fig. 14 Relative errors of radial stress  $\sigma_r$  ( $r = 6cm$ )

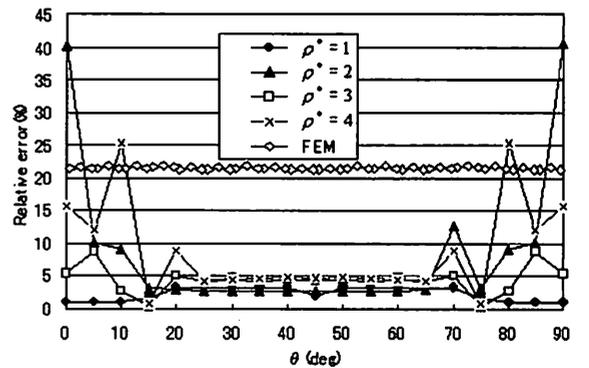


Fig. 15 Distribution of relative errors of radial stress  $\sigma_r$  ( $r = 4cm$ )

果とともに示したものである。

$r = 4, 6cm$ の内外縁、 $r = 5cm$ の中心線のいずれの場合も、 $\theta = 20 \sim 70(deg)$ の範囲の領域内部より $\theta = 0 \sim 20(deg)$ の境界近傍において精度が影響領域 $\rho^*$ の大きさによって大きく変化していることがわかる。領域内部では影響領域が大きくなるにつれて精度が向上する傾向が見られるが、端点近傍ではその関連性は見られない。本計算例の場合、 $\rho^* = 1$ とした場合が全体にわたって安定した結果が得られているが、

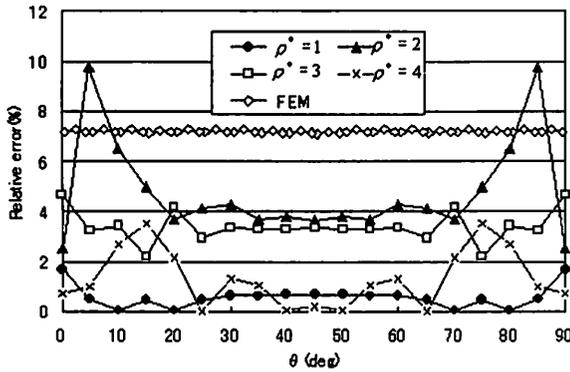


Fig. 16 Distribution of relative errors of radial stress  $\sigma_r$  ( $r = 5\text{cm}$ )

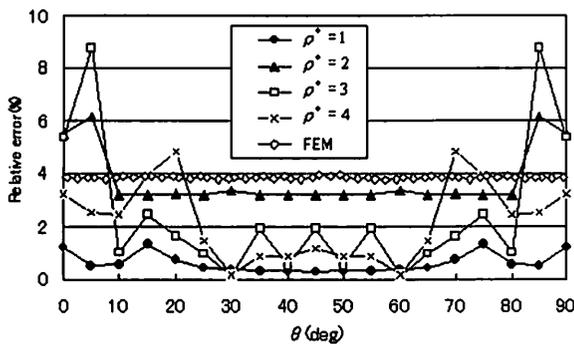


Fig. 17 Distribution of relative errors of radial stress  $\sigma_r$  ( $r = 6\text{cm}$ )

Table 1 Comparison of CPU time (sec)

$\rho^*$	1.0	2.0	3.0	4.0
NBNM	0.11	0.14	0.22	0.43
EFGM	1.96	16.00	40.10	74.30
EFGM(mapping)	1.96	2.35	2.98	3.90

影響領域の最適な設定方法についてはさらに詳細な検討が必要である。Table1 に解析時間の比較を示す。

## 6. おわりに

本研究では、写像変換を用いたエレメントフリー解析について検討した。提案する手法は、実平面における解析対象の離散化モデルとともに支配方程式を写像変換し、生成された直交格子の写像平面上でエレメントフリー解析を行うもので、基本境界条件を直接処理でき、矩形以外の曲線境界を有する形状の問題に対して適用可能である。さらに、領域積分に節点積分法を適用し、計算効率の向上を図っている。簡単な数値計算例を通して本手法が曲線境界を有する2次元弾性問題に適用可能であることが示された。

本手法は写像変換に基づく手法であるために、本文で述べた写像方法では写像不可能な複雑な任意形状の問題に対しては適用限界がある。しかしながら、写像平面上でエレメントフリー解析を行うという方法は、内外で数多く発表されている他の格子形成法<sup>(15)</sup>と組み合わせて解析することが可能であり、3次元問題への拡張も可能であると考えられる。

上記の点を含め、今後は複雑な形状の問題への適用、影響領域の定量的な評価、他の問題への適用性について検討する必要がある。

## 参考文献

- (1) 鈴木克幸他: 特集 メッシュレス法, 計算工学, Vol.7, No.1(2002), pp. 2-23.
- (2) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.37(1994), pp. 229-256.
- (3) 奥田洋司, 長嶋利夫, 矢川元基: エレメントフリーガラキン法に関する基礎的検討 (第1報, 常微分方程式への適用), 日本機械学会論文集 (A編), Vol.61, No.590(1995), pp. 2302-2308.
- (4) 長嶋利夫, 奥田洋司, 矢川元基: エレメントフリーガラキン法に関する基礎的検討 (第2報, 2次元ポテンシャル問題への適用), 日本機械学会論文集 (A編), Vol.62, 599号 (1996), pp. 218-225.
- (5) 奥田洋司, 坂本涼: FEM-EFGM ハイブリッド解析, 計算工学学会インターネット論文集, No.20000029 (2000).
- (6) 井浦雅司, 庭山孝史: Element Free Galerkin Method における基本境界条件の処理, 構造工学論文集, Vol.43A(1997), pp. 355-364.
- (7) Suetake, Y.: Element-free method based on Lagrange polynomial, *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol.128, No.2(2002, ) pp. 231-239.
- (8) Liu, G. R. and Gu, Y. T.: A point interpolation method for two-dimensional solids, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.50(2001), pp. 937-951.
- (9) Noguchi, H., Kawashima, T. and Miyamura, T.: Element free analysis of shell and spatial structures, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.47(2000), pp. 1215-1240.
- (10) 大上俊之, 豊島栄次, 小山茂: 写像平面上におけるエレメントフリー解析と弾性問題への適用, 構造工学論文集, Vol.49A(2003), pp. 161-168.
- (11) 長嶋利夫, 奥田洋司, 矢川元基: 節点単位の処理に基づくメッシュレス法の開発 (定式化および二次元弾性問題への適用), 日本機械学会論文集 (A編), Vol.62, 603号 (1996), pp. 2474-2480.
- (12) Nagashima, T.: Node-by-Node Meshless Approach and Its Applications to Elastostatic and Eigenvalue Analyses, *Proc. of ICES(1997)* pp. 906-911.
- (13) S.P. ティモシェンコ, J.N. グーディア (金多深監訳): 弾性論, (1975), コロナ社.
- (14) C.T. ワン (猪瀬寧雄訳): 応用弾性学, (1971), 森北出版.
- (15) Thompson, J. E., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W.: *Numerical Grid Generation*, (1985), North-Holland.