境界要素法における計算点解析法の複雑な支配方程式の問題への適用 第 2 報：板曲げ問題における考察

APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO PROBLEMS WITH COMPLICATED GOVERNING EQUATION Second Report: Discussion in Plate Bending Problem

神谷紀生 [1]，橋爪智弘 [2]，箕浦昌之 [3]

N. Kamiya, T. Hashizume and M. Minoura

[1]名古屋大学大学院情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)
[2]名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:hashi@info.human.nagoya-u.ac.jp)
[3]名古屋大学情報文化学部(〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:minoura@info.human.nagoya-u.ac.jp)

Abstract: Following the first report of on application of Computing Point Analysis (CPA) scheme in the Boundary Element Method, proposed earlier by one of the present authors, to some complicated problems with nonlinear and/or inhomogeneous differential equations, we here consider a typical engineering problem known as plate bending. The problem for inhomogeneous bending rigidity is described by a fourth order differential equation with a biharmonic differential operator as the principal one with remaining inhomogeneous terms. Three types of formulations with second order differential equations are considered in view of approximation orders in the inhomogeneous term, i.e., a formulation including the unknown function itself, the first order derivative and second order derivative, and their performance is compared. Linear variation of the bending rigidity is considered and numerical results for the supported square plate are obtained.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Plate Bending, Inhomogeneous Bending Rigidity

1．はじめに

著者らは以前，２次元重調和微分作用素を含む微分方程式の非同次問題を，２つの２次元調和微分作用素に関する連立微分方程式として解く方法を示した(1, 2)．この方法自体古くから利用されていたものであり，新しいものではない．しかしながら，これを境界だけの離散化により，積分方程式を用いて解くことが上記の研究の主題であった．２つに分けられた微分方程式はいずれも非同次項を持つもので，従来の境界要素法では領域内の離散化が避けられなかったが，この問題に計算点解析法(3, 4)と名づけられた方法を用いることによって，境界離散化だけに限定して解を得ることができた．

上記の微分方程式の典型は薄板の曲げ問題に見られる．そこで本研究では，板の曲げ剛性が場所によって異なる問題を例にとって，より複雑な問題についても，計算点解析法が有効な解析手段となりうることを実証する．なお，計算点解析法に関する内容はすでに多数の文献(3,4)で説明してあるので，ここでは省略して話を進めることにする．曲げ剛性が座標の線形関数的に変化する場合を例として具体的に検討する．定式化の方法により，非同次項に未知関数の２階導関数あるいは１階導関数を含む形式，および導関数を含まない形式が可能である．これらの場合に対応して計算点解析法の精度を比較することにする．

2．曲げ剛性が一様でない板の曲げ

厚さが一様でない薄板が横荷重 $w(x,y)$ を受けたとき，板のたわみ $u(x,y)$ は次の４階微分方程式によって表される(3):

$$D\Delta\Delta u+2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta u+2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta u+\Delta D\Delta u$$
$$-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=w \quad (1)$$

ここで，x,y は直交座標，Δ は2次元ラプラシアン，D,ν は曲げ