

ポアソン方程式ソース項同定逆問題の射影解法

PROJECTION METHOD FOR AN INVERSE SOURCE PROBLEM OF POISSON EQUATION

奈良 高明¹⁾, 安藤 繁²⁾

Takaaki NARA and Shigeru ANDO

1) 国立情報学研究所 (〒 101-8430 千代田区一ツ橋 2-1-2, E-mail: nara@nii.ac.jp)

2) 東京大学大学院 (〒 113-0033 文京区本郷 7-3-1, E-mail: ando@alab.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper proposes a method for reconstructing the positions, strength, and number of point sources in a three-dimensional (3-D) Poisson field from its boundary data. Through spherical harmonic expansion of the potential, algebraic relations between projected positions of the sources onto the xy -plane or the Riemann sphere are derived. For both cases, our algorithm estimates the number of sources N from the leading principal minors of a Hankel matrix composed of harmonic coefficients, and the N projected positions by solutions of the N -th degree equation. Projection onto the xy -plane is more appropriate for the case where the sources are scattered in a region, whereas projection onto the Riemann sphere is more appropriate for the case where the sources are concentrated around the surface of the region.

Key Words: Inverse Source Problem, Poisson Equation, Riemann Sphere

1. はじめに

本論文は、理工学上多くの応用をもつポアソン方程式のソース項同定逆問題⁽¹⁾において、ソースパラメータを境界データにより陽に表現し再構成する手法を提案する。本逆問題は一般には一意性が成り立たないが、ソースを有限個の点ソースに限定すれば、境界上のコーシーデータから、ソース個数、強さ、位置が一意に定まる⁽⁷⁾。順問題の解と境界データの誤差を最小化するよう反復演算によりソースパラメータを同定する手法^(2, 3)が従来より示されてきた一方、ソース項の陽な表現を求めため、またこれにより演算を高速化し、反復演算の初期値選定に用いるため、境界データによりソースパラメータを直接推定する手法が提案されている。有限個のソースパラメータを求めために必要な数だけの代数方程式を立式し、これらをソースパラメータについて解くのが直接推定法の方針である。調和関数を必要数だけ低次のものから選び、グリーンの定理によりソースパラメータと境界データの代数方程式を導く手法^(4, 5, 6, 7)、ポテンシャルのフーリエ成分を低周波側から必要数用いる方法⁽⁸⁾が提案されている。Oheら⁽⁸⁾は、2次元でソース強さは既知としたとき、 N 個のソース位置が根となる N 次方程式を導出し、ソース個数 N の推定⁽⁹⁾、部分境界上でのデータからの推定⁽¹⁰⁾を行っている。Badiaら⁽⁷⁾は、 xy -平面に射影した3次元のソース位置を境界積分から成る行列の固有値として求める方法を提案している。

我々は、ポテンシャルを多重極展開したとき、ソースの全情報が展開係数に表現され、展開係数(多重極係数)を介して、ソースパラメータに関する代数方程式が無数に得られることに着目する。このとき、どの多重極係数を用いて、必要数の代数方程式を立式するかが重要となる。何故なら、ソース情報が高いSN比で表現される多重極係数は、ソース分布、および境界データの計測法に依存して変化するためである。ところが従来法では、調和関数の選定に関してはあまり論じられておらず低次側から必要数だけ用いられているのみであった。我々は以上の問題意識に基づき、二つの方法を提案する: 低次側から多重極係数を必要数用いる方法、および多重極係数の無限級数から必要数の代数方程式を立式する方法である。第一の低次成分を用いる方法は、第二の無限の高次成分までを変換し用いる方法との対比において、その性質が明らかになる。すなわち、ソースの3次元位置を xy -平面に射影する第一の手法は、ソースが領域内に比較的に一様に分布している場合に精度良く推定できるのに対し、ソースをリーマン球面に射影する第二の手法は、領域の表面付近に集中するソースの推定に適することが明らかになる。いずれの手法でも手続きとしては1)ハンケル行列の首座小行列式によるソース個数 N の推定、2) N 個の射影位置に関する N 次方程式の解法、3)ソース強さ、位置の第三成分の推定、という統一されたアルゴリズムによりソースが推定されることを示す。

2. 多重極展開による代数方程式の導出

原点を含む有界な3次元単連結領域 G において、ポテンシャル V に対するポアソン方程式

$$\Delta V = -f \quad (1)$$

を考える。本稿ではソース項 f を G 内に存在する点ソース

$$f = \sum_{k=1}^N q_k \delta(r - r_k, \theta - \theta_k, \phi - \phi_k). \quad (2)$$

とする。このとき、境界 G 上のコーシーデータ $V|_{\partial G}, \frac{\partial V}{\partial \nu}|_{\partial G}$ から、点ソース個数 N , 3次元ソース位置 (r_k, θ_k, ϕ_k) , ソース強さ q_k ($k = 1, 2, \dots, N$) を同定する逆問題を考える。

ソース項 f が無限領域に存在するときのポテンシャル V' について、 G を含む球の外側で多重極展開

$$V'(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \cdot P_n^m(\cos \theta) (a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi) \quad (3)$$

を考えれば、展開係数は、ソース項 f の体積積分、および任意形状の ∂G 上でのコーシーデータにより

$$\begin{aligned} a_{nm} + ib_{nm} &= \int_{\partial G} \left(V \frac{\partial}{\partial \nu} (r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}) - \frac{\partial V}{\partial \nu} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right) dS \\ &= \int_G f r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} dv \end{aligned} \quad (4)$$

と書かれることが知られている⁽¹¹⁾。従って点ソースの場合、ソースパラメタ $q_k, r_k, \theta_k, \phi_k$ を未知数とする

$$\begin{aligned} a_{nm} + ib_{nm} &= \int_{\partial G} \left(V \frac{\partial}{\partial \nu} (r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}) - \frac{\partial V}{\partial \nu} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right) dS \\ &= \sum_{k=1}^N q_k r_k^n P_n^m(\cos \theta_k) e^{im\phi_k}. \end{aligned} \quad (5)$$

なる代数方程式が得られる。 $n \geq m \geq 0$ なる全ての展開係数(以下多重極係数と呼ぶ)にソース情報は過不足なく表現されるが、このうち未知自由度分の方程式を選定してソースパラメタを決定するのが直接解法である。ここでどの多重極成分が高いSN比で計測可能かはソースの空間分布、およびデータの測定法に依存するため、必要数の多重極係数の選定が重要となる。我々は以下で、

方法 (I) $a_{mm} + ib_{mm}, a_{m+1,m} + ib_{m+1,m}$

方法 (II) $\sum_{n=m}^{\infty} (a_{nm} + ib_{nm}), \sum_{n=m}^{\infty} (n+m+1)(a_{nm} + ib_{nm})$

を用いる二つの方法を提案する。方法 (I) はソースを xy -平面に射影する解法であり、ソースが G 内に比較的一様に分布している場合に適した方法であるのに対し、方法 (II) はソースをリーマン球面に射影することに相当し、ソースが境界付近に集中している場合に適した方法であることを示す。

3. 方法 (I) xy -平面への射影による解法

G 上の点、およびソース位置の xy -平面への射影を

$$\zeta \equiv x + iy, \quad \zeta_k \equiv x_k + iy_k \quad (6)$$

と置けば、

$$r^m P_m^m(\cos \theta) e^{im\phi} = (2m-1)!! \zeta^m \quad (7)$$

$$r^{m+1} P_{m+1}^m(\cos \theta) e^{im\phi} = (2m+1)!! \zeta^m z \quad (8)$$

であるから⁽¹⁴⁾、式 (7), (8) を式 (4), (5) に代入して

$$\alpha_m \equiv \int_{\partial G} \left(V \frac{\partial \zeta^m}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} \zeta^m \right) dS = \sum_{k=1}^N q_k \zeta_k^m \quad (9)$$

$$\beta_m \equiv \int_{\partial G} \left(V \frac{\partial \zeta^m z}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} \zeta^m z \right) dS = \sum_{k=1}^N q_k \zeta_k^m z_k \quad (10)$$

が得られる。式 (9) は Badia ら⁽⁷⁾ が用いた代数方程式と等価である。彼らが行列の固有値として xy -平面への射影点 ζ_k を同定したのに対し、我々は以下でより直接的な代数方程式による表現を導く。式 (10) による z 座標の明示、およびハンケル行列の首座小行列式によるソース個数 N の同定も示す。

3.1. ソース位置、強さの同定

N の推定は次節で述べ、本節では N は既知定数とする。はじめに、 $m \geq N$ に対して、 $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_{m-N}$ 間に次の線形関係が成り立つことに着目する：

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \sum_{k=1}^N q_k \zeta_k^m \\ &= (\zeta_1 + \dots + \zeta_N) \sum_{k=1}^N q_k \zeta_k^{m-1} - (\zeta_1 \zeta_2 + \dots + \zeta_{N-1} \zeta_N) \sum_{k=1}^N q_k \zeta_k^{m-2} \\ &\quad + \dots + (-1)^{N-1} \zeta_1 \dots \zeta_N \sum_{k=1}^N q_k \zeta_k^{m-N} \\ &= K_1 \alpha_{m-1} + K_2 \alpha_{m-2} + \dots + K_N \alpha_{m-N}, \end{aligned} \quad (11)$$

ここで K_j は、 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ に関する第 j 次基本対称式

$$K_j = (-1)^{j-1} \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_j} \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \dots \zeta_{k_j} \quad (12)$$

である。式 (11) を $N \leq m \leq 2N-1$ に関して連立させれば

$$\begin{pmatrix} \alpha_N \\ \vdots \\ \alpha_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{N-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{N-1} & \alpha_{N-2} & \dots & \alpha_{2N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_N \\ \vdots \\ K_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

を得る。ここで、 $\alpha_0 \sim \alpha_{2m-2}$ から成る $m \times m$ のハンケル行列を

$$H_m \equiv \begin{pmatrix} \alpha_0 & \dots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1} & \dots & \alpha_{2m-3} & \alpha_{2m-2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

と置くと、 $m \geq 1$ に対し次の補題、系が成り立つ。

$$\text{補題 1 } \det H_m = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_m \leq N} \prod_{k=1}^m q_{l_k} \prod_{l_i > l_j} (\zeta_{l_i} - \zeta_{l_j})^2$$

$$\text{系 2 } \det H_m = \begin{cases} \prod_{k=1}^N q_k \prod_{i>j} (\zeta_i - \zeta_j)^2 & (m = N) \\ 0 & (m \geq N+1) \end{cases}$$

(証明は (12) 参照). 系 2 より, $\zeta_k (k = 1, 2, \dots, N)$ が xy -平面上で相異なる位置であると仮定すれば, $\det H_N \neq 0$ となる. 従って式 (13) は K_1, K_2, \dots, K_N に関して

$$\begin{pmatrix} K_N \\ \vdots \\ K_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \dots & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{N-1} & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{N-1} & \dots & \alpha_{2N-3} & \alpha_{2N-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_N \\ \vdots \\ \alpha_{2N-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

と解ける. K_1, \dots, K_N は式 (12) で定義される基本対称式であるから, $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ は N 次方程式

$$\zeta^N - K_1 \zeta^{N-1} - K_2 \zeta^{N-2} - \dots - K_N = 0 \quad (16)$$

の根となる.

ソース強さ, および z 座標を求めるには, 式 (9), (10) の $0 \leq m \leq 2N-1$ に関する連立方程式

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{2N-1} & \zeta_2^{2N-1} & \dots & \zeta_N^{2N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{2N-1} & \zeta_2^{2N-1} & \dots & \zeta_N^{2N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 z_1 \\ q_2 z_2 \\ \vdots \\ q_N z_N \end{pmatrix} \quad (18)$$

を用いる. 式 (17), (18) における $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ に関する行列はヴァンデルモンドの行列ゆえ逆が存在し,

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{N-1} & \dots & \zeta_N^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{q_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{N-1} & \dots & \zeta_N^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} \quad (20)$$

が得られる. 以上より, 次のアルゴリズムが得られた.

定理 1 xy -平面上に射影したソース位置は, 式 (15) で決まる係数をもつ N 次方程式 (16) の根として与えられる. ソース強さ, z 座標は式 (19), (20) により与えられる. —

特に $N \leq 4$ のときは, ソース位置の α_m による陽な表現が得られることになる.

3.2. ソース個数 N の推定

式 (11) より, 式 (14) で定義されるハンケル行列の第 $N+1$ 列目は, 第 1 行から第 N 行までの線形和で書かれることがわかる. 従って, ハンケル行列の首座小行列式は $m \geq N+1$ のとき零になる. この性質を用い, 次の手続きによりソース個数 N を判定する.

1. ハンケル行列 (14) の首座小行列式を $m = 1, 2, \dots$ に関し計算する.

$$2. \quad \det H_k \neq 0, \det H_{k+1} = 0 \quad (21)$$

を満たす k をソース個数の候補とする.

3. 十分大きな M まで

$$\det H_{k+1} = \det H_{k+2} = \dots = \det H_M = 0. \quad (22)$$

を確認する. —

Badia ら (7) のように, ソース個数の上限がわかっていると仮定する場合は, この上限 M まで式 (22) を確かめる. しかしながら, データにノイズがのる実際の状況では, 式 (22) の M はデータの SN 比により決まる. すなわち, α_0 から α_{2M-1} までを推定に用いる定理 1 のアルゴリズムでは,

$$|\delta \alpha_{2M} / \alpha_{2M}| \simeq 1 \quad (23)$$

となる M が推定できるソース個数の上限となる. そこで実際は式 (23) で決まる M まで式 (22) を確かめる. M はデータ精度が増すほど増えることになる.

式 (21) において重要となるのは $|\det H_{k+1}| / |\det H_k|$ の値である. この比は, 理論データの場合は系 2 より零となるが, ノイズを含む場合は零にはならない. しかしながら $\mathbf{v}^T = (\alpha_N \alpha_{N+1} \dots \alpha_{2N-1})$, $\mathbf{K}^T = (K_N K_{N-1} \dots K_{2N-1})$ として

$$\frac{|\det H_{N+1}|}{|\det H_N|} = \left| \alpha_{2N} - \mathbf{v}^T H_N^{-1} \mathbf{v} \right| = \left| \alpha_{2N} - \mathbf{v}^T \mathbf{K} \right|, \quad (24)$$

と評価でき, ハンケル行列 H_N の条件数に関して

$$\text{cond}(H_N) < \frac{\max_k \{|q_k|\}}{\min_k \{|q_k|\}} \frac{N^2}{\delta^{2(N-1)}} \cdot \left(\frac{1 - \zeta^N}{1 - \zeta} \left((1 + \zeta)^N - \zeta^N \right) \right)^2 \quad (25)$$

なる評価ができる. 但し, $\zeta \equiv \max_k |\zeta_k|$, $\delta \equiv \min |\zeta_i - \zeta_j|$ である. 従って, ソースの強さの分布, および近さの分布に応じた $\alpha_k (k = 0, 1, \dots, 2N)$ の精度が得られていれば, $|\det H_{k+1}| / |\det H_k|$ は十分零に近く, 個数判定が可能となる. 数値例は (13) 参照.

4. 方法 (II) リーマン球面への射影による解法

4.1. ルジャンドル陪関数の母関数の利用

本節では, 多重極係数の無限級数 $\sum_{n=m}^{\infty} (a_{nm} + ib_{nm})$, および $\sum_{n=m}^{\infty} (n+m+1)(a_{nm} + ib_{nm})$ を用いることを考える. このとき式 (5) から

$$\int_{\partial G} \left(V \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sum_{n=m}^{\infty} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right) - \frac{\partial V}{\partial \nu} \sum_{n=m}^{\infty} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right) dS$$

$$= \sum_{k=1}^N q_k \sum_{n=m}^{\infty} r_k^n P_n^m(\cos \theta_k) e^{im\phi_k} \quad (26)$$

および

$$\int_{\partial G} \left(V \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sum_{n=m}^{\infty} (n+m+1) r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right) - \frac{\partial V}{\partial \nu} \sum_{n=m}^{\infty} (n+m+1) r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right) dS$$

$$= \sum_{k=1}^N q_k \sum_{n=m}^{\infty} (n+m+1) r_k^n P_n^m(\cos \theta_k) e^{im\phi_k}, \quad (27)$$

なる代数方程式が得られる。ここで式(26), (27)における境界積分の V および $\partial V/\partial \nu$ に対する重み調和関数は

$$\sum_{n=m}^{\infty} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} = \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{\zeta^m}{d^{2m+1}} \quad (r < 1) \quad (28)$$

および

$$\sum_{n=m}^{\infty} (n+m+1) r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=m}^{\infty} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} = \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{\zeta^m (1-z)}{d^{2m+3}} \quad (29)$$

但し, $d \equiv \sqrt{1-2r \cos \theta + r^2}$, と書ける。式(28), (29)の導出には, ルジャンドル陪関数の母関数

$$\frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{\sin^m \theta}{(1-2r \cos \theta + r^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_{m+l}^m(\cos \theta) \quad (r < 1) \quad (30)$$

および関係式⁽¹⁴⁾p.138

$$\frac{\partial}{\partial z} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} = (n+m) r^{n-1} P_{n-1}^m e^{im\phi} \quad (31)$$

を用いた。母関数の収束条件 $r < 1$ を満たすよう, 以下では, G は, $N(0,0,1)$ を北極, 原点 $S = O(0,0,0)$ を南極とする球 Σ 内に含まれるものとする。

式(28), (29)を式(26), (27)に代入すれば,

$$\gamma_m \equiv \int_{\partial G} \left(V \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\zeta^m}{d^{2m+1}} \right) - \frac{\partial V}{\partial \nu} \frac{\zeta^m}{d^{2m+1}} \right) dS = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{d_k} \left(\frac{\zeta_k}{d_k^2} \right)^m$$

$$\delta_m \equiv \int_{\partial G} \left(V \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\zeta^m (1-z)}{d^{2m+3}} \right) - \frac{\partial V}{\partial \nu} \frac{\zeta^m (1-z)}{d^{2m+3}} \right) dS$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{d_k} \cdot \frac{1-z_k}{d_k^2} \cdot \left(\frac{\zeta_k}{d_k^2} \right)^m \quad (32)$$

を得る。但し, $d_k \equiv \sqrt{1-2r_k \cos \theta_k + r_k^2}$ は, 北極 $N(0,0,1)$ と第 k ソースの距離である。ここで

$$\chi_k \equiv \frac{\zeta_k}{d_k^2} = \frac{x_k + iy_k}{x_k^2 + y_k^2 + (1-z_k)^2} \quad (33)$$

$$\psi_k \equiv \frac{1-z_k}{d_k^2} = \frac{1-z_k}{x_k^2 + y_k^2 + (1-z_k)^2} \quad (34)$$

と変数変換すれば,

$$\gamma_m = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{d_k} \chi_k^m, \quad \delta_m = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{d_k} \chi_k^m \psi_k \quad (35)$$

を得る。式(35)は式(9), (10)と同一形式であることに着目すれば, χ_k, ψ_k ($k=1, 2, \dots, N$) は第3節で導いたアルゴリズムによって求めることができる。すなわち, χ_k は N 次方程式

$$\chi^N - L_1 \chi^{N-1} - L_2 \chi^{N-2} - \dots - L_N = 0, \quad (36)$$

但し,

$$\begin{pmatrix} L_N \\ \vdots \\ L_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{N-2} & \gamma_{N-1} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{N-1} & \gamma_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{N-1} & \cdots & \gamma_{2N-3} & \gamma_{2N-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_N \\ \vdots \\ \gamma_{2N-1} \end{pmatrix} \quad (37)$$

の根であり, ψ_k は

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{q_1} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \frac{d_N}{q_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_1^{N-1} & \cdots & \chi_N^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \end{pmatrix} \quad (38)$$

但し

$$\begin{pmatrix} \frac{q_1}{d_1} \\ \vdots \\ \frac{q_N}{d_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_1^{N-1} & \cdots & \chi_N^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{pmatrix} \quad (39)$$

によって得られる。3次元ソース位置が χ_k, ψ_k によって決定されれば, 北極と第 k ソースとの距離 d_k が決まり, 従って式(39)よりソース強さが決まる。

4.2. χ_k, ψ_k の幾何的意味: リーマン球面への射影

3次元空間内の曲線

$$X \equiv \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x+iy}{x^2+y^2+(1-z)^2} = \text{constant} \right\} \quad (40)$$

$$\Psi \equiv \left\{ (x, y, z) \mid \frac{1-z}{x^2+y^2+(1-z)^2} = \text{constant} \right\} \quad (41)$$

を考える。 X と Ψ は, 北極 $N(0,0,1)$ に置かれた双極子 $m = (0,0,1)$ による, $\phi = \arg(x+iy)$ なる2次元平面内の等ポテンシャル線, および流線であり, 同平面内で X と Ψ は直交曲線座標となっている。以降, 式(40), (41)における定数を X -座標値, Ψ -座標値と呼ぶ。また第 k ソース位置 (x_k, y_k, z_k) を通る曲線 X, Ψ をそれぞれ Fig. 1 のように X_k, Ψ_k と表す。

ここで, 中心 $(0,0,1/2)$, 半径 $1/2$ の球 Σ をリーマン球面と見なすと, 次の補題が示せる。

補題 3 χ_k は, Σ と X_k との交点と同一視される。—

証明) Σ と X_k との交点を (s_k, t_k, u_k) とする。また " \leftrightarrow " によ

り、 Σ 上の点と拡張複素平面 $\Pi = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の点との立体射影による同一性を示すことにする。このとき

$$\begin{aligned} & (s_k, t_k, u_k) \\ \leftrightarrow & \frac{s_k + it_k}{1 - u_k} \\ = & \frac{s_k + it_k}{s_k + t_k + (1 - u_k)^2} \quad (s_k^2 + t_k^2 + (1 - u_k)^2 = 1 - u_k \text{ on } \Sigma) \\ = & \frac{x_k + iy_k}{x_k + y_k + (1 - x_k)^2} \quad ((s_k, t_k, u_k), (x_k, y_k, z_k) \in X_k) \\ = & \chi_k \quad (\text{式 (34) における } \chi_k \text{ の定義より}) \end{aligned}$$

である。すなわち、拡張複素平面上の点 χ_k は、リーマン球面 Σ と X_k との交点と同一視される。 Q.E.D

以上より方法 (II) のアルゴリズムは次の定理にまとめられる。

定理 2 曲線 X_k に沿ってリーマン球面 Σ 上に射影したソース位置は、式 (37) で決まる係数をもつ N 次方程式 (36) の根として与えられる。ソースの Ψ 座標値、およびソース強さは式 (38), (39) により与えられる。—

こうして、方法 (II) では、3次元ソース位置が (χ_k, ψ_k) により指定される。尚、 (χ_k, ψ_k) と $(x_k + iy_k, z_k)$ の座標変換は、式 (34) より、

$$x_k + iy_k = \frac{\chi_k}{|\chi_k|^2 + \psi_k^2}, \quad 1 - z_k = \frac{\psi_k}{|\chi_k|^2 + \psi_k^2} \quad (42)$$

により与えられる。

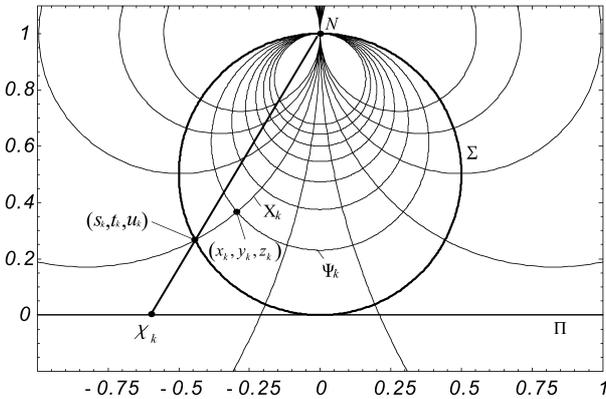


Fig. 1 In the method (II), the three-dimensional position of the k -th source is determined by the intersection point of the equipotential curve X_k and the stream line Ψ_k of the dipole $m = (0, 0, 1)$ at the north pole $N(0, 0, 1)$. χ_k in the extended complex plane Π , which is obtained by Eq.(36), is identified with the projected point of the k -th source onto the Riemann sphere Σ along the equipotential curve X_k .

4.3. 数値シミュレーション： xy -平面射影法とリーマン球面射影法との比較

本節では

1. ソースが G 内に比較的一様に分布する場合 (Fig.2)

2. ソースが北極付近に集中している場合 (Fig.3)

の数値例を示す。ソースパラメタはそれぞれの図のキャプションの通り設定した。データには、理論境界値の最大値の1%標準偏差をもつガウシアンノイズを加えた。

Table 1 に、方法 (I)(II) で使う多重極係数 α_m, γ_m の相対誤差 $|\delta\alpha_{2N-1}|/|\alpha_{2N-1}|, |\delta\gamma_{2N-1}|/|\gamma_{2N-1}|$ を示した。Table 1 および Fig.2, 3 から、次のことが観察される：

- ソースが領域 G 内で比較的一様に分布している場合 ($d_k \sim 1$)、 $|\delta\alpha_{2N-1}|/|\alpha_{2N-1}| < |\delta\gamma_{2N-1}|/|\gamma_{2N-1}|$ である。この結果この場合、 xy -平面射影法がリーマン球面射影法より正確にソースを同定する (Fig.2)。
- ソースが北極付近に集中している場合 ($d_k \ll 1$)、 $|\delta\alpha_{2N-1}|/|\alpha_{2N-1}| > |\delta\gamma_{2N-1}|/|\gamma_{2N-1}|$ である。この結果この場合、リーマン球面射影法が xy -平面射影法より正確にソースを同定する (Fig.3)。

Table 1 The relative error $|\delta\gamma_{2N-1}|/|\gamma_{2N-1}|$ used in the projection onto the Riemann sphere ("Riemann") and $|\delta\alpha_{2N-1}|/|\alpha_{2N-1}|$ used in the projection onto the xy -plane (" xy ")

	"Riemann"	" xy "
Fig. 2	$ \delta\gamma_5 / \gamma_5 \sim 19.8$	$ \delta\alpha_5 / \alpha_5 \sim 0.99$
Fig. 3	$ \delta\gamma_5 / \gamma_5 \sim 1.3$	$ \delta\alpha_5 / \alpha_5 \sim 4.2$

4.4. 局所的高階微分計測からの推定

さて最後に、次の関係式が成り立つことに注目する：

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2m-1)!!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m V(0, 0, 1) &= \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{d_k} \chi_k^m \\ \frac{1}{(2m-1)!!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m-1} \frac{\partial}{\partial z} V(0, 0, 1) &= \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{d_k} \chi_k^m \psi_k \end{aligned} \quad (43)$$

式 (43) は式 (35) と同一形式である。従って式 (43) 左辺の高階微分を γ_m, δ_m とおけば、 χ_k, ψ_k は北極 (境界の一点) におけるポテンシャルの高階微分 γ_m, δ_m から求まることがわかる。

脳磁逆問題における 8 の字コイルの利用⁽¹⁾ や、変調・検波による微分信号の検出など、場の微分を高精度で計測する手法が開発されている。これらとリーマン球面射影法を結びつけることで、ソースが境界付近に集中している場合に、局所的な境界データからソースを推定する手法の確立が期待される。

5. 結論

本稿では、3次元ポアソン方程式の点ソース同定逆問題において、ソース個数、位置、強さを境界データにより陽に表現するアルゴリズムを示した。ポテンシャルの多重極展開において、扇球成分、および $n = m + 1$ の縞球成分を用いると

xy -平面に射影したソース位置に関する代数方程式が得られ、一方多重極係数の無限級数を用いるとリーマン球面に射影したソース位置に関する代数方程式が得られる。両射影において同一の手法、すなわち 1) ソース個数 N を多重極係数から成るハンケル行列の首座小行列式より推定し、2) 両射影の射影位置を、 N 次方程式の根により求め、3) ソース強さを射影位置と多重極係数より求め、4) ソース位置の第 3 成分を射影位置、ソース強さ、および多重極係数から求める、という手法を適用する。 xy -平面への射影は、ソースが領域内で比較的一様に分布している場合精度良く推定するのにに対し、リーマン球面射影法は、ソースが表面付近に集中している場合に精度良く推定できることを数値例により示した。

参考文献

- (1) M.Hämäläinen *et al.*: Magnetoencephalography - theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain, *Reviews of Modern Physics*, **65**, No.2, (1993), pp. 413-497.
- (2) K.Ohnaka *et al.*: Boundary Element Approach for Identification of Point Forces of Distributed Parameter Systems, *Int. J. Control*, **49**, No.1, (1989), pp. 119-127.
- (3) B.He *et al.*: Electric Dipole Tracing in the Brain by means of the Boundary Element Method and Its Accuracy, *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.*, **34**, No.6, (1987), pp. 406-414.
- (4) 久保 司郎, 大中 幸三郎他: 境界積分に基づく物体内の発熱源および荷重の同定, *日本機械学会論文集 (A 編)*, **54**, No.503, (1988), pp. 1329-1334.
- (5) 山谷 克, 大中 幸三郎: 調和関数を利用したポアソン方程式における点ソースの位置同定, *日本応用数学会論文誌*, **5**, No.1, (1995), pp. 87-99.
- (6) 大道 学, 野田 直剛: 複数個の分布熱源を有する二次元定常熱伝導逆問題の解析, *情報処理学会論文誌*, **36**, No.11, (1995), pp. 2566-2572.
- (7) A.El.Badia and T.Ha-Duong: An Inverse Source Problem in Potential Analysis, *Inverse Problems*, **16**, No.3 (2000), pp. 651-663.
- (8) T.Ohe and K.Ohnaka: A Precise Estimation Method for Locations in an Inverse Logarithmic Potential Problem for Point Mass Models, *Appl. Math. Modeling*, **18**, (1994), pp. 446-452.
- (9) T.Ohe and K.Ohnaka: An Estimation Method for the Number of Point Masses in an Inverse Logarithmic Potential Problem Using Discrete Fourier Transform, *Appl. Math. Modeling*, **19**, (1995), pp. 429-436.
- (10) 大江 貴司, 大中 幸三郎: 円領域の部分境界観測に基づく点ソースモデルに対する対数ポテンシャル逆問題の数値解法, *日本応用数学会論文誌*, **7**, No.3, (1997), pp. 295-306.

- (11) D.B.Geselowitz: Multipole Representation for an Equivalent Cardiac Generator, *Proc. IRE*, Vol.48(1960), 75-79.
- (12) 奈良 高明, 安藤 繁: ローラン係数を介した 2 次元ポアソン方程式のソース項同定逆問題解法, *日本応用数学会論文誌*, **12** No.2 (2002), to be appeared soon.
- (13) 奈良 高明, 安藤 繁: 多重極展開に基づく 3 次元ポアソン方程式ソース推定逆問題の代数解法, *日本機械学会論文集 (A 編)*, **68**, No.667 (2002-3), pp. 407-414.
- (14) E.W.Hobson: The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, (1931) Cambridge University Press.

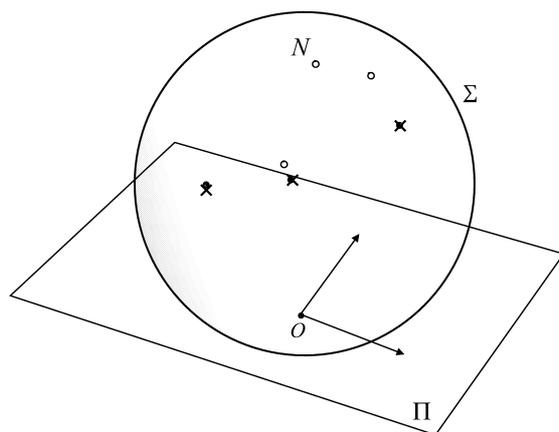


Fig. 2 When the true sources (•) are relatively scattered, the xy -plane projection method estimates the sources more accurately (×) than the Riemann sphere projection method (○). Σ : Riemann sphere. Π : Extended complex plane. $N = 3$ at $S_1(0.25, 0.15, 0.75)$, $S_2(-0.2, 0.3, 0.3)$, $S_3(-0.25, -0.15, 0.55)$. $q_1 = 0.5$, $q_2 = -0.3$, $q_3 = -0.2$.

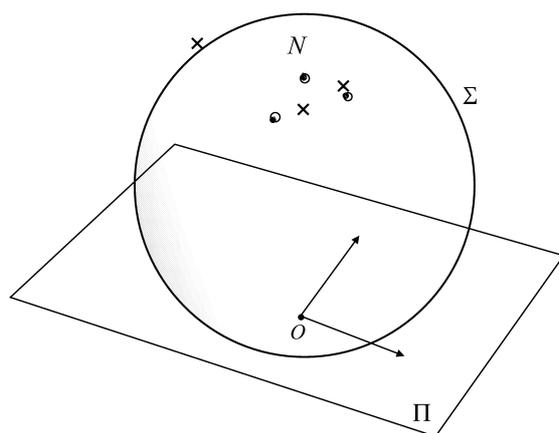


Fig. 3 When the true sources (•) are relatively concentrated around the north pole $N(0, 0, 1)$, the Riemann sphere projection method estimates the sources more accurately (○) than the xy -plane projection method (×). $N = 3$ at $S_1(0.1, 0.1, 0.9)$, $S_2(-0.05, 0.1, 0.925)$, $S_3(-0.05, -0.1, 0.875)$. The source strength is the same as in Fig.2.