計算数理工学論文集 Vol. 2(2002 年 7 月) 論文 **No. 02-070303** JASCOME

境界要素法における計算点解析法の多領域問題への適用:第４報

APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO MULTIPLE DOMAIN PROBLEMS: Fourth Report

神谷紀生 [1)]，鈴木崇之 [2)]，安藤孝彦 [3)]

Norio KAMIYA, Takayuki SUZUKI and Yukihiko ANDOH

1)名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)
2)名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:taksu@yd5.so-net.ne.jp)
3)名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:andoh@info.human.nagoya-u.ac.jp)

As the fourth report of a series of studies on the application of the computing point analysis method (CPM) to multiple region problems, we here consider an unknown internal boundary problem in a combination of a few subdomains each governed by linear and nonlinear equations. The internal boundary is supposed to be given by a certain specified condition. Search of the unknown internal boundary is performed in an iterative manner from an initially assumed one. Two distinct schemes are tried and compared. Some numerical examples are shown to illustrate the schemes and their availability.
Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Inhomogeneous/Nonlinear Problem, Multiple Domain

1 はじめに

材料力学あるいは構造力学における弾塑性問題は, 弾性領域すなわち線形支配方程式領域と, 塑性領域すなわち非線形支配方程式領域の混在する問題の典型例である. しかもこれらの境界はあらかじめわかっていない. この問題を境界要素法によって解くとき，２つの困難が生じる．すなわち，通常の境界要素法によれば非線形解析は，境界の離散化だけでは行えず, 何らかの領域の分割が必要になることと，両者の境界が未知であることである．したがって，この２点を解決することが必要になる．

境界だけの要素分割により非線形問題を解析する方法である「計算点解析法」[1-3]は，非線形項を含め非同次項を座標に関する多項式で近似的に表示することから出発する．これと基本解の積の領域積分は相反定理を用いて境界積分に変換される．多項式の未知係数は，計算点と呼ばれる内部点と境界選点の一部である境界計算点において非同次項が満たす条件によって, 最小 2 乗法を用いて決定される. 解の決定にはあらかじめ仮定した未知関数の値から反復計算を行う必要がある.すでにいくつかの基本的問題でその有効性が示された.

この方法を, 線形領域と非線形領域が結合された多重領域に適用する方法を前報 [3,4]で示した．内部境界では外部境界と違って具体的に境界条件が指定されないので, 適当に仮定した値から始め, 収束値を得るまで計算を繰り返さなければならない. これらは適切に作動することが例題の計算によって実証された．もちろん非線形領域では，計算点法による反復計算が別個に行われている．

本研究では，これらの研究に引き続いて，ある条件のもとで支配方程式が異なる２つの領域, 一方は線形であり他方は非線形, が決まる未知内部境界の問題の扱い方を調べる．なお，以下では２次元調和作用素に関する問題について考えるものとする．これはとりもなおさず，冒頭に述べた弾塑性問題等への, 境界要素法の有効適用のための基本的検討として位置づけられるものである.

2 未知内部境界の多領域問題における計算点解析法

多領域問題の境界要素法による解析は, 内部境界における条件が未知関数の値で直接に与えられないので, 未知関数とその境界導関数を全体の離散化代数方程式から消去する方法がもっともプリミティブである．しかしながら，領域が多数ある場合や, 内部境界が複雑に配置された場合には上記のような消去をするよりも, 個々の部分領域における解析を独立に行って，内部境界での条件すなわち，適合条件と連続条件を満足させるほうが一般性を持つといえる．内部境界があらかじめ定められている場合と，これが未知の場合について，扱い方を以下に検討する．

2 領域からなる場合にはこの解析法は次のようになる (Fig. 1)．部分領域 Ω^1 および Ω^2 における支配方程式は２階の偏微分方程式であり，それぞれ

$$F_1(u) = 0 \qquad F_2(v) = 0 \tag{1}$$

とする. なおこれらの支配方程式は線形あるいは非線形であってもかまわない. 非線形であればその部分領域での解析には，計算点解析法が用いられる． u,v はそれぞれの領域での未知関数である. 内部境界での条件は次のように与えられる．

$$u = v,\ q = -p \tag{2}$$

ここで,

$$q = \partial u / \partial n,\ p = \partial v / \partial n \tag{3}$$

は各部分領域における未知関数 u,v の外向き法線 n 方向

の導関数である．

（１）内部境界があらかじめ与えられている場合：

はじめに部分領域Ω^1側の内部境界でuを仮定する．この領域についての解析を行えばqが求められる．適合条件によって部分領域Ω^2側の内部境界でpがわかるから，これを用いてその領域での解析を行う.その結果，内部領域でのvが求められる．このvとあらかじめ仮定したuは内部境界で等しくならなければならない．しかしながら，これは満足されないので，新たに求められたvによって，uの更新を行う．そこでvを直接用いずに，（u - v)にある係数α (加速係数あるいは減速係数)を掛けた量を先のuに加える方法が一般的であるので, 以下ではこれを用いることにする. 反復計算過程s番目と$s+1$番目の関数の関係はつぎのようになる：

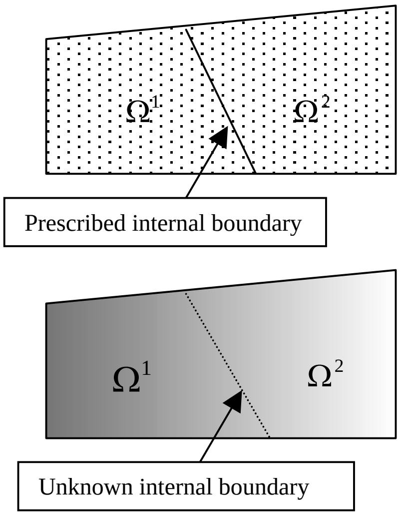

Fig. 1　Two-subregion problem.

$$u_{s+1} = u_s + \alpha(v_s - u_s) \tag{4}$$

この計算プロセスを繰り返して, 収束値が得られるまで続ける.

（２）内部境界があらかじめ与えられていない場合：

以上の説明は, 内部境界があらかじめ決められている場合の計算であるが, 内部境界が未知関数の分布あるいはその他の条件によって決められる未知境界問題では, 適当に仮定された内部境界から計算を開始し, この位置を変えながら指定条件を満たす位置を探索しなければならない. この場合は次の２通りの方法で取り扱う．なお, 内部境界で与えられる条件は, 例としてつぎのように未知関数が指定されるものとする：

$$u = \bar{u}_I \; (= \bar{v}_I = v) \tag{5}$$

＜方法１＞

１）あらかじめ適当に領域を分割する.

２）領域Ω^1の内部境界で指定される条件(ここでは$u = \bar{u}_I$)のもとで解析を行い，領域Ω^2の内部境界上のvを求める.

３）つづいて，内部境界の位置を$\Delta\mathbf{d}$だけ変えて，2)と同様にしてvを求める.

４）上記の結果から，領域Ω^2の内部境界の条件(ここでは$v = \bar{v}_I$)を満たす位置を, 線形内挿によって決定する．sおよび$s+1$番目の計算における結果, 内部境界の位置をv_{Is}, $\mathbf{d}_s$およびv_{Is+1}, $\mathbf{d}_s + \Delta\mathbf{d}\ (= \mathbf{d}_{s+1})$とすれば, 変更後の内部境界の位置はつぎのように与えられる：

$$\mathbf{d}_{s+2} = \mathbf{d}_s + \beta \frac{(\bar{v}_I - v_{Is})\Delta\mathbf{d}}{(v_{Is+1} - v_{Is})} \tag{6}$$

この位置が反復計算で仮定された内部境界に十分近ければ，目的とする結果が得られたと解釈する．そうでなければ，次に進む．式（６）の係数βは必要に応じて用いられる.

５）新たに決定された内部境界について解を求め，２）に戻り，計算を繰り返す.

＜方法２＞

１）あらかじめ適当に領域を分割し, 内部境界の条件を用いずに解を求める.

２）つづいて，内部境界の位置を$\Delta\mathbf{d}$だけ変えて解を求める.これらの結果得られる内部境界上のuとvが一致することは当然であるが, それらは指定された条件を満たさない.

３）上記の２つの結果から, 内部境界の条件を満たす位置を，線形内挿によって決定する．その決定式は上記の方法１の場合と同じである. この位置が反復計算で仮定された内部境界に十分近ければ, 目的とする結果が得られたと解釈する．そうでなければ，次に進む.

４）新たに決定された内部境界について解を求め，２）に戻り，計算を繰り返す.

３　例題とその検討

線形領域Ω^1と非線形領域Ω^2からなる２次元問題を考える．線形領域は内部境界を含め，境界要素による離散化を行う．非線形領域は境界要素による離散化以外に，いくつかの内部点を計算点として配置する. そのもとになる配置はFig. 2に示される. 内部境界が移動することによって, 個々の部分領域は変形するが, 境界要素数および内部計算点数は変更せずに, 関連してそれらの配置を変えるものとする.

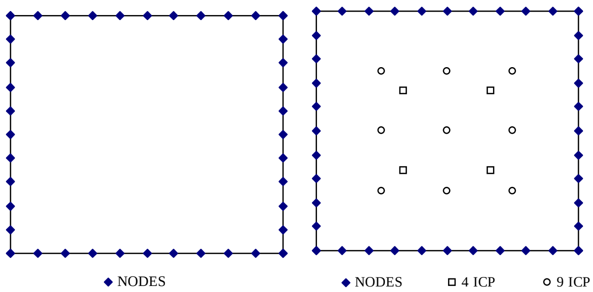

Fig. 2　Boundary discretization and internal computing points.

境界要素数は基本図形の各辺に 10，境界計算点は各辺に 6，内部計算点は４ないしは９個とした．境界要素は線

形要素とし，かど点は２重節点としている．さらに，以下の例題では，内部境界の移動は x 軸方向に限定した（$\mathbf{d}$ は x 軸方向のべ移動量であり，以下では $\Delta\mathbf{d} = 0.01$）．式（４）の係数は従来の経験から $\alpha = 0.5$ ととり，また式（６）の係数は $\beta = 1$ とおいて計算を実行した．

（１）**例題１** (Fig. 3)：それぞれの部分領域における支配方程式は次のように与えられるものとする：

$$\Omega^1 : \nabla^2 u(x,y) = 0 \ \ (u \le 1) \tag{7}$$

$$\Omega^2 : \nabla^2 v(x,y) + 12\sqrt{v} = 0 \ \ (v \ge 1) \tag{8}$$

すなわち，未知関数の値が１より大きいか，小さいかによって支配方程式が変わり，内部境界の上では未知関数の値は１となる．外部境界における指定境界条件は，

上下の境界辺では　$q = 0$ or $p = 0$
領域の左側面で　$u = -3$
領域の右側面で　$v = 16$

ここで考える問題は簡単のために，y 方向に関数が変化しないように仮定されているので，内部境界は x 方向にだけ移動する．すなわち，Fig. 3 の e をあらかじめ仮定して，上記の計算スキームを用いる．あらかじめ仮定する内部境界を種々にとり，方法１で計算を行った結果を Fig. 4 (a’’’)，方法２で計算を行った結果を Fig. 4 (b’’’)に示す．図に示されるように，仮定する e の値によらず，妥当な結果を得ることができる．なお，方法１では線形領域 Ω^1 の内部境界では常に $u = 1$ と仮定しているので，非線形領域 Ω^2 の計算が完了すれば１度の反復スキームが終わる．他方，方法２では，あらかじめ仮定した内部境界上の u あるいは v を収束計算するので，１度の反復スキームにサブ反復スキームが必要となる．この結果，計算時間は方法１の方が大幅に軽減される．

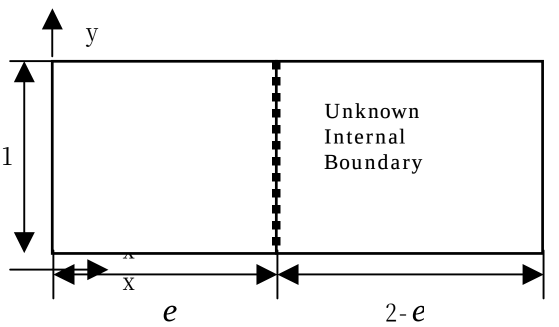

Fig. 3　Example problem 1.

（２）**例題２**（Fig. 5）：それぞれの部分領域における支配方程式は次のように与えられるものとする：

$$\Omega^1 : \nabla^2 u(x,y) = 0 \ (u \le 50) \tag{9}$$

$$\Omega^2 : \nabla[\lambda \nabla v(x,y)] = 0 \ (v \ge 50) \tag{10}$$

ここで λ は座標の関数であって，つぎのように与えられる（a, b は定数）：

$$\lambda = a + b(x^2 + y^2)^{1/2}$$

上下の境界辺では　$q = 0$ or $p = 0$
領域の左側面で　$u = 0$
領域の右側面で　$v = 100$

例題１では２種類の方法を用いた未知内部境界の決定法を示したが，いずれの方法でも収束解を得られることがわかったので，効率のより高い方法１だけを利用すること

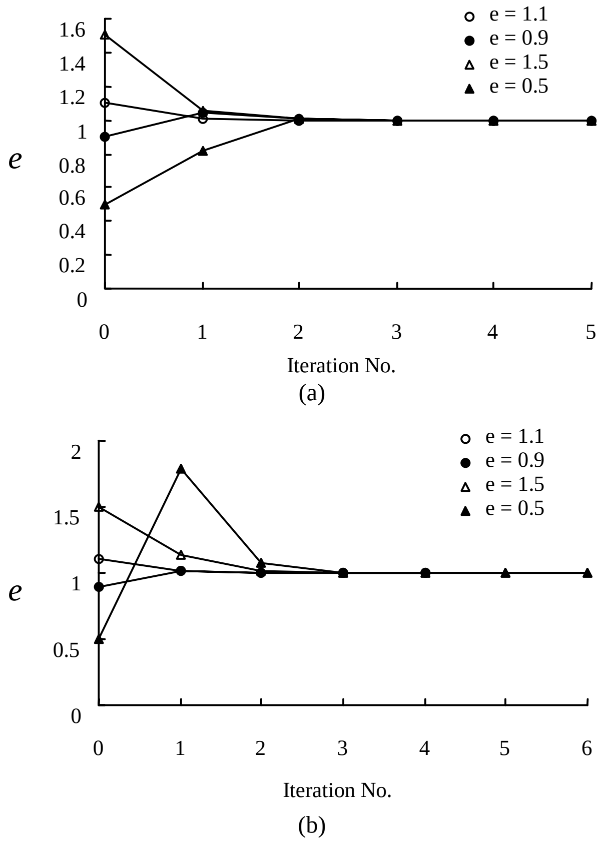

Fig. 4　Iterations (a), (b) for different e .

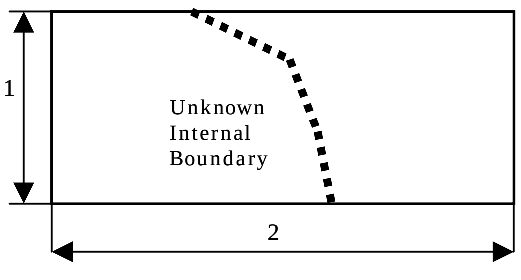

Fig. 5　Example problem 2.

にする．なおこの問題では，内部境界は縦方向に変化するので，内部境界の位置はそれを構成する個々の節点の動きによって，表わされる．内部境界の初期仮定は x 座標のある位置における直線とした．これを種々の位置 e に仮定して，反復移動を繰り返した結果を Fig. 6,に示す．いずれの仮定においても，わずかの反復回数により設定した問題の条件を満たす結果に到達できることがわかる．内部境界が下辺に交わる位置での収束状況を Fig. 7 に表示した．なお，収束判定にはすべての節点の動きが十分小さくなったことを採用している．

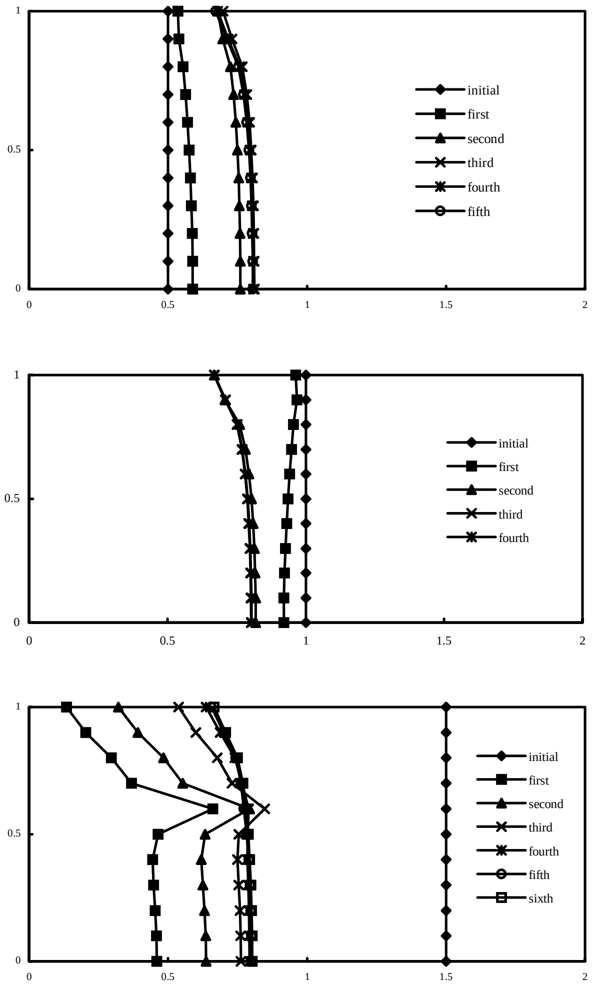

Fig. 6　Iterative process of unknown internal boundary.

5　まとめ

本研究では, 多領域問題に対する計算点解析法の適用において, 解析対象の全体領域が線形部分領域と非線形部分領域で結合され, それらの領域での支配方程式が異なるだけでなく, 両者を区別する内部境界に位置があらかじめ分かっていない問題を取り上げた. 内部境界を決定するために, あらかじめ適当に仮定した位置から徐々に移動させ, 与えられた内部境界の条件を満たす位置に最終的に収束させる方法を示した. 簡単な例題で, 方法の妥当性が明らかにされた.

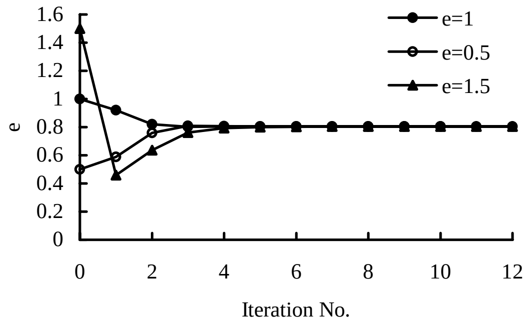

Fig. 7　Convergence of bottom node .

参考文献

(1) 神谷・許，非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法，日本機械学会論文集 (A)，64 (1998), pp. 147-154

(2) 許・神谷，非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法（続報：未知関数の導関数を含む非同次項の場合），日本機械学会論文集(A)，64 (1998)，pp. 1341-1347

(3) 許・神谷，計算点解析法による境界要素法のためのアダプティブ境界要素，日本機械学会論文集 (A)，64 (1998), pp. 1595-1598

(4) 神谷・許・鈴木，境界要素法における計算点解析法の多重領域問題への応用，BEM テクノロジーコンファレンス論文集，**10** (2000), pp. 23-28

(5) 神谷・許・鈴木，境界要素法における計算点解析法の多重領域問題への応用：第 2 報, 境界要素法論文集, **17** (2000), pp. 77-80