

間接 Trefftz 法によるスロッシング問題のシミュレーション (解析手法の拡張)

SIMULATION OF SLOSHING PHENOMENON BY INDIRECT TREFFTZ METHOD (EXTENSION OF SIMULATION SCHEME)

池田洋一¹⁾, 桂田純一²⁾, 北 英輔³⁾, 神谷紀生⁴⁾

Yoichi IKEDA, Jun'ichi KATSURAGAWA, Eisuke KITA and Norio KAMIYA

- 1) 大同工業大学 (〒 457-8530 名古屋市南区滝春町, E-mail: ikeda@daidoh-it.ac.jp)
 2) 名古屋大学工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: jk@mech.nagoya-u.ac.jp)
 3) 名古屋大学情報文化学部 (〒 464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: kita@info.human.nagoya-u.ac.jp)
 4) 名古屋大学情報文化学部 (〒 464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)

This paper describes the application of the Trefftz-type boundary element method to the simulation of the sloshing phenomenon. Assuming that the fluid could be the perfect one, the phenomenon can be modeled as the initial and the boundary values problem of the Laplace equation with respect to the velocity potential. The governing equation is firstly solved with the adequate boundary conditions to determine the components of velocity and acceleration on the fluid surface. In order to solve the initial value problem, we will compare the simple Euler scheme using velocity vector on the free surface alone and the extended scheme using both velocity and acceleration components. The Trefftz-type boundary element method is applied for estimating the velocity and acceleration components. Finally, the present scheme is applied to the simulation of the sloshing phenomenon on the fluid in a rectangular vessel.

Key Words : Indirect Trefftz Method, Sloshing Phenomenon, Boundary Derivatives, T-complete Functions

1. はじめに

スロッシング現象の支配方程式は速度ポテンシャルに関するラプラス方程式で与えられる。そこで、支配方程式を適切な境界条件の下で解いて自由表面における速度ポテンシャルの導関数を求め、得られた導関数を用いて自由表面形状と自由表面上での境界条件値を更新する。上記のプロセスを繰り返すことにより、自由表面上の波形をシミュレートすることができる。

この現象の解析には、これまで有限要素法や境界要素法などが適用されている^(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)。有限要素法は強力な数値解析法であるが、スロッシング現象のシミュレーションに適用する場合、解析領域の変動に伴って解析メッシュがゆがみ、計算精度が低下する可能性があるため、メッシュのゆがみを遅らせるようなシミュレーション方法が必要となる。しかし、大規模な形状変化がある場合には各時間ステップにおいて自由表面形状に合わせて有限要素メッシュを再構

成する必要がある。最近の自動メッシュ生成技術の進歩によりメッシュ生成はかなり容易となっているが、自動メッシュ生成にかかる計算コストは未だ比較的大きい。これに対して、境界要素法では解析対象の境界要素分割だけで問題を解析できるので、形状変更ごとにメッシュがゆがむ可能性は少なくなる上、大きなゆがみを生じて、メッシュ再構成にかかる計算コストは有限要素法に比べて小さくなる。その一方で、境界要素法では別の問題が生じる。スロッシング現象のシミュレーションでは、自由表面形状をシミュレートするために自由表面上で座標についてのポテンシャル導関数を評価しなければならないが、境界要素法ではこの操作が複雑となることである。

以上のような問題を改善するために、本研究では間接型 Trefftz 法^(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25)を利用することについて述べる。Trefftz 法は境界要素法と同じく境界型数値解析法に分類されるので、解析対象の形状

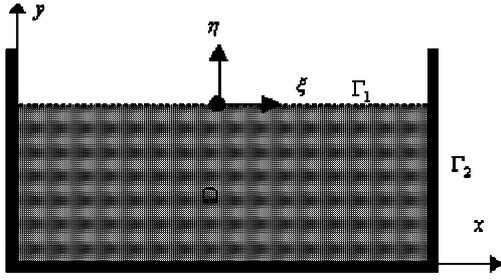


Fig. 1 Problem Statement

変更によりメッシュがゆがんで精度が低下する可能性は少ない。さらに、ポテンシャルは非特異な T-complete 関数の線形結合で近似されるので、これを直接微分することで座標系についてのポテンシャル導関数を評価できる。さらに、登坂ら⁽¹⁾は、高精度なシミュレーションを行うために高次導関数を利用することを提案しているが、このような方法に対しても Trefftz 型境界要素法は容易に適用できる。そこで、本論文ではポテンシャルの 1 次導関数だけを用いる単純 Euler 法とより高次の導関数も利用する拡張手法の定式化を説明し、両者の特徴について検討する。

2. スロッシング現象のシミュレーション

2.1. スロッシング現象のモデル化

矩形容器内に満たされた液体の自由表面にラグランジュ座標系 $\xi - \eta$ を考える (図 1)。液体領域を Ω 、液体の自由表面境界を Γ_1 、液体の壁境界を Γ_2 とする。液体は非粘性・非圧縮、渦なしと考えると、速度ポテンシャル $u(x, y, t)$ についてスロッシング現象の支配方程式と初期条件・境界条件は次式で与えられる^(3, 4)。

支配方程式

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

壁境界条件

$$q \equiv \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } \Gamma_2) \quad (2)$$

自由表面条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u - g\xi + A(t)\eta \\ \frac{D\xi}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} = v_x \\ \frac{D\eta}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial y} = v_y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで $g, A(t)$ は重力加速度と加振加速度を、 v_x, v_y は自由表面での流体速度成分を示す。

初期条件 時刻 $t = 0$ において液体は静止しているものとする、自由表面 Γ_1 での初期条件は次式となる。

$$\xi = \bar{\xi}, \eta = 0, u = 0 \quad (\text{on } \Gamma_1) \quad (4)$$

2.2. 初期値問題と境界値問題

上記の関係式を整理すると以下の境界値問題と初期値問題に分けることができる。

境界値問題

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & (\text{in } \Omega) \\ u &= \bar{u} & (\text{on } \Gamma_1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= q = 0 & (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

初期値問題

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u - g\xi + A(t)\eta \\ \frac{D\xi}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{D\eta}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2.3. 境界値問題の解法

本研究では、式 (5) で与えられた境界値問題を解くために Trefftz 型境界要素法を適用する。Trefftz 法では、支配方程式を満足する正則な T-complete 関数を用いて解析を行う。2 次元ラプラス方程式に対する T-complete 関数 u_j^* は次式で与えられる⁽¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \{u_1^*, \dots, u_{2\mu}^*, u_{2\mu+1}^*, \dots\}^T \\ &= \{1, \dots, \Re[r^\mu e^{j\mu\theta}], \Im[r^\mu e^{j\mu\theta}], \dots\}^T \end{aligned} \quad (7)$$

ここで (r, θ) は平面極座標、 μ は正の整数である。また $j = \sqrt{-1}$ であり、 \Re, \Im は複素関数の実部と虚部を示す。

式 (7) を用いて、ポテンシャル u を次式で近似する。

$$\begin{aligned} u \simeq \tilde{u} &= a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_N u_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{u}^*, \mathbf{a} はそれぞれ T-complete 関数ベクトルと未知係数ベクトルを示し、 N はそれらの総数である。また、式 (8) を境界の法線方向に偏微分すれば境界でのフラックスの近似式を得る。

$$\begin{aligned} q \simeq \tilde{q} &\equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \dots + a_N q_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 \mathbf{q}^* はポテンシャルについての T-coccomplete 関数の境界法線方向導関数を示す。

式 (8) と (9) は境界条件式を満足していないので、これらを境界条件式に代入すると残差が生じる。つまり、

$$\left. \begin{aligned} R_1 &\equiv \tilde{u} - \bar{u} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* - \bar{u} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \\ R_2 &\equiv \tilde{q} - \bar{q} = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* - \bar{q} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式 (10) に含まれる未知係数を決定するために、ここでは選点法を用いる。選点法による定式化では、境界上にとった選点 P_i で式 (10) の残差を 0 とおく。つまり、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_i) &= \bar{u}(P_i) \quad (P_i \in \Gamma_1) \\ \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_i) &= \bar{q}(P_i) \quad (P_i \in \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

これをマトリックス表示すると、

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (12)$$

2.4. 初期値問題の解法

(1) 単純 Euler 法による解法 初期値問題を解くために単純 Euler 法を用いる場合、時間ステップ幅を Δt とすれば次の更新ルールを得る。

$$\left. \begin{aligned} u^{k+1} &= u^k + \Delta t \frac{Du}{Dt} \\ \xi^{k+1} &= \xi^k + \Delta t \frac{D\xi}{Dt} \\ \eta^{k+1} &= \eta^k + \Delta t \frac{D\eta}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで右辺に含まれる $Du/Dt, D\xi/Dt, D\eta/Dt$ は式 (3) より与えられる。ところで、式 (3) にはポテンシャルの導関数 $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ が含まれているが、これらは式 (8) を x, y について直接微分することで次式のように得る。

$$u_{,x} = a^T u_{,x}^*, \quad u_{,y} = a^T u_{,y}^* \quad (14)$$

ここで $(\cdot)_{,x} \equiv \partial/\partial x, (\cdot)_{,y} \equiv \partial/\partial y$ である。

(2) 拡張法による解法⁽¹⁾ 時間 $t + \Delta t$ において $u(t + \Delta t), \xi(t + \Delta t), \eta(t + \Delta t)$ を 2 次までテイラー展開すると次式を得る。

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{D^2u}{Dt^2} \quad (15)$$

$$\xi^{k+1} = \xi^k + \Delta t \frac{D\xi}{Dt} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{D^2\xi}{Dt^2} \quad (16)$$

$$\eta^{k+1} = \eta^k + \Delta t \frac{D\eta}{Dt} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{D^2\eta}{Dt^2} \quad (17)$$

ここで、1 次導関数 $Du/Dt, D\xi/Dt, D\eta/Dt$ は式 (6) から求められる。一方、2 次導関数については以下のようにして計算できる。まず、 D^2u/Dt^2 について考えると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{D^2u}{Dt^2} &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u - g\xi + A(t)\eta \right) \\ &= v_x \frac{D^2\xi}{Dt^2} + v_y \frac{D^2\eta}{Dt^2} + \frac{D}{Dt} [A(t)\xi] - gv_y \end{aligned} \quad (18)$$

$D^2\xi/Dt^2, D^2\eta/Dt^2$ が計算されれば、 D^2u/Dt^2 は上式から求めることができる。そして、 $D^2\xi/Dt^2, D^2\eta/Dt^2$ は次式から計算される。

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi}{Dt^2} &= \frac{Dv_x}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{,x} + u_{,x}u_{,xx} + u_{,y}u_{,xy} \\ \frac{D^2\eta}{Dt^2} &= \frac{Dv_y}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{,y} + u_{,x}u_{,yx} + u_{,y}u_{,yy} \end{aligned}$$

ここで、 $u_{,x}, u_{,y}, u_{,xx}, u_{,xy}, u_{,yy}$ は式 (8) を直接微分することで求めることができる。これに対して、第 1 項は次のようにして計算する⁽¹⁾。

自由境界上では、 $\partial u/\partial t$ に関して次の境界値問題が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) &= 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u - g\xi + A(t)\eta \\ &\quad (\text{on } \Gamma_1) \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) &= q = 0 \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

そこで、上の境界値問題を Trefftz 法で解く。このとき、境界値問題の解 $\partial u/\partial t$ は T-complete 関数の線形結合で近似されるので、それを x, y について直接微分することで $(\partial u/\partial t)_{,x}, (\partial u/\partial t)_{,y}$ を求めることができる。

3. 解析例

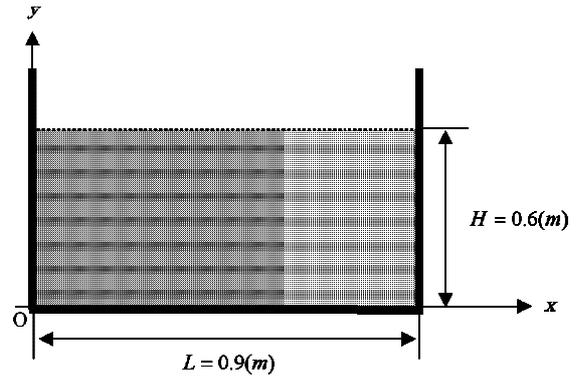


Fig. 2 Object under consideration

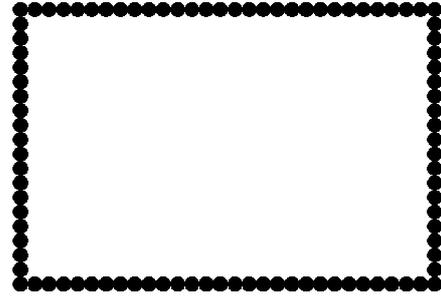


Fig. 3 Initial placement of collocation points

解析対象 図 2 に示される幅 $L=0.9(m)$ の 2 次元の矩形容器に高さ $H=0.6(m)$ のところまで液体を満たして水平加振を与える。振幅 d と加振加速度 ω とすると、2 次元容器の水平加振加速度 $A(t)$ は次式で与えられる。

$$A(t) = d\omega^2 \sin(\omega t) \quad (t \geq 0) \quad (20)$$

ここで、 $d = 2.0 \times 10^{-3}(m), \omega = 5.5(\text{rad}/\text{sec})$ としてシミュレーションする。

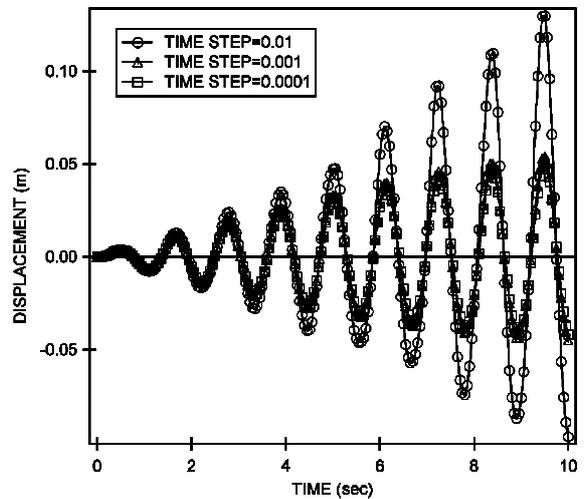


Fig. 4 Elevation of free surface (Euler scheme)

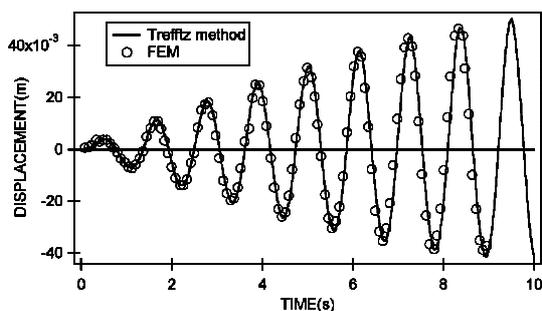


Fig. 5 Comparison with finite element solutions

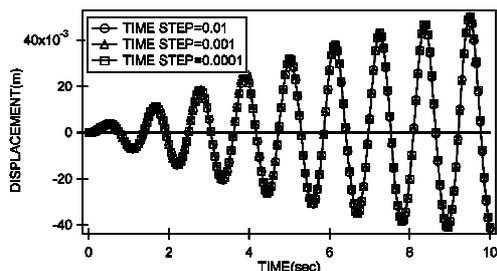


Fig. 6 Elevation of free surface (Extended scheme)

解析には T-complete 関数を 41 個、境界選点を 100 個用いる。初期選点配置を図 3 に示す。境界選点は境界上に均等に配置し、かどにあたるには 2 重選点を配置する。連立方程式を解くためには境界選点を 100 個も取る必要はないが、これらの選点は境界上での導関数を評価するための点として取られている。2 重選点では、同一座標の点に 2 つの選点が配置されており、それらで異なる法線ベクトルが定義される。自由表面上の選点は毎回均等になるように再配置する。

単純 Euler 法による解析結果 時間積分のタイムステップを $\Delta t = 0.01, 0.001, 0.0001$ と変化させたときの、タイム $t = 9.5(s)$ における自由表面右端における隆起量の変化の比較を図 4 に示す。この結果からタイムステップの大きさによって解析結果に大きな違いが生じていることがわかる。そこで、タイムステップが最も小さい $\Delta t = 0.0001$ の結果を有限要素法による結果⁽⁶⁾と比較したものを図 5 に示す。この結果より、本研究で得られた結果は有限要素法による結果とよく一致していることがわかる。

拡張法による解析結果 時間積分のタイムステップを $\Delta t = 0.01, 0.001, 0.0001$ と変化させたときの、タイム $t = 9.5(s)$ における自由表面右端における隆起量の拡張法による解析結果の比較を図 6 に示す。これより拡張法では最も大きなタイムステップ $\Delta t = 0.01$ においても、最も小さなタイムステップの場合と同様の精度で解析できることが分かる。

タイム $T = 0.54, 1.12, 1.68, 2.24, 2.81, 3.37, 5.05, 6.75(s)$ における自由表面の波形を図 7 と 8 に示す。ここで横軸は容器

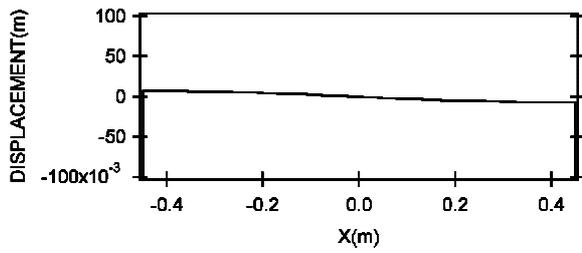
の長さ方向の軸を示し、縦軸は初期状態の水面の上下 10cm の範囲を示す。

4. 結言

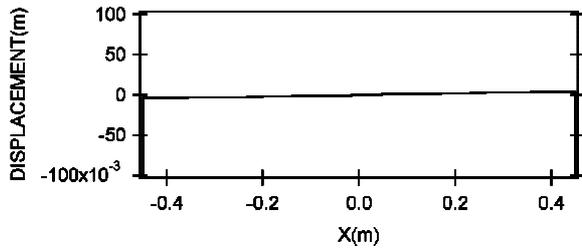
本研究では、2次元容器内のスロッシング現象のシミュレーションに Trefftz 法を適用する方法について述べた。開発したプログラムを矩形容器内の流体に対するスロッシング現象のシミュレーションに適用し、解析結果を有限要素法による結果と比較・検討した。その結果、両者はよく一致したので、スロッシング現象のシミュレーションに Trefftz 法を適用することの可能性が確認された。そこで、続いて計算効率の改善のために、時間に関する 2 次導関数を用いる方法について述べた。この方法では、単純オイラー法よりも時間ステップを大きく取ることができるので、計算効率をさらに改善することがわかった。しかし、改善するべき点も多い。まず、直接導関数を評価したことによる計算精度改善について定量的な評価が必要である。また、有限要素法や境界要素法でこれまでに提案されているいくつかの方法 (ABM 法やルンゲ・クッタ法など) との比較も必要と考えられる。

参考文献

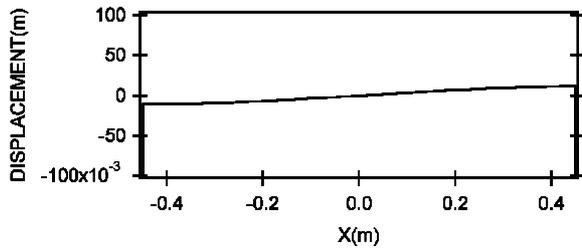
- (1) 数値流体力学編集委員会 (編). 移動境界流れ解析. 東大出版会, 1995.
- (2) J. W. Dold and D. H. Peregrine. Steep unsteady water waves - an efficient computational scheme. In *Proc. 19th Coastal Eng. Conf.*, Vol. 1, pp. 955-967, 1984.
- (3) T. Nakayama. A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free-surface. *International Journal of Numerical Methods in Fluid*, Vol. 10, pp. 683-695, 1990.
- (4) 川端久善, 杉野隆三郎, 登坂宣好. 境界要素法による容器内のスロッシング現象の近似解析. 境界要素法論文集, Vol. 6, pp. 167-172, 1989.
- (5) N. Tosaka and R. Sugino. *Boundary Element Analysis of Non-linear Liquid Motion in Two-dimensional Containers*, pp. 490-499. Springer Verlag, 1991.
- (6) K. Wasizu, T. Nakayama, M. Ikegawa, Y. Tanaka, and T. Adachi. *Some Finite Element for Techniques Analysis of Nonlinear Sloshing Problem*, chapter 5, pp. 357-376. John Wiley & Sons Ltd., 1984.
- (7) 大山功, 土田充. 非線形不規則波を対象とした自由波制御型の造波理論. 海岸工学論文集, Vol. 45, pp. 11-15, 1998.
- (8) 筒井茂明, 大木洋典. スロープ及びステップ型リーフ上での波の非線形挙動. 海岸工学論文集, Vol. 45, pp. 41-45, 1998.
- (9) M. A. Hamzah, 間瀬肇, 高山知司. 孤立波の遡上と海岸堤防への波力に関するダイレクト・シミュレーション. 海岸工学論文集, Vol. 45, pp. 176-180, 1998.



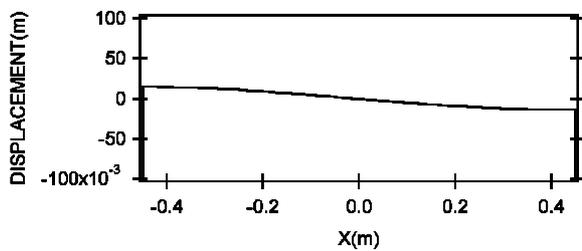
(a) $T=0.54$ (s)



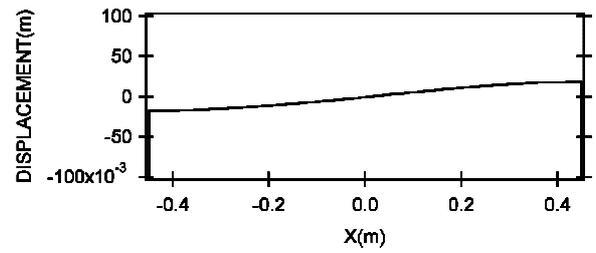
(b) $T=1.12$ (s)



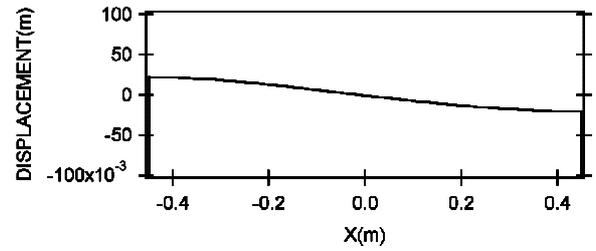
(c) $T=1.68$ (s)



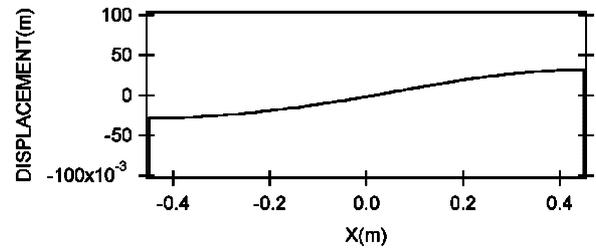
(d) $T=2.24$ (s)



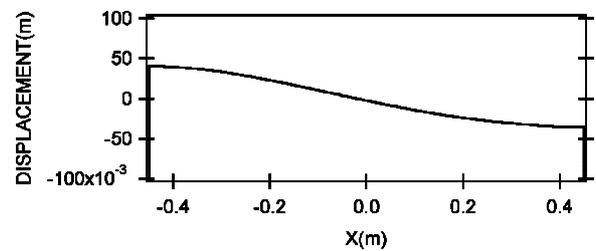
(e) $T=2.81$ (s)



(f) $T=3.37$ (s)



(g) $T=5.05$ (s)



(h) $T=6.75$ (s)

Fig. 7 Wave profiles

Fig. 8 Wave profiles (Cont.)

- (10) N. Kamiya and E. Kita. *Advances in Engineering Software: Special Issue on Trefftz Method 70 Years*, Vol. 24. Elsevier Science Pub., 1995.
- (11) H. Antes. On a regular boundary integral equation and a modified Trefftz method in Reissner's plate theory. *Engineering Analysis*, Vol. 1, No. 3, pp. 149–153, 1984.
- (12) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 159–169, 1989.

- (13) W. G. Jin, Y. K. Cheung, and O. C. Zienkiewicz. Application of the Trefftz method in plane elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 1147–1161, 1990.
- (14) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Solution of Helmholtz equation by Trefftz method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp. 63–78, 1991.
- (15) I. Herrera. *Boundary Methods: An Algebraic Theory*. Pitman, 1984.
- (16) Ismael Herrera. Trefftz-Herrera domain decomposition.

Advances in Engineering Software, Vol. 24, No. 1-3, pp. 43–56, 1995.

- (17) Ch. Hochard and L. Proslier. A simplified analysis of plate structures using Trefftz functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, pp. 179–195, 1992.
- (18) J. Jirousek and Lan Guex. The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 651–693, 1986.
- (19) J. Jirousek and A. Venkatesh. Generation of optimal assumed stress expansions for hybrid-stress elements. *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 6, pp. 1413–1417, 1989.
- (20) N. Kamiya and S. T. Wu. Generalized eigenvalue formulation of the Helmholtz equation by the Trefftz method. *Engineering Computations*, Vol. 11, pp. 177–186, 1994.
- (21) E. Kita, N. Kamiya, and Y. Ikeda. An application of Trefftz method to the sensitivity analysis of two-dimensional potential problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, No. 13, pp. 2209–2224, 1995.
- (22) 真鍋尚, 福本容子, 登坂宣好. Trefftz 法の 2 次元ポアソン方程式への適用. 計算工学会講演論文集, Vol. 5, pp. 289–292, 2000.
- (23) E. Trefftz. Ein Gegenstück zum ritzschen Verfahren. *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech., Zurich*, pp. 131–137, 1926.
- (24) B. Szybinski and A. P. Zielinski. Alternative T-complete systems of shape functions applied in analytical Trefftz finite elements. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 11, pp. 375–388, 1995.
- (25) O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess. Marriage á la mode – the best of both worlds (finite elements and boundary integrals). In R. Glowinski, E. Y. Rodin, and O. C. Zienkiewicz, editors, *Energy Methods in Finite Element Analysis*, pp. 82–107. John Willy & Sons, 1979.