

境界積分方程式法による水の波の数値計算における 放射条件の取り扱いについて

A TREATMENT OF THE RADIATION CONDITION IN THE BIE SOLUTION OF WATER WAVE PROBLEMS

西村 直志¹⁾, 吉田 研一²⁾

Naoshi NISHIMURA and Ken-ichi YOSHIDA

- 1) 京都大学工学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@gee.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学工学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yoshida@gpsun1.gee.kyoto-u.ac.jp)

Use of the standard BIE analysis with the ordinary fundamental solution for the Laplace equation in water wave problems requires the introduction of an artificial boundary where the radiation condition has to be imposed. This paper presents a method of null-field equation type to introduce the radiation condition. The preconditioning of the resulting matrix equation and the operation count of the algorithm are considered. The effectiveness of the proposed method is demonstrated in a few numerical examples.

Key Words: Water Wave, Radiation Condition, Fundamental Solution

1. はじめに

近年メガフロートの開発等に関係して、水の波の大型問題の解法が研究されている。特に、水深が一定で、水面の境界条件の非線形性を考慮する必要がないような無限領域問題では、水面と水底の境界条件を満たす Green 関数を用いた定式化が広く用いられている。また、そのために鍵となる Green 関数を高速に計算する手法も研究されている⁽¹⁾。しかし、注目する領域からある程度離れた領域で水深一定の仮定が使える場合においても、注目する領域では水面の境界条件の線形性が仮定できない場合や、注目する領域に遠方の一定水深より深い領域がある場合、多くの周波数に対する解に興味がある場合など、Green 関数を用いない定式化を使うことが有効と考えられる場合も有り得る。さらに多重極法のような高速解法を用いる場合、Green 関数に基づく定式化も可能ではあるが(厳密な多重極法ではないが、tree 法に基づく Utsunomiya ら⁽²⁾の方法、Korsmeyer らの precorrected-FFT 法⁽³⁾、および tree 法と関連の深い瀬戸の方法⁽⁴⁾等)、通常の基本解を用いた多重極法の計算効率の良さを考慮すると、Green 関数を用いない定式化の効率を検討することには意義があると考えられる。しかし、通常の基本解を用いた境界積分方程式法を用いる場合には領域を有限で打ち切り、導入される仮想境界に放射条件を表す「境界条件」を導入しなければならない。

これまで境界積分方程式法に関連して仮想境界での放射条

件を取り扱う試みとして Hybrid 境界要素法と呼ばれる手法があげられる⁽⁵⁾。これは要するに単純な形状の仮想境界を導入し、その外部領域での放射条件を満足する解を解析的に構成して内部領域の通常の境界積分方程式に代入する解法である。しかし、従来の Hybrid 境界要素法による解析は、波の問題の固有関数 × 基本解の積分と言った重い数値計算を含んでいるため、通常の境界積分方程式法の部分を多重極法等を用いて高速化する際に bottle neck になる虞がある。そこで、本報では、波動問題でしばしば用いられる null-field equation を用いて放射条件を導入することを検討する。なお、本報の段階では従来型の境界積分方程式法を用いるが、最終的には多重極法を用いる事を想定しているので、得られる線形方程式は繰り返し解法(ここでは GMRES)で解く。その際、離散化された境界積分方程式法の行列に null-field equation の行列を単に連立させるだけでは速い収束を得ることは難しい。そこで本報では仮想境界の形状が円筒形である場合に限定し、FFT を用いて null-field equation を消去する前処理法を提案する。さらにこの処理は、典型的な問題では $O(N^{1/2} \log N)$ (N : 未知数の数) 程度の計算量を有することを示し、将来的に多重極法を用いる際に bottle neck にならないことを確認する。

2. 問題の定式化

十分遠方において水深 h が一定になるような 3 次元無限

領域を考える (Fig.1)。水深 h によって幾何学量を無次元化すると、水の波の問題は

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 & \text{in } D & & \frac{\partial\phi}{\partial n} &= v_0 & \text{on } S_1 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= \kappa^2\phi & \text{on } S_2 & & \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 & \text{on } S_3 \end{aligned} \quad (1)$$

および遠方での放射条件を満たす関数 ϕ を求める問題となる。ここに ϕ は速度 potential、 v_0 は与えられた境界 S_1 での速度データ、 $\kappa^2 = \omega^2 h/g$ であり、 ω は周波数、 g は重力加速度である。

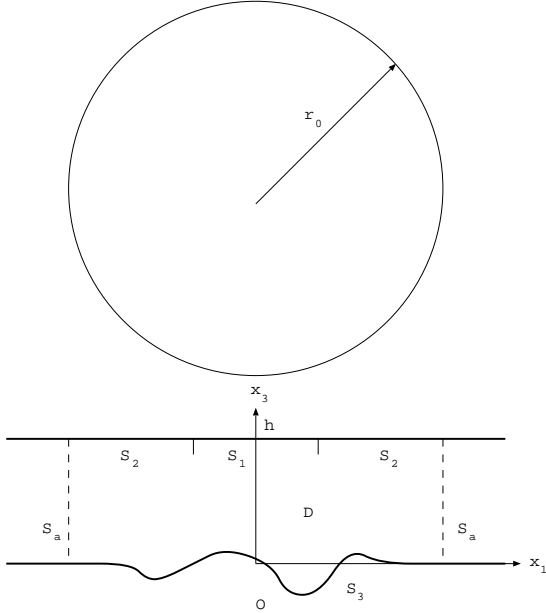


Fig.1 Domain

この問題を Laplace 方程式の基本解を用いた通常境界積分方程式法で解くために、水深が一定値に達した部分に仮想境界 S_a を導入して、考える領域を $S_{1,2,3,a}$ で囲まれた有界領域 D とする。さらに、 D に対する通常境界積分方程式法を用いると、 ∂D 上での積分「方程式」

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x)}{2} &= - \int_{S_1 \cup S_3 \cup S_a} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} \phi(y) dS_y \\ &+ \int_{S_2} \left(\kappa^2 G(x-y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) \right) \phi(y) dS_y \\ &+ \int_{S_a} G(x-y) \frac{\partial\phi}{\partial n_y}(y) dS_y + \int_{S_1} G(x-y) v_0(y) dS_y \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる。ここに $G = 1/4\pi|x-y|$ は Laplace 方程式の基本解であり、簡単のために $S_2 \cap \bar{D}$ 等を S_2 等と表記した。これに加えて S_a 上に放射条件に対応する「境界条件」を導入する必要がある。

仮想境界 S_a 上の「境界条件」を設定するために、まず、Fig.1 において、座標原点を十分遠方の水深 ($h=1$) と同じ深さに取り、 x_3 軸を上向きに取る。さらに、 κ_m ($m=0,1,\dots$) を

$$\tanh \kappa_0 = \frac{\kappa^2}{\kappa_0}, \quad \tan \kappa_i = \frac{\kappa^2}{\kappa_i} \quad (i=1,\dots)$$

および、 $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots$ を満たす実数とする。このとき

$$\Phi_{0n} = H_n^{(1)}(\kappa_0 r) e^{in\theta} \cosh(\kappa_0 x_3), \quad (3)$$

$$\Phi_{mn} = K_n(\kappa_m r) e^{in\theta} \cos(\kappa_m x_3), \quad (4)$$

$$(m=1,2,\dots, n=-\infty,\dots,\infty) \quad (5)$$

は ($r \neq 0$)、水深が一定のときの境界値問題 (1) の放射条件を満たす解である。ここに $H_n^{(1)}$ は Hankel 関数、 K_n は第 2 種変形 Bessel 関数、 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 、および θ は $x_{1,2}$ 面内で x_1 方向から測った角度である。

次に、 ϕ 、 $\partial\phi/\partial n$ が、(1) の放射条件を満たす解の S_a 上での値、および法線微分であるとする。このとき Green の公式より、次式で与えられる null-field equation

$$\begin{aligned} \int_{S_a} \left(\phi \frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial n} - \Phi_{mn} \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS &= 0 \\ (m=0,1,\dots, n=-\infty,\dots,\infty) \end{aligned} \quad (6)$$

が成り立つ⁽⁶⁾。式 (2) の境界積分方程式を離散化し、(6) と連立して解くことによって放射条件を満たす (1) の解が得られる。

3. 放射条件の数値的取り扱い

3.1. Null-Field Equation

仮想境界 S_a 上の null-field equation (6) は次のように取り扱うことができる。まず、仮想境界形状は Fig.1 のように半径 r_0 の円筒形に限定する。さらに、簡単のために S_a を θ 方向に n_θ (偶数) 等分、 x_3 方向に n_h 等分して要素分割し、要素 $2\pi j/n_\theta < \theta < 2\pi(j+1)/n_\theta$ ($j=0,\dots,n_\theta-1$)、 $(a-1)/n_h < x_3 < a/n_h$ ($a=1,\dots,n_h$) において ϕ 、 $\partial\phi/\partial n$ は各々一定値 $\phi(j,a)$ 、 $\partial\phi/\partial n(j,a)$ を取るものとする、離散化された null-field equation(6) から次式が得られる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}(j,b) = \mathcal{F}_{n \rightarrow j}^{-1} \sum_{am} P_{bm}^{-1} P_{ma} K_{m,n'} \mathcal{F}_{k \rightarrow n} \phi(k,a). \quad (7)$$

ここに、 \mathcal{F} (\mathcal{F}^{-1}) は n_θ 項の有限 Fourier(逆) 変換であり、

$$\begin{aligned} P_{ma} &= \int_{(a-1)/n_h}^{a/n_h} \begin{pmatrix} \cosh(\kappa_m x_3) \\ \cos(\kappa_m x_3) \end{pmatrix} dx_3 \\ K_{m,n} &= \frac{\partial \log \left(\frac{H_n^{(1)}(\kappa_m r)}{K_n(\kappa_m r)} \right)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \end{aligned}$$

(括弧内は、上が $m=0$ 、下がその他を表す) である。また $n' = n$ ($0 \leq n \leq n_\theta/2$)、 $n' = n - n_\theta$ ($n_\theta/2 < n < n_\theta$) である。

式 (7) 右辺の計算は、Fourier 変換を FFT で評価すれば

$$O(n_h n_\theta \log n_\theta + n_h^3 n_\theta)$$

程度の計算量で評価できることがわかる。なお、この結論は、形状関数を区分一定としない場合でも、 S_a を一様に要素分割する限り同じであることが容易に示される。特に、大規模問題の系列として、遠方の水深が一定であるが、 S_1 や S_3 の構造が複雑さを次第に増して行く場合を想定すると、

$n_h \sim \text{一定}$ 、 $n_\theta \sim \sqrt{N}$ と考えることが出来る。ここに N は未知数の数である。従って、仮想境界での放射条件に伴う計算量は

$$O(\sqrt{N} \log N) \quad (8)$$

程度となり、方程式 (2) の離散化に $O(N)$ の算法を用いた場合でも放射条件に伴う計算が全計算量を支配することはないと考えられる。

3.2. 対数微分の計算

Hankel 関数、および第 2 種変形 Bessel 関数の対数微分は

$$K_{m,n+1} = \pm \frac{\kappa_m^2}{\frac{n}{r_0} - K_{m,n}} - \frac{n+1}{r_0}.$$

なる漸化式を満たす。ここに、複号は上が $m=0$ 、下が $m>0$ に対応する。対数微分の計算は、 $K_{m,0}$ を定義に従って求めた後、 $n \geq 1$ に対する $K_{m,n}$ を上の漸化式より求める。

3.3. 前処理

積分方程式 (2)、および (7) を離散化すると次のような方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{1,2,3} \text{ 上の } \phi \\ S_a \text{ 上の } \phi \\ S_a \text{ 上の } \frac{\partial \phi}{\partial n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{既知積分の } S_{1,2,3} \text{ 上の値} \\ \text{既知積分の } S_a \text{ 上の値} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここに A_{ij} は (2) を離散化して得られる行列であり、 C は (7) から得られる行列である。従って、右前処理行列

$$M_r = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & C & I \end{pmatrix} \quad M_r^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -C & I \end{pmatrix}$$

を用いると (9) の第 (3,2) ブロックは消去でき、GMRES 等の繰り返し解法で解の初期仮定を 0 にしておけば未知数の第 3 ブロックは常に 0 (正解) となるので、解くべき方程式は実質的に (9) の第 1、2 行ブロックに対応するもののみになる。また、右前処理の実行に要する計算量は、FFT を用いると (8) を得たのと同じ仮定を用いれば、やはり $O(\sqrt{N} \log N)$ となり、bottle neck にはならない。以上の右前処理を用いた後にさらに適当な左前処理を用いると良い。

4. 数値例

本節では、上に述べた手法によって数値計算を行ない、放射条件が適切に取り扱われているかを検討する。

解析対象を Fig.2 に示す。同図では見易さのために縦方向のサイズが拡大されていることに注意されたい。水深 $h=1$ は一定であり、境界 S_1 は喫水が $0.2h$ 、幅、奥行がともに $30h$ の浮体状境界であって、境界条件は水平部に $\partial\phi/\partial n = v_0$ (一定)、垂直部に同じく 0 を与え、 $\Phi = \phi/v_0$ と書く。また、 $\kappa = 0.5917$ とした。仮想境界は $r_0 = 30h$ の位置に取り、境界要素は区分一定とした。未知数の総数は 9316 である。本

研究の動機は多重極法の使用にあるが、現段階では境界積分方程式の離散化には従来法を用い、連立方程式の解法には GMRES を用いた。左前処理としては point Jacobi 法を用いた。なお、仮想境界処理の効果を見るために $r_0 = 24h$ の場合の結果も合わせて求め、これらと比較した。また、以下では $n_h = 2$ の結果を示すが、 $n_h = 3$ でも結果はほぼ同一であったことを付け加えておく。

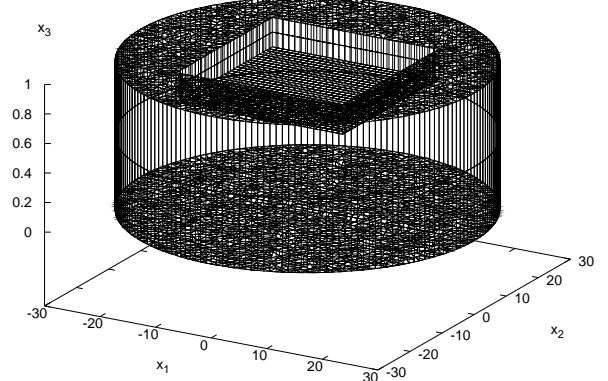


Fig. 2 Mesh

Fig.3 には求められた S_1 上の $|\Phi|$ を示した。Fig.4 に示した同じ量を $r_0 = 24h$ として求めた結果と比較して、殆んど同じ結果が得られていることがわかる。Fig.5 には、 S_2 上の $0 < x_2 < h$ の範囲の点における Φ の実部を、Fig.6 には同じ量の虚部を plot した。Fig.2 からわかるように、要素形状が不整形であるので、これらの点は完全には一直線上には並んでいないが、記号 \times で示した $r_0 = 30h$ の結果は $+$ で示した $r_0 = 24h$ の結果と自然につながり、仮想境界の処理が適切に行なわれていることがわかる。最後に Fig.7 に GMRES の繰り返し回数と相対誤差の関係を示した。同図は $r_0 = 30h$ の場合を示している。領域形状が非常に扁平である事を考えると収束は必ずしも悪いとは言えないが、今後、より良好な左前処理行列を開発することが望ましいと言えよう。

5. 結言

本報では水の波の問題を通常の Laplace 方程式の積分方程式法で解く場合の計算量の少ない放射条件の取り扱いとして、null-field equation を FFT と組み合わせて用いる手法を検討した。数値解が仮想境界の位置に左右されない事を検証することにより手法の妥当性を確かめることが出来た。しかし、今後提案する手法と境界積分方程式の高速解法との組み合わせを検討する際には、連立方程式の解法の収束性をさらに改善するべきであろう。なお、水の波の問題を扱うきっかけを与えていただいた京都大学工学研究科の渡邊英一先生、宇都宮智昭先生に謝意を表する。

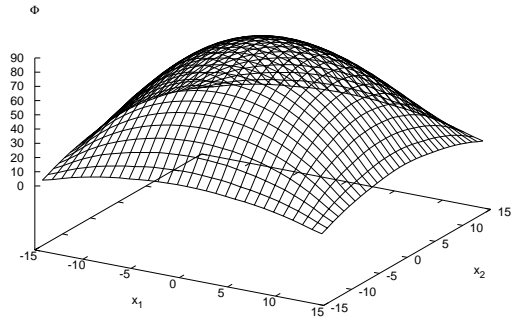


Fig. 3 $|\Phi|$ obtained with $r_0 = 30h$.

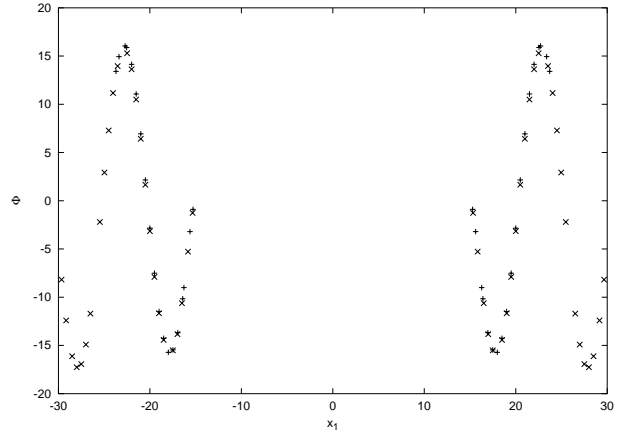


Fig. 5 $\text{Re } \Phi$. \times : $r_0 = 30h$, $+$: $r_0 = 24h$

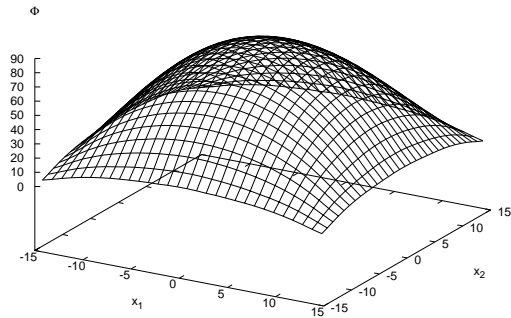


Fig. 4 $|\Phi|$ obtained with $r_0 = 24h$.

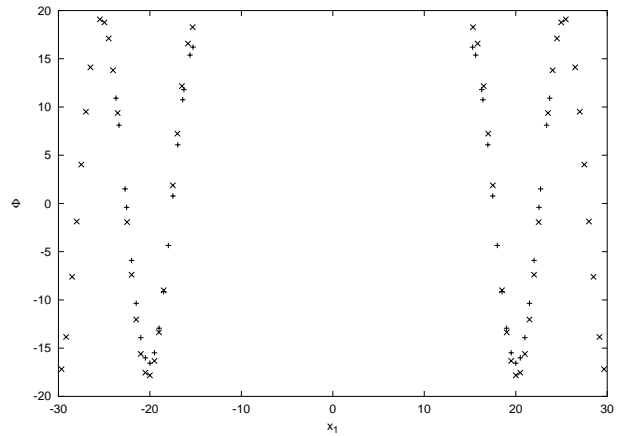


Fig. 6 $\text{Im } \Phi$. \times : $r_0 = 30h$, $+$: $r_0 = 24h$

- (1) J.N. Newman, Algorithms for the free-surface Green function, *J. Eng. Math*, 19, 57–67, 1985
- (2) T. Utsunomiya, E. Watanabe and N. Nishimura, Fast multipole algorithm for wave diffraction/radiation problems and its application to VLFS in variable water depth and topography, to appear in *Proc. OMAE'01*, 2001
- (3) T. Korsmeyer, T. Klemas, J. White and J. Phillips, Fast hydrodynamic analysis of large offshore structures, *Proc. 9th Int. Offshore & Polar Eng. Conf.*, 27–34, 1999
- (4) 瀬戸 秀幸, 直接ブロック帯行列化アルゴリズムによる浅海波力の境界要素解析, *境界要素法論文集* 17, 81–86, 2000
- (5) M.M. Yuen and F.P. Chau, A hybrid integral equation method for wave forces on three-dimensional offshore structures, *J. Offshore Mech. Arc. Eng.*, 109, 229–236, 1987
- (6) P.A. Martin, On the null-field equations for water-wave radiation problems, *J. Fluid Mech.*, 113, 315–332, 1981

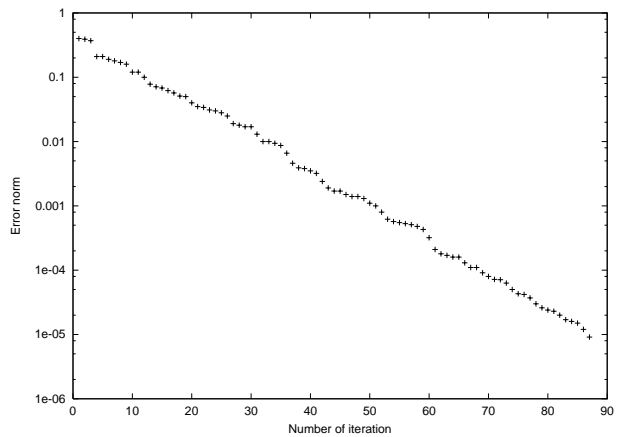


Fig. 7 Convergence