

2次元無限領域の Laplace 方程式に対する D-N 交代法の人工境界決定法

METHOD TO DETERMINE AN ARTIFICIAL BOUNDARY FOR THE DIRICHLET-NEUMANN
ALTERNATING METHOD OF THE LAPLACE EQUATION IN TWO DIMENSIONAL
UNBOUNDED DOMAIN

林 圭佐¹⁾

Keisuke HAYASHI

1) 茨城大学大学院理工学研究科 (〒310-8512 水戸市文京 2-1-1, E-mail: ghayashi@mcs.ibaraki.ac.jp)

The purpose of this paper is to consider the location of an artificial boundary for the Dirichlet-Neumann alternating method of the Laplace equation in two dimensional unbounded domain. We examine numerical properties of the Dirichlet-Neumann alternating method that is one of the domain decomposition methods for partial differential equations in unbounded domain. The artificial boundary decomposes the external domain Ω into a bounded subdomain Ω_1 and an external subdomain Ω_2 outside Ω_1 . The boundary value problems in domains Ω_1 and Ω_2 are indirectly combined by the Dirichlet-Neumann map on the artificial boundary. The finite element and the boundary element methods are applied to the boundary value problems in domains Ω_1 and Ω_2 respectively. Numerical solutions by our method are compared to the exact solution. A numerical example shows that the error of numerical solutions depends on the radius of the artificial boundary.

Key Words: Dirichlet-Neumann alternating method, Domain decomposition, Laplace equation

1. はじめに

無限領域問題は工学上, よく遭遇する問題の一つである. これまでも, 十分大きな有界領域を取り有界領域における問題として解く方法⁽¹⁾, 仮想的な境界を与え, 仮想境界上で外部 Steklov 作用素を用いる方法⁽²⁾等が行われてきている.

本報では, 無限領域問題への領域分割法を用いたアプローチについて考察する.

区分的に滑らかな単純閉曲線が与えられ, その外部の領域において定められた偏微分方程式の境界値問題の解を求めることを考える. さらに, 区分的に滑らかな単純閉曲線を問題領域内に与え, 互いに重複部分の無い有界な領域と非有界な領域の2つに, 問題領域を分割する. 分割後の各領域における境界値問題を交互に繰り返し解き, 両領域に共通な境界上におけるデータが一致するようにして, もとの問題の解を求める. この手法は Dirichlet-Neumann 交代法 (D-N 交代法) と呼ばれる⁽³⁾.

また, 問題領域を分割した閉曲線を, もともとの問題には存在しておらず, 解を得る過程で人工的に与えられた境界であることから, 人工境界と呼ぶ. 人工境界を適切に与える研

究の第1段階として, 真の解の分かっている問題: 単位円盤の外側の領域における Laplace 方程式の Dirichlet 問題を取り上げる.

D-N 交代法において人工境界の取り方について, これまで積極的な議論はなされてこなかった. そこで, 人工境界の与え方として, Level set method⁽⁴⁾に発想を得, 与えられた境界を外向き法線方向に膨張させて与えることを考え, 人工境界の大きさに対する D-N 交代法の数値解の精度を検討する.

2. 問題

直交座標 (x, y) をもつ平面 \mathbf{R}^2 上の単位円周を Γ , その外部領域を Ω とする (Fig. 1).

次の Laplace 方程式の境界値問題を解く.

問題 1 与えられた \bar{u} に対して, 以下を満たす u を求めよ:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= \bar{u} && \text{on } \Gamma, \\ u &= O(1) && \text{as } r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

ただし, (r, θ) は極座標表示で $x = r \sin \theta, y = r \cos \theta$ とする.

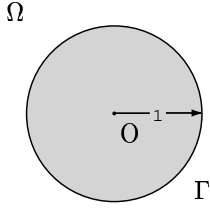


Fig. 1 Problem 1

3. Dirichlet-Neumann 交代法

前節で設定した問題 1 を数値的に解くための手法について検討する.

人工境界 Γ_0 を与え, 外部領域 Ω を有界領域 Ω_1 と残りの非有界領域 Ω_2 に分割し, D-N 法を用いて, 有界領域 Ω_1 内の解を求めることにする (Fig. 2).

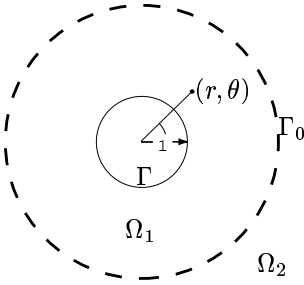


Fig. 2 Domain decomposition

人工境界 Γ_0 上のベクトル $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ をそれぞれ領域 Ω_1, Ω_2 に対する外向き単位法線ベクトルとする.

問題 1 の解を求めるため, 以下の D-N 法のアルゴリズムを考える⁽⁵⁾:

Step 1. 人工境界 Γ_0 上の Dirichlet データの初期推定境界値 $\lambda^{(0)}$ を与え, $k := 0$ とする.

Step 2. 外部領域 Ω_2 における Laplace 方程式の外部境界値問題を解く:

$$\begin{aligned} -\Delta u_2^{(k)} &= 0 && \text{in } \Omega_2, \\ u_2^{(k)} &= \lambda^{(k)} - \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} \lambda^{(k)} d\Gamma && \text{on } \Gamma_0, \\ u_2^{(k)} &= O(r^{-1}) && \text{as } r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Step 3. 有界領域 Ω_1 における Laplace 方程式の混合境界値問題を解く:

$$\begin{aligned} -\Delta u_1^{(k)} &= 0 && \text{in } \Omega_1, \\ \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial n_1} &= -\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial n_2} && \text{on } \Gamma_0, \\ u_1^{(k)} &= \bar{u} && \text{on } \Gamma. \end{aligned}$$

Step 4. 停止条件判定: 小さい数 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\text{もし } \frac{\|\lambda^{(k)} - u_1^{(k)}\|_{L^2}}{|\Gamma_0|} < \varepsilon \text{ ならば計算を停止する.}$$

Step 5. 境界値を更新する:

$$\lambda^{(k+1)} = \alpha_k u_1^{(k)} + (1 - \alpha_k) \lambda^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_0.$$

ここで, パラメータ α_k は適切に選ばれた実数である.

Step 6. $k := k + 1$ とし, Step 2 へ戻る.

この D-N 法について, 以下の性質が成り立つことが知られている⁽⁶⁾:

命題 (Yu, 1995) もし $0 < \inf_k \alpha_k \leq \sup_k \alpha_k < 1$ を満たすならば, $\lambda^{(0)}$ の選び方によらず, D-N 法により求められる $u_1^{(k)}$ は問題 1 の解 $u|_{\Omega_1}$ に $L^2(\Omega_1)$ ノルムの意味で収束する.

特に, 境界 Γ と Γ_0 がそれぞれ原点を中心とする半径 R と R_0 の円のとき, 次の系が成り立つ.

系 (Yu, 1995) 収束が最も速い意味で最適なパラメータ α_{opt} は

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{R_0^2 + R^2}{2R_0^2 + R^2}$$

と与えられる.

数値計算の際には, Step 2 の外部境界値問題を 1 次要素を用いた境界要素法を用いて解く. Step 3 の混合境界値問題を三角形 1 次要素を用いた有限要素法で解く. ただし, Γ_0 上の境界要素分割を Step 3 における領域 Ω_1 の有限要素分割と整合するようにした.

4. 人工境界

本報では人工境界の取り方の指針として, Level set method を参考にした方法を考える: 与えられた境界 Γ を外向き法線方向に速度 $F(\kappa) = 1 - \epsilon\kappa$ で膨張させる. ここで, $\epsilon > 0$ は定数, κ は曲線の曲率である. 時刻 $t > 0$ を決めた時に得られる曲線を人工境界 Γ_0 として採用する.

ただし, 人工境界を設定するにあたり, 必ずしも正確に曲線の動きを計算する必要はない. そこで擬似的に計算する手続きを提案する:

Step i. 境界 Γ 上に, 間隔がほぼ ω となるように節点 $\mathbf{x}_i^{(0)} = (x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$, $i = 1, 2, \dots, n_0$ を取り, $t = 0$ とする.

Step ii. 各節点を法線方向に動かす:

$$\mathbf{x}_i^{(t)} = \mathbf{x}_i^{(0)} + (1 - \epsilon\kappa)\omega \mathbf{n}_i^{(t)}$$

Step iii. 移動後の節点 $\{\mathbf{x}_i^{(t)}\}$ を標本点とした 3 次スプライン補間⁽⁷⁾を用いて時刻 $t+1$ における曲線を求め, 間隔がほぼ ω となるように節点 $\{\mathbf{x}_i^{(t+1)}\}$ を取りなおす.

Step iv. $t = t + 1$ として Step ii に行く.

Step ii. において, 節点 $\mathbf{x}_i^{(t)}$ における外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}_i^{(k)}$ と曲率 κ は, 注目している節点 \mathbf{x}_i と隣接する節点 $\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}$ それぞれを結ぶ線分を用いて次のよ

うに計算する. ただし, $\mathbf{x}_{n_{i+1}} = \mathbf{x}_1$ とする.

$$\mathbf{n}_i^{(k)} = 0.5 \frac{(y_i - y_{i-1}, -x_i + x_{i-1})}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|} + 0.5 \frac{(y_{i+1} - y_i, -x_{i+1} + x_i)}{\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|},$$

$$\kappa = \frac{(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)}{\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|} - \frac{(x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1})}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|}$$

$$\div \frac{\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|}{2}$$

このようにして人工境界を設定すると, 曲率に応じた節点の移動と Step iii における 3 次スプラインによる平滑化により, 人工境界としてなめらかな形が得られる. また, 計算過程における節点 $\{\mathbf{x}_i^{(t+1)}\}$ を有界領域 Ω_1 の三角形分割の節点として利用すると, 大きさの揃った三角形分割が作れる. 一辺 0.5 の正方形に対して $\epsilon = 0.5, \omega = 0.1$ を与え, 上に掲げた手続きを適用した $t = 10$ まで計算した時の境界を Fig. 3 に示す. 各三角形要素について, 最大長辺に対する三角形の高さの割合は 10% ~ 43% になっており, 正則な分割である.

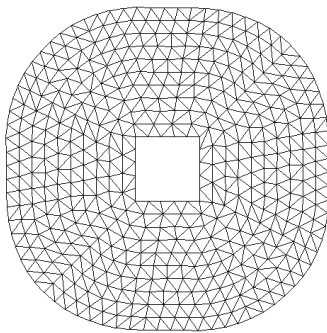


Fig. 3 Artificial boundary and trianglation

5. 数値実験

前節までに紹介した手法を用いて, Laplace 方程式を数値的に解き, 真の解と比較することで, 人工境界の与え方に対する精度を検討する.

単位円盤の外部における Laplace 方程式を考える. このとき Γ, Ω はそれぞれ, $\Gamma = \{(r, \theta) | r = 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \Omega = \{(r, \theta) | r > 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ となる.

Γ 上の Dirichlet データを $u|_{\Gamma} = \cos \theta$ で与え, 無限遠方における u の振る舞いを

$$u = O(r^{-1}) \quad \text{as } r \rightarrow +\infty.$$

で指定する.

解くべき問題は次のようになる.

問題 2

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u &= \cos \theta & \text{on } \Gamma, \\ u &= O(r^{-1}) & \text{as } r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

人工境界として第 4 節に示した計算方法を用い, パラメータ $\epsilon = 0.5, \omega = 0.2$ を与え, 時刻 $t = 10$ まで膨張させた曲線を取った場合の人工境界及び, 三角形分割したメッシュを Fig. 4 に示す.

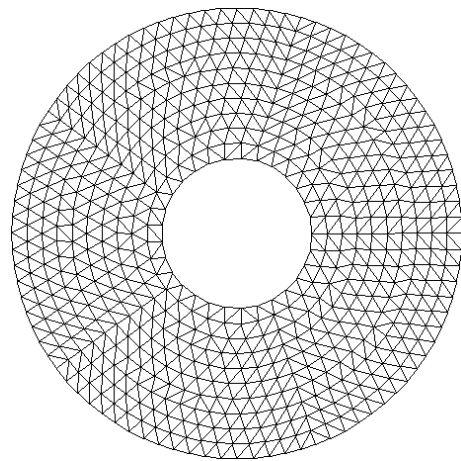


Fig. 4 Triangulation $\Omega_1(10)$

人工境界が原点を中心とした半径 3 の円周にほぼ一致するので, 系に基づきパラメータを $\alpha_k = \alpha_{\text{opt}} = (3^2 + 1)/(2 \times 3^2 + 1) \simeq 0.52$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) に取る. 収束判定数 $\epsilon = 10^{-5}$ を取り, 初期推定値として, 人工境界 Γ_0 に沿って $\lambda^{(0)} = 0$ を与える.

このとき D-N 交代法は 5 回の反復で停止した. 数値解の等値線を Fig. 5 に示す. 真の解 $u = \frac{1}{r} \cos \theta$ にほぼ一致する解が得られている.

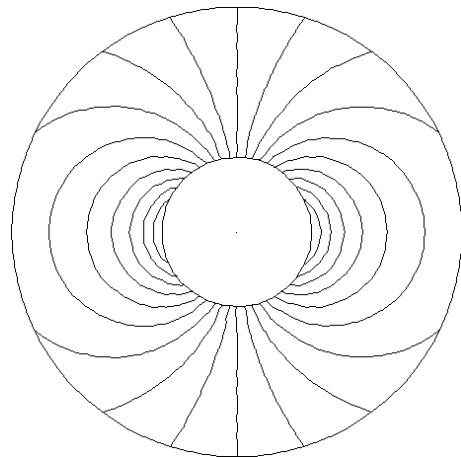


Fig. 5 Numerical Solution $u_1^{(5)}$ in $\Omega_1(10)$ ($-1 \leq u_1^{(5)} \leq 1$)

次に, 人工境界の大きさを変化させて計算し, 得られた数値解の精度を比較する. パラメータ $\epsilon = 0.5, \omega = 0.2$ を与え, 時刻 $t = 5$ から $t = 40$ までは 1 刻み $t = 40$ から $t = 80$ までの間は 5 刻みの時刻で得られる人工境界を用いた.

パラメータ α_k は系から得られる α_{opt} を用い. 人工境界の大きさに関わらず, 収束判定数を $\epsilon = 10^{-5}$, 初期推定値として, 人工境界 Γ_0 に沿って $\lambda^{(0)} = 0$ を選んだ.

横軸に人工境界の半径, 縦軸に数値解の誤差の 2 ノルムと L_2 ノルムを取り, 両対数グラフで Fig. 6 に示す. 但し, 2 ノルムは領域分割の節点数で割った節点あたりの量, L_2 ノルムは有界領域 Ω_1 の面積で割った単位面積あたりの量として正規化した. 誤差に小さな増減の変動はあるものの, 人

工境界を大きくすると誤差が減る傾向にあることが分かる。

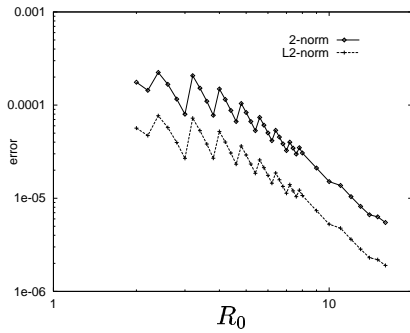


Fig. 6 Error v.s. radii

6. おわりに

Laplace 方程式の外部境界値問題に対する数値解法の一つである D-N 法の人工境界の取り方と、その大きさに対する数値解の精度を数値的に考察した。

D-N 法は、無限領域を人工境界で互いに重複部分の無い有界な領域と非有界な領域の 2 つに分割し、それぞれの領域について交互に解きながら反復し、人工境界上の境界値を介して、分割された境界値問題を間接的に結合する手法である。

2 つの領域における問題を、外部領域 Ω_2 の問題は境界要素法で、有界領域 Ω_1 の問題は有限要素法でそれぞれ解いた。利用した数値解法は、偏微分方程式の標準的な解法で、容易に Laplace 方程式の外部問題に適用可能である。

人工境界として、Level set method を用いて与えられた境界 Γ を外向き法線方向に膨張させての与える事を考えた。擬似的では有るが、数値的に人工境界を求める方法を提案した。この方法を用いると、滑らかな人工境界が求められるほか、人工境界を求める過程で大きさがほぼ一定の三角形分割が得られる。

次に人工境界の大きさを変化させた時の D-N 法の数値解の精度を検証した。

数値解の誤差を計る時、ノルムの定義域が異なるため、2 ノルムでは三角形分割の節点数で割り、 L_2 ノルムでは領域 Ω_1 の面積で割ることで正規化を行った。D-N 法の収束判定 Step 4 における、 L_2 ノルムについても人工境界 Γ_0 の長さで割り正規化して計算を行った。

正規化されたノルムで計った誤差の対数と、人工境界の半径の対数との間にほぼ線形の関係が有ることが分かった。

人工境界を大きく取ると数値解の誤差が小さくなる傾向が観察された。計算コストに見合った範囲で人工境界を大きく取るべきであることが、計算精度の面から示唆される。

本報で提案した人工境界の膨張法は、同時に三角形分割を行なう事が可能であり、計算可能な規模の限界の近くまで人工境界を大きく取ることができる。

参考文献

- (1) 数値流体力学編集委員会 (編): 圧縮性流体解析 数値流体力学シリーズ 2, (1995), 東京大学出版会.
- (2) 牛島照夫, 横松大作, 網代 敦: 外部ポアソン問題の一致数値解法とその誤差評価, 日本数学会応用数学分科会予稿集, (1992), pp. 167-170.
- (3) Yu, D.: Discretization of non-overlapping domain decomposition method for unbounded domains and its convergence, Chinese J. Num. Math. & Appl., **18**, 4(1996), pp. 93-102.
- (4) J. A. Sethian: Level Set Methods and Fast Marching Methods, (1999), Cambridge University Press.
- (5) 林 圭佐: Poisson 方程式の二次元無限領域に対する D-N 交代法, 日本計算工学会論文集, **2**(2000), pp. 205-212.
- (6) Yu, D., Xue, W., and Huang, H.: A Dirichlet-Neumann alternating method in infinite domain: Algorithm and convergence analysis, Research Report ICM-95-31 Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, (1995), Chinese Academy of Sciences.
- (7) 市田浩三, 吉本富士市: 『スプライン関数とその応用』, シリーズ新しい応用の数学 20, (1979), 教育出版.