

マルチグリッド法を前処理に用いた GMRES 法の wavelet BEM への適用

APPLICATION OF MULTIGRID PRECONDITIONED GMRES METHOD TO WAVELET BEM

林 志保¹⁾, 阿部和久²⁾, 紅露一寛³⁾

Shiho HAYASHI, Kazuhisa ABE and Kazuhiro KORO

¹⁾新潟大学大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail:f00g533a@mail.cc.niigata-u.ac.jp)

²⁾新潟大学工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)

³⁾新潟大学大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail:f99m912c@mail.cc.niigata-u.ac.jp)

A multigrid enhanced GMRES method is applied to wavelet BEM. Since the preconditioner of GMRES algorithm can be non-constant, the multigrid algorithm serves to enhance the GMRES method as a preconditioner. The wavelet basis has a hierarchical structure. Hence discretizations with various resolution levels can be constructed readily in the wavelet BEM. Therefore the multigrid algorithm is suitable for wavelet BEM. In this study, the GMRES method is used as an iterative method and the coarse grid correction is employed in the multigrid algorithm. Through numerical experiments, the performance of the developed algorithm is examined. It is found that, though the normal GMRES method is superior to the present method in the examples, the multigrid preconditioner may enhance the GMRES method for severely ill-conditioned cases.

Key Words : wavelet BEM, multigrid method, GMRES method, non-constant preconditioner

1. はじめに

境界要素法は、解析対象の境界のみを離散化すればよいため、領域型解法に比べ、少ない自由度の下で同等精度の解を得ることができる。しかし、境界要素方程式の係数行列は密行列であり、多くの記憶容量と求解時間とを要するため大規模問題への適用は困難であると考えられてきた。当該問題の解決策の一つとして、境界要素解の関数基底に wavelet 基底を用いる wavelet BEM¹⁾ が挙げられる。Wavelet の特徴である関数の局所性とゼロモーメント性により境界要素の係数行列成分の距離減衰性が向上し、小さな値の成分をゼロに置き換えることで、精度を損なうことなく疎行列化を図ることができる。このように wavelet BEM ではスパースな行列を扱うので、連立方程式の解法には反復法が用いられる。

反復法としては、CGS 法²⁾、Bi-CG 法³⁾、GMRES 法⁴⁾などが挙げられる。中でも GMRES 法は残差ノルムが増加しないという特徴があり、安定性に優れている。また、GMRES 法は、非定常な前処理をアルゴリズムの枠組みに組み込むことができ、そのパフォーマンスは各反復において最も適した前処理を選択する事で向上させることができる⁵⁾。この可変な前処理を持つ GMRES 法の前処理にマルチグリッド法を用いた MG-GMRES 法の領域型解法への適用が、FEM を対象に Feng ら⁶⁾により検討されている。

マルチグリッド法は、反復解の収束を加速する一手法である。反復法における解は、対応する作用素の固有値

が小さな値を持っている固有モード成分から先に収束する⁷⁾。その結果、一般に波長の長い成分の収束性が低いものとなる。そこで、解の長波長成分を分割の粗いメッシュで求め、反復解の収束性の向上を図ろうとするのが基本的考え方である。マルチグリッド法を wavelet BEM に適用する場合は、wavelet の持つ階層構造により、マルチグリッド法において必要となる、異なる解像度のメッシュへの射影や補間の手間が省け効率の良い求解法が構成できる⁸⁾。

本研究では、wavelet BEM を対象に、MG-GMRES 法のアルゴリズムを構成し、そのパフォーマンスを検討する。以下では、wavelet BEM, MG-GMRES 法、本研究で用いるマルチグリッドアルゴリズムについて述べ、最後に解析例を通して MG-GMRES 法の wavelet BEM への適用性について調べる。

なお、積分方程式法に対するマルチグリッド法の適用は、これまで第 2 種積分方程式を対象になされてお⁹⁾、第 1 種積分方程式への適用は困難であるとされている¹⁰⁾。したがって、本研究においても第 2 種積分方程式を対象に議論を進める。

2. Wavelet BEM

2.1 Wavelet 基底

Wavelet 基底は scaling 関数 $\phi(x)$ と wavelet $\psi(x)$ から構成される。関数 $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ が、 $\phi(2x)$ の平行移

動で与えられる関数の一次結合で表せるものとする。

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

このとき、 $\phi(x)$ を scaling 関数という。

$\phi(x)$ の平行移動で張られる部分空間 $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を V_0 とし、解像度 m の部分空間 V_m の基底を $\phi_{m,k}(x)$ とし、次式で定義する。

$$\phi_{m,k}(x) := 2^{\frac{m}{2}} \phi(2^m x - k) \quad (m, k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

V_m は V_0 におけるメッシュをさらに 2^m 等分割して得られるメッシュ上の離散解に対応している。

V_m をそれより 1 つ解像度の低い部分空間 V_{m-1} とその直交補空間 W_{m-1} とに分解する。

$$V_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1} \quad (3)$$

W_m における基底を $\psi_{m,k}(x)$ とし次式で定義する。

$$\psi_{m,k}(x) := 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - k) \quad (m, k \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

このとき、関数 $\psi(x)$ を wavelet という。

式 (3) より次式を得る。

$$V_m = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_{m-1} \quad (5)$$

式 (5) は、解像度 m のメッシュ上で定義される関数は、 V_0 に対応した粗いメッシュにおける関数と、各解像度での補正関数との和に分解できることを意味しており、wavelet 基底を用いれば近似解が階層的に離散化できることを示している。

2.2 Haar wavelet

本研究では wavelet BEM の関数基底の具体例として Haar wavelet を用いる。scaling 関数 $\phi(x)$ と wavelet $\psi(x)$ は次式で与えられる。

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \quad (7)$$

式 (6),(7) で定義される Haar scaling 関数と wavelet を Fig.1 に示す。Fig.1 のように、Haar scaling 関数は区間一定要素の関数基底に一致する。

2.3 Wavelet BEM

二次元ポテンシャル問題を考える。例えば、直接法により定式化すると、次の境界積分方程式を得る。

$$c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y})d\Gamma_y = 0 \quad (\mathbf{x} \text{ on } \Gamma) \quad (8)$$

ここで、 Γ は対象としている領域の境界、 u はポテンシャル、 q は流速、 u^*, q^* はそれぞれ u, q の基本解、 $c(\mathbf{x})$ はソース点 \mathbf{x} における境界の滑らかさに依存した係数であ

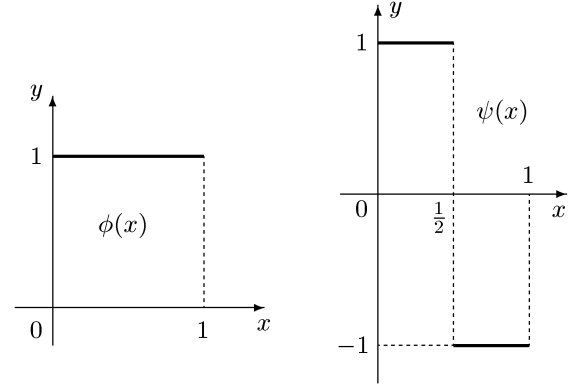


Fig. 1 Haar scaling function $\phi(x)$ and wavelet $\psi(x)$

る。また、前述のように、本研究では第 2 種積分方程式を対象としており、式 (8) は Neumann 問題に対し第 2 種積分方程式を与える。

以降においては、 Γ 上で定義された wavelet 基底 $\phi_{0,1}, \psi_{m,k}$ 等を解像度 (階層) 毎に順に並べ、それらをまとめて w_i ($i = 1, \dots, N$) と表す。このとき、ポテンシャル $u(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})$ の近似解 \tilde{u}, \tilde{q} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \hat{u}_{0,1}\phi_{0,1} + \sum_{m=0}^M \sum_{k=1}^{2^m} \tilde{u}_{m,k}\psi_{m,k} = \sum_i u_i w_i \\ \tilde{q} &= \hat{q}_{0,1}\phi_{0,1} + \sum_{m=0}^M \sum_{k=1}^{2^m} \tilde{q}_{m,k}\psi_{m,k} = \sum_i q_i w_i \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\hat{u}_{0,1}, \hat{q}_{0,1}, \tilde{u}_{m,k}, \tilde{q}_{m,k}$ はそれぞれ $\phi_{0,1}, \psi_{m,k}$ に対する wavelet 係数であり、 u_i, q_i はそれらをまとめて表したものである。また、 M は離散化における最上位 wavelet の階層であり、 N は全自由度である。

式 (9) を u, q の代りに用いると、一般に式 (8) は恒等的には成立せず、残差 r を生ずる。

$$r(\mathbf{x}) := c(\mathbf{x})\tilde{u}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{u}(\mathbf{y})d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{q}(\mathbf{y})d\Gamma_y \quad (10)$$

Galerkin 法による境界要素方程式は次式により与えられる。

$$\int_{\Gamma} r w_i d\Gamma = 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (11)$$

式 (11) に式 (9)(10) を代入すると、次の境界要素方程式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (12)$$

ここで、 \mathbf{u}, \mathbf{q} は \tilde{u}, \tilde{q} の wavelet 係数であり、 Γ が殆ど全ての点で滑らかであるとすれば、 \mathbf{H}, \mathbf{G} は次の係数行列により与えられる。

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2} w_i w_j d\Gamma + \iint_{\Gamma} q^* w_i w_j d\Gamma^2, \\ g_{ij} &= \iint_{\Gamma} u^* w_i w_j d\Gamma^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Neumann 問題に対しては \mathbf{H} が係数行列となる。

3. MG-GMRES 法

3.1 前処理付き GMRES 法

GMRES 法は Arnoldi 原理に基づいて構成される⁴⁾. 次のような連立方程式を解くことを考える.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (14)$$

前処理を施す場合, 連立方程式は以下のようになる.

$$\mathbf{AM}^{-1}(\mathbf{Mx}) = \mathbf{b} \quad (15)$$

ここで, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は係数行列, \mathbf{b} は既知ベクトル, \mathbf{x} は未知ベクトルである. また, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は前処理行列である.

GMRES 法のアルゴリズムでは, まず初期値 \mathbf{x}_0 に対し, 初期残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$ を計算する. そして, 第 j ($j = 1, 2, \dots, N$) 回目の反復過程までに Arnoldi 原理により直交基底 $\{\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, j\}$ を作る. その時, 式 (14) の近似解は次式で表される.

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_j \mathbf{y}_j \quad (16)$$

ここで, $\mathbf{V}_j = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\}$, また \mathbf{y}_j は次の残差ノルム ε_j についての最小条件の解である.

$$\varepsilon_j = \min_{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^j} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_j \mathbf{y}_j)\| \quad (17)$$

GMRES 法は最小残差ノルムをもつ解に到達する.

3.2 可変な前処理を持つ GMRES 法

j 番目の前処理ステップを次のように表す.

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{v}_j \quad (18)$$

以下に可変な前処理をもつ GMRES(k) 法のアルゴリズム⁶⁾を記す.

可変な前処理を持つ GMRES(k) 法

1. 初期値 \mathbf{x}_0 とリスタート値 k を選ぶ.
2. Arnoldi 原理を適用する.
 - (a) $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$, $\beta_1 = \|\mathbf{r}_0\|$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0/\beta_1$
 - (b) For $j = 1, \dots, k$ Do
 - i. $\mathbf{z}_j = \mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{v}_j$
 - ii. $\mathbf{w} = \mathbf{Az}_j$
 - iii. For $i = 1, \dots, j$
Do : $h_{i,j} = \mathbf{w}^T \mathbf{v}_i$, $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} - h_{i,j} \mathbf{v}_i$: End Do
 - iv. $\beta_{j+1} = h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}\|$, $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{w}/\beta_{j+1}$
 - v. if $\varepsilon_j \leq \varepsilon$ (収束判定値), goto (c)
 - End Do
 - (c) $\mathbf{Z}_j = [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j]$
3. $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + \mathbf{Z}_j \mathbf{y}_j$ により近似解を計算する.
ここで, \mathbf{y}_j は $\varepsilon_j = \min_{\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^j} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{Z}_j \mathbf{y}_j)\|$ の解である.
4. $\varepsilon_j \leq \varepsilon$ なら計算を止め, それ以外なら $\mathbf{x}_0 \leftarrow \mathbf{x}_j$ とし 2.へ (リスタート).

GMRES 法は, 反復回毎に新たな直交基底 \mathbf{v}_j を追加して行くので, メモリ負荷が他の解法に比べ大きい. そのため k 回の反復過程毎に, 直交基底 \mathbf{v}_k を更新するリスタート付き GMRES(k) 法が提案されている. しかし, 一般にリスタート値 k が小さい程 GMRES 法の収束性は低下する.

一方, 可変な前処理を持つ GMRES 法は, 従来の GMRES 法と比べ計算コストは変わらないが, $\mathbf{z}_j, \mathbf{v}_j$ の二つのベクトルを追加保存して行く必要があり, 従来法の倍の記憶容量を必要とする. しかし, 各ステップで最も適した前処理を選ぶことで収束性が向上すれば, 反復回数は減少することとなり, パフォーマンスを向上させる可能性がある.

3.3 MG-GMRES 法

可変な前処理を持つ GMRES 法での前処理ステップの式 (18) を変形すると

$$\mathbf{M}_j \mathbf{z}_j = \mathbf{v}_j \quad (19)$$

となる. ここで更に \mathbf{M}_j の代りに係数行列 \mathbf{A} を使えば, 次式を得る.

$$\mathbf{Az}_j = \mathbf{v}_j \quad (20)$$

式 (20) を完全に解くと, 完璧な前処理となるが, これは結局式 (14) を解いたこととなる.

式 (20) をある要求精度の下で近似的に解く場合, それは \mathbf{A} の良い近似行列 \mathbf{M}_j に対する式 (19) の解を求めたことになり, 式 (18) の実行に一致する. これは間接的に有効な前処理行列 \mathbf{M}_j を得たことに対応する. Feng ら⁶⁾ は FEM を対象に, 式 (20) の近似解法にマルチグリッド法を用いた MG-GMRES 法の適用を試みた.

4. マルチグリッド法

Jacobi 法や Gauss-Seidel 法など初等的な反復法は平滑化の効果を持ち, 反復解は短波長成分ほど速く収束し, 長い波長の成分ほど収束が遅い. マルチグリッド法は, この長い波長の成分を粗いメッシュ上での解により補正または近似することで反復解の収束を加速する方法である. マルチグリッド法のサイクルパターンには, 以降に示すように様々なバージョンが用いられているが, それらは次に述べる 2 つの手順の組み合わせで作られている. ここでは, wavelet BEM に対応したマルチグリッドアルゴリズム⁸⁾について述べる.

4.1 Coarse grid correction と nested iteration

Wavelet BEM における未知量はポテンシャルと流速の wavelet 係数である. そのため, 連立方程式, およびその解は初めから各解像度に対応した階層 wavelet の成分に分解されている. なお, ある解像度の部分空間 V_m における自由度が N_m で与えられているとき, 式 (3) に定義した V_m の部分空間 V_{m-1} と W_{m-1} とにおける自由度はそれぞれ $N_m/2$ となる. 解像度 M のメッシュにお

ける連立方程式の係数行列を \mathbf{A}^M 、ベクトルを $\mathbf{u}^M, \mathbf{b}^M$ と表すと、境界要素方程式は次式のように与えられる。

$$\mathbf{A}^M \mathbf{u}^M = \mathbf{b}^M \quad (21)$$

\mathbf{u}^M は解像度 $M-1$ の成分 \mathbf{u}^{M-1} と W_{M-1} に対応した成分 \mathbf{u}_2^M に二分され、次式のように表される。

$$\mathbf{u}^M = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{M-1} \\ \mathbf{u}_2^M \end{Bmatrix} \quad (22)$$

同様に \mathbf{A}^M も次のように表すことができる。

$$\mathbf{A}^M = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{M-1} & \mathbf{A}_{12}^M \\ \mathbf{A}_{21}^M & \mathbf{A}_{22}^M \end{bmatrix} \quad (23)$$

式(22),(23)のように wavelet BEM では、解像度 M でのベクトルと行列における部分ベクトル、部分行列の中に、解像度 $M-1$ のベクトルと行列を含んでいる。以下では、この特徴を考慮した coarse grid correction と nested iteration の各過程を構成する。

a) Coarse grid correction 解像度の高いメッシュに対して反復法を適用し、その反復解における長い波長成分の誤差を、より解像度の低いメッシュにおける解に基づき補正する過程を coarse grid correction という。まず、式(21)に反復法を ν_1 回適用し、 \mathbf{u}^M の近似解 \mathbf{v}^M を求める。なお、式(22)のように、 \mathbf{v}^M は \mathbf{v}^{M-1} とそれ以外の成分より構成されている。

$$\mathbf{v}^M = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{v}_2^M \end{Bmatrix} \quad (24)$$

ここで、 \mathbf{v}_2^M は \mathbf{v}^M の中で最も波長の短い最上位の wavelet に対応している。したがって、 ν_1 回の反復法を適用することにより、 \mathbf{v}_2^M の成分は概ね正解に収束しているものと考えられ、 $\mathbf{v}_2^M \simeq \mathbf{u}_2^M$ と見なす。このとき、解像度 M での境界要素方程式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{M-1} & \mathbf{A}_{12}^M \\ \mathbf{A}_{21}^M & \mathbf{A}_{22}^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{v}_2^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1^M \\ \mathbf{b}_2^M \end{Bmatrix} \quad (25)$$

を展開して次式を得る。

$$\mathbf{A}^{M-1} \mathbf{v}^{M-1} = \mathbf{b}^{M-1}, \quad (\mathbf{b}^{M-1} := \mathbf{b}_1^M - \mathbf{A}_{12}^M \mathbf{v}_2^M) \quad (26)$$

式(26)に反復法または直接法を適用して \mathbf{v}^{M-1} を求める。

次に、式(24)の \mathbf{v}_2^M 、式(26)より求めた \mathbf{v}^{M-1} を用いて近似解 \mathbf{v}^M を再構成する。

$$\mathbf{v}^M \leftarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{v}_2^M \end{Bmatrix} \quad (27)$$

最後に、式(27)で得た \mathbf{v}^M に対し反復法を ν_2 回適用し、 \mathbf{u}^M の反復解を求める。

上のアルゴリズムでは、細かいメッシュから粗いメッシュへの射影は単なるベクトルサイズの縮小により、ま

た、粗いメッシュから細かいメッシュへの補間はベクトルサイズの拡大により実行される。また、各解像度における係数行列は、最も解像度の高いメッシュにおける係数行列内に全て含まれており、別途作成したり保存したりする必要は無い。

b) Nested iteration 最初に解像度の低いメッシュに対して解を求め、それをより解像度の高いメッシュにおける方程式の初期解に用いる過程を nested iteration という。

まず、解像度 M での最上位 wavelet に対応した解ベクトル成分 \mathbf{u}_2^M をゼロとしておく。このとき、式(25)における \mathbf{b}_1^M を \mathbf{b}^{M-1} とおくことで次式を得る。

$$\mathbf{A}^{M-1} \mathbf{u}^{M-1} = \mathbf{b}^{M-1} \quad (28)$$

式(28)に対して反復法を ν_1 回適用し、近似解 \mathbf{v}^{M-1} を求める。

次に、ベクトルサイズを拡大して \mathbf{v}^{M-1} より解像度 M での初期解を作成する。

$$\mathbf{v}^M \leftarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

式(29)を初期解として、解像度 M での方程式に対して反復法を ν_2 回適用し、 \mathbf{u}^M の反復解を求める。

4.2 マルチグリッドアルゴリズム

以上に示した2つの手順を組み合わせることで様々なサイクルパターンのマルチグリッドアルゴリズムを構成することができる。Fig.2において、V-サイクルは coarse grid correction を多数の解像度に対して適用するもので、2つの解像度を対象とした場合のV-サイクルは coarse grid correction に一致する。Sawtooth-サイクルはV-サイクルや次に述べる FMV-サイクルの射影または補間を省略したものである^{8),11)}。なお、FMV-サイクルは coarse grid correction と nested iteration とを組み合わせたものである。

Fig.2 に示したパターン以外にも、W-サイクルや μ -サイクル⁷⁾などが提案されている。

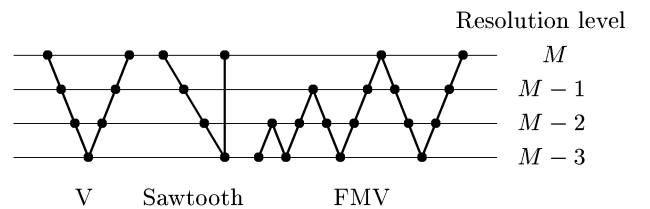


Fig. 2 Multigrid algorithms

4.3 前処理としてのマルチグリッド法

本研究で前処理として用いるマルチグリッドアルゴリズムには、最も単純な coarse grid correction を用いる。また、粗いメッシュとしては解像度が 1, 2 または 3 階層下のものを用いる。その概念図を Fig.3 に示す。

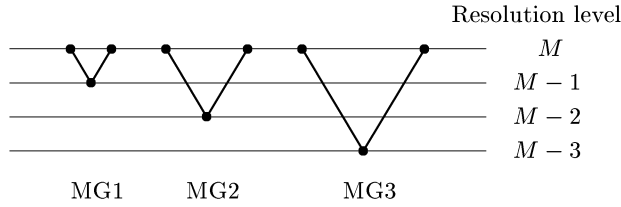


Fig. 3 Coarse grid correction

j 番目の前処理ステップのパフォーマンスを示す reduction factor ρ_j を次式により定義する⁶⁾.

$$\rho_j = \frac{\| \mathbf{v}_j - \mathbf{A}\mathbf{z}_j \|}{\| \mathbf{v}_j \|} = \| \mathbf{v}_j - \mathbf{A}\mathbf{z}_j \| \quad (30)$$

式(18)より, 式(30)における $\mathbf{v}_j - \mathbf{A}\mathbf{z}_j$ は次のように展開できる.

$$\mathbf{v}_j - \mathbf{A}\mathbf{z}_j = \mathbf{v}_j - \mathbf{A}\mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{v}_j \quad (31)$$

したがって, \mathbf{M}_j が \mathbf{A} の良い前処理行列となっていれば, $\mathbf{v}_j \approx \mathbf{A}\mathbf{z}_j$ となっているはずであり, 式(30)の ρ_j は小さな値を示すこととなる.

最初の最上位解像度での反復法の反復回数は1回とし, それ以外では, reduction factor ρ_j による制御 ($\rho_j < \delta < 1$) と反復回数による制御 ((反復回数) $> \mu$) を併用し反復過程の終了判定を行う. なお, δ と μ は事前に設定しておくものとする. また, GMRES 法の収束判定値となる残差ノルム ε_j に対して $\rho_j < 1$ の場合に次のような関係が成り立つことが経験的に知られている⁶⁾.

$$\varepsilon_j \approx \rho_j \varepsilon_{j-1} \quad (32)$$

この関係式より $\rho_j \approx 0.5$ の程度に小さければ, 前処理は良好に機能しているとみなす事が出来る.

5. 解析例に基づく検討

Fig.4 に示す領域の内部 Neumann 問題において, $h = 1.0$ と $h = 0.5$ とした場合を対象に本解法を適用する. 各辺を部分境界とし, 最高階層 $M = 10$ とした. この時の全自由度は $6 \times 2^{11} = 12288$ であり, 紅露, 阿部ら¹²⁾ により構成された切り捨てパラメータの最適決定法に基づいて係数行列の切り捨てと収束判定値の設定とを行っている.

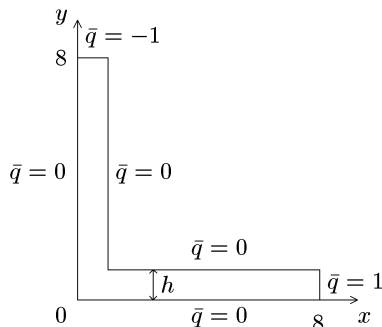


Fig. 4 Analytical conditions

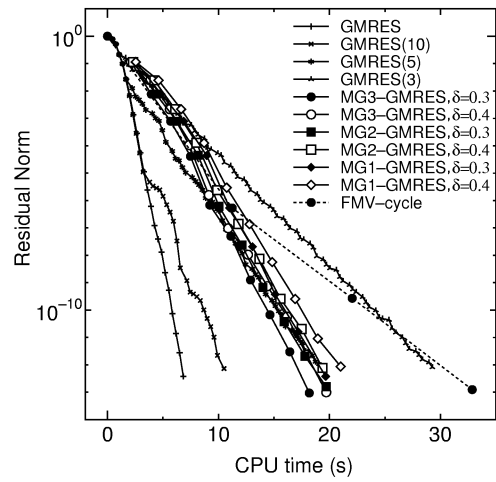


Fig. 5 Performance of various methods for $h = 1.0$

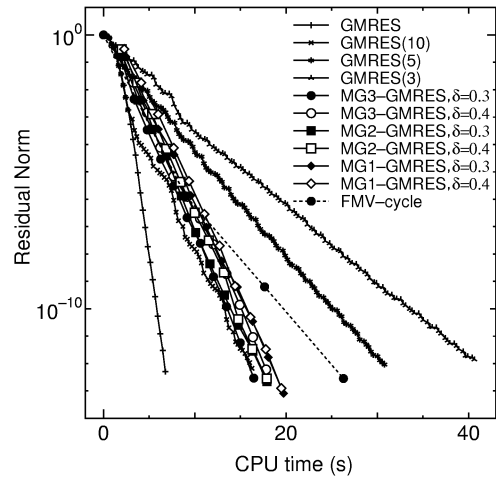


Fig. 6 Performance of various methods for $h = 0.5$

前処理に用いたマルチグリッド法での反復法として GMRES 法を用いた. また, $\delta = 0.3, 0.4$, $\mu = 5$ とし, Fig.3 に示した MG1, MG2, MG3 の 3 パターンのマルチグリッド法を前処理として適用した.

Fig.5, Fig.6 に解析結果を示す. 図中にはリスタート無しの GMRES 法, リスタート付き GMRES 法, GMRES 法と組み合わせた通常のマルチグリッド法の FMV-サイクルの結果も示す.

前処理に用いたマルチグリッド法の階層の違いや, δ の違いによる MG-GMRES 法のパフォーマンスの差異はあまり認められない. また, $h = 1.0, 0.5$ の場合ともに, 前処理に用いたマルチグリッド法の中の GMRES 法は, δ によらず全てのパターンにおいて最上位解像度での反復回数は1回であった. そのため, 前処理でのメモリ負荷は小さいものとなっている.

通常のマルチグリッド法での各解像度での反復回数は2回としており, これは記憶容量の面でリスタート付き GMRES 法のリスタート値2に相当し, MG-GMRES 法と比べ, 通常のマルチグリッド法の方がメモリ負荷は小さ

くなっている。しかし、収束性については MG-GMRES 法の方が良好な結果を示している。

前述のように、GMRES 法は各反復毎に直交ベクトル \mathbf{v}_j の保存が必要であり、リスタート付きの場合は (リスタート値) \times (自由度) の、リスタート無しでは不確定の記憶容量が必要となる。さらに、MG-GMRES 法では各反復毎に \mathbf{v}_j と \mathbf{z}_j の保存を必要とする。

リスタート無しの GMRES 法と MG-GMRES 法とを比べると、収束判定値 10^{-12} に達するのに必要とした反復回数は、 $h = 1.0$ の場合、MG-GMRES 法では平均 10 回、GMRES 法では 21 回であり、 $h = 0.5$ の場合、MG-GMRES 法では平均 11 回、GMRES 法では 25 回であった。MG-GMRES 法は GMRES 法のほぼ半分の回数で収束判定値まで達しており、したがってメモリ負荷においては大差ない。しかし、MG-GMRES 法は GMRES 法よりも多くの計算時間を要している。

なお、 $h = 1.0$ の場合、MG-GMRES 法はリスタート値 5 の GMRES 法と同程度の収束性を示しているが、 $h = 0.5$ の場合ではリスタート値 10 程度の収束性が得られており、 $h = 0.5$ の場合の方が MG-GMRES 法のパフォーマンスが相対的に向上している。このことから、本解析例では MG-GMRES 法のパフォーマンスが GMRES 法よりも劣ってはいるが、極めて性質の悪い問題に対しては、その傾向が逆転する可能性もあり、解の収束性の向上に有効となり得ることが確認できる。

6. おわりに

Wavelet BEM を対象に MG-GMRES 法を適用し、そのパフォーマンスを調べた。マルチグリッド法を前処理に用いた場合、wavelet BEM にマルチグリッド法を適用した場合と同様に射影や補間の操作は必要なく、また解像度毎に係数行列を作成・保存する必要も無い。また、MG-GMRES 法はマルチグリッド法と比べ、記憶容量の面では劣るものの、収束性では MG-GMRES 法の方が優れていた。一方、リスタート無しの GMRES 法と比べると、 $h = 1.0, 0.5$ の両者ともに使用した記憶容量はほぼ同程度であるが、CPU 時間で見た収束性は劣っていた。しかし、 $h = 1.0$ の場合より $h = 0.5$ の場合において MG-GMRES 法の収束性が相対的に向上していることから、領域の形状が極端に偏平な場合や、複雑な場合

など、反復解の収束性の悪い問題に対し、本手法が有効となり得ることを示唆する結果となった。

なお、本論文では、Neumann 問題に適用した場合のみ示したが、第 2 種積分方程式を対象とする限り、Dirichlet 問題でも同様の結果が得られるものと思われる。

また、第 1 種積分方程式に対しては、文献 8) にも示したように、マルチグリッド法の適用は容易ではないと考えられる。より一般的な混合境界値問題などへの適用については今後の課題としたい。

参考文献

- 1) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V. : Fast wavelet transforms and numerical algorithms I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 44, (1991), pp.141-183.
- 2) Sonneveld, P. : CGS, A fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10, 1, (1989), pp.36-52.
- 3) Fletcher, R. : Conjugate gradient methods for indefinite systems, *Lecture Notes in Mathematics 506*, (1976), pp.73-89, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York.
- 4) Saad, Y. & Schultz, M. H. : GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7, 3, (1986), pp.856-869.
- 5) Saad, Y. : A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 14, (1993), pp.461-469.
- 6) Feng, Y.T., Peric, D. & Owen, D.R.J. : A multigrid enhanced GMRES algorithm for elasto-plastic problems, *Int. J. Number. Meth. Engng.*, 42(1998), pp.1441-1462.
- 7) Briggs, W.L. : A multigrid tutorial, *SIAM*, (1987).
- 8) 阿部和久・林志保・紅露一寛 : Wavelet BEM のためのマルチグリッド反復法, 応用力学論文集, 3(2000), pp.157-166.
- 9) Mandel, J. : On multilevel iterative methods for integral equations of the second kind and related problems, *Numer. Math.*, 46, (1985), pp.147-157.
- 10) Schippers, H. : Theoretical and practical aspects of multigrid methods in boundary element calculations, Chap.6 in *Topics in Boundary Element Research*, 3, (1987), pp.168-190, Springer-Verlag.
- 11) Kalbasi, K. & Demarest, K.R. : A multilevel formulation of the method of moments, *IEEE Trans. Annt. Prop.*, 41, (1993), pp.589-599.
- 12) Koro, K. & Abe, K. : Determination of optimal threshold for matrix compression in wavelet BEM, *BEM23*, (2001), pp.475-484.