境 界 要 素 法 研 究 会 (JASCOME)
BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集第4回
(1994年6月)

JASCOME
Proc. of BTEC-94
June 1994

境界型固有値決定法とその比較

神谷紀生* 野替一義** 安藤英司***

BOUNDARY-TYPE EIGENVALUE DETERMINATION SCHEMES AND THEIR COMPARISON

N. KAMIYA, K. NOGAE and E. ANDOH

Various boundary-type eigenvalue analysis schemes for the Helmholtz equation developed recently are reviewed from two principal aspects: formulation and eigenvalue determination algorithm. The formulation includes integral equation representations, variational formulation and Trefftz classical boundary scheme. Determinant zeropoint search, determinant minimum search, iterative power method and use of standard solvers are main algorithms available for the eigenvalue determination. Conspicuous features including merits and demerits are discussed and compared.

Key Words : Eigenvalue Analysis, Boundary Element Method, Boundary-Type Solution

1 はじめに

境界要素法(BEM)に代表される境界型の数値解析法は、差分法や有限要素法のような領域型の方法に比べて有利な点がある。ことに、解析空間の次元を1だけ下げて問題を扱えることは目立った特長である。しかしながら、従来から知られているように、固有値解析については、境界型の解法は必ずしも有利となっていない。この理由は、従来は固有値の決定が係数行列の0点の直接探索によって行われることが多かったので、計算効率が高くないことによる。また、Helmholtz方程式の基本解は複素数であるから、計算が複雑になることも関連がある。以下では、このような事情にかんがみ、最近になって、固有値の決定のために行われたいくつかの研究を、その定式化とそれに関連する固有値決定法の見地から、方法の概要とそれらの長所·短所を検討する。

2 Helmholtz方程式の固有値問題とその解法

2.1 問題の表示と従来法

2次元あるいは3次元閉領域Ωにおけるスカラー値Helmholtz方程式は次のように与えられる。

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

ここでkは波数である($k^2=\lambda$と表されることが多い)。この方程式について、次の同次境界条件

$$\left.\begin{array}{ll} u = 0 & (\text{on } \Gamma_1) \\ \partial u/\partial n = 0 & (\text{on } \Gamma_2) \end{array}\right\} \tag{2}$$

のもとで、固有値kが決定される。なおnは境界Γにおける単位法線を表す。

* 学識会員 名古屋大学情報文化学部 464-01 名古屋市千種区不老町1, Tel.052-781-5111(Ext.4474)
** 非会員 三菱自動車工業(株)
*** 非会員 三菱電機(株)

式(1)はHelmholtz方程式の基本解

$$v^*(\xi,x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}iH_0^{(2)}(kr) & (2D)\\ \dfrac{1}{4\pi r}\exp(-ikr) & (3D)\end{cases} \quad (3)$$

を用いれば、次のような積分方程式に変換される[1,2,3]。

$$c(\xi)u(\xi)+\int_\Gamma \frac{\partial v^*}{\partial n}(\xi,x)u(x)d\Gamma-\int_\Gamma v^*(\xi,x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)d\Gamma=0 \quad (4)$$

なお、式(3)におけるξ、xはそれぞれソース点、場の点であり、それらの間の距離がrである。また、$H_0^{(2)}$は0次の第2種Hankel関数である。式(4)のcはソース点の位置によって決まる定数である。

式(4)を境界要素によって離散化すれば、境界節点における値でできたベクトル$\{u\}$、$\{\partial u/\partial n\}$について、次の方程式を得る。

$$[H]\{u\}=[G]\{\partial u/\partial n\} \quad (5)$$

ここで、行列$[H]$と$[G]$は、境界要素上でuおよび$\partial u/\partial n$の内挿関数に基本解を掛けたものを積分することによって得られる。これらの成分は、固有値問題では未知数であるkを陰に含む形となる。

$$h_{ij}=h_{ij}(k), \qquad g_{ij}=g_{ij}(k) \quad (6)$$

式(5)に境界条件(2)を用いれば、0でないuと$\partial u/\partial n$の境界値のベクトル$\{x\}$について次の固有値問題が得られる。

$$[A]\{x\}=[B]\{0\} \quad (7)$$

したがって、固有方程式は次のようになる。

$$det[A]=0 \quad (8)$$

式(8)により固有値kを決定する方法は、kを少しづつ変えて、$det[A]$のkに関する分布を求め、それによって$det[A]$の0点を求めることによる[2,3]。ただし、実際には厳密に0点を求める代わりに$det[A]$の極小値を求めることによって代用されることが多い。この方法で問題になるのは、行列$[A]$の成分がkの陰な関数として表されているから、kを変えるごとに数値積分を行い、その上で行列式$det[A]$を計算しなければならないことである。したがって、計算効率が低くならざるを得ない。

式(4)とは異なる積分方程式を用い、それに対して式(8)と同様な固有方程式を導出し、それについて、反復法を用いる方法がZhou[6]、DeMey[4,5]によって考えられている。この方法においても異なるkに対する行列成分は常に計算しなおす必要がある。なお、DeMay[5]は基本解、式(3)の代わりに実数のGreen関数を用いる方法も示している。

2.2 従来定式における改良解法

上記の従来の方法は、離散化が境界だけに限定されるにもかかわらず、固有値の決定は、kが分離されていないために効率よく遂行されない。

KirkupとAmini[7]が最近提案した方法は、式(8)までの式の導出によっているが、そのあとで次のように近似する。すなわち考えるkの範囲を小さく限定すれば、その範囲において行列$[A]$の成分、すなわち元来の行列$[H]$、$[G]$の成分はkに関する多項式で表示できるものと考える。すなわち

$$[A]=[A^0]+k[A^1]+k^2[A^2]+\cdots \quad (9)$$

このように表される行列は多項式行列あるいはλ行列と呼ばれ、その行列式が0になる固有方程式は次のように変換できることが知られている。

$$[S]\{y\}=k^2[T]\{y\} \quad (10)$$

ここで行列$[S]$と$[T]$は$[A]$の多項式展開成分によって定義され、ベクトル$\{y\}$は式(7)の$\{x\}$によって表示されるものである。式(10)はいわゆる一般化固有値問題であるから、これは既存の固有値決定ソルバーが利用できる。文献[7]では式(9)を低次に限定して解析した例が示されている。この方式は多項式近似の適否が解に大きい影響を及ぼすこと、求めようとするkのおおよその値ごとに多項式近似をしなおす必要があることを指摘する。

3 別の定式化

Helmholtz方程式の基本解を用いて積分方程式を導出する方法は、本質的に未知数kを含む形となる。したがって、元来の方程式が線形であるにもかかわらず、固有値の決定は容易でない。そこで考え出された方法が、Laplace方程式の基本解u_0^*を用いるものである。

$$u_0^*(\xi,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{r}\\ \dfrac{1}{4\pi r}\end{cases} \quad (11)$$

このとき、積分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}c(\xi)u(\xi) &+ \int_\Gamma \frac{\partial u_0^*}{\partial n}(\xi,x)u(x)d\Gamma-\int_\Gamma u_0^*(\xi,x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)d\Gamma\\ &= k^2\int_\Omega u_0^*(\xi,x)u(x)d\Omega \end{aligned}\quad (12)$$

上式の左辺は境界積分であるが、右辺は未知数uを含む領域積分であるから、境界要素分割だけによりこの方程式を解くことはできない。右辺の領域積分を計算する方法として、1)内部セルを用いる方法、2)2重相反法、3)多重相反法などが提案された。固有値解析に限定して、以下にそれらを個々に説明する。

3.1 境界要素/内部セル法

境界積分を計算するために境界を要素分割する以外に、領域積分を計算するために領域をセルに分割する。すると式(12)に対応した離散定式を得ることができる。しかしこの式には領域内未知量が含まれるので、領域内点における関数値を境界値と関連づける式を用い、これも同様に離散化する。このようにして得られた2種類の式から、0でない境界値のベクトルを消去すれば、内部未知量ベクトルに関する固有値問題を得る。この係数行列は非対称であるが、標準型の問題となる。この方法は、積分方程式は用いているが、領域のセル分割を必要とするので、BEMの利点が十分に生かされていないといえよう。

3.2 2重相反法

式(12)の右辺の領域積分を計算するために、Greenの公式を用いるものであるから、先に式(12)を導出する際を含め、合計2度Greenの公式が用いられることになる。そこで、2重相反法(DRM)の名がつけられている[8]。このために、右辺の未知数を

$$\nabla^2\psi(x) = u(x) \tag{13}$$

と表せば、領域積分はψに関する境界積分として表示される。ただし、uは未知数であるから、これを境界および領域内のいくつかの点によって内挿する方法が用いられ、通常これらの点との距離によって影響関数的に表される[9~12]。問題によってはこのために境界点だけを用いることもあるが、一般に精度を上げるためには通常不十分である。したがって、境界点以外にいくつかの内点が必要になる。また、未知関数の内挿に用いられる関数の適切なとり方には一般的方法がないようである。ただしこの定式化の利点は、領域分割が不必要なうえに、固有値問題が標準型になることである。

3.3 多重相反法

多重相反法(MRM)では、式(12)の領域積分に現れるLaplace方程式の基本解u_0^*を次のようにおく。

$$\nabla^2 u_1^*(\xi, x) = u_0^*(\xi, x) \tag{14}$$

これを式(12)に代入し、Greenの公式を用いれば、境界積分項とともに$u(\xi)u_1^*(\xi, x)$の領域積分項が現れる。そこでさらに式(14)と同様に

$$\nabla^2 u_{j+1}^*(\xi, x) = u_j^*(\xi, x) \tag{15}$$

を満たすいわゆる高次の基本解を用いて、順次Greenの公式を用いてゆく[13,14]。Helmholtz方程式について、これを十分多数回行えばその際に残される領域積分は十分小さくなることが証明されるので[15,16]、実用計算ではこの項を無視して、境界積分だけの計算ができる。なお、式(15)を満たす基本解は次のように与えられる。

$$u_j^*(\xi, x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} r^{2j} \dfrac{1}{4^j (j!)^2} (\ln r - \displaystyle\sum_{l=0}^{i} \dfrac{1}{l}) & \text{(2D)} \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{(2j)^j} r^{2j-1} & \text{(3D)} \end{cases} \tag{16}$$

ただし、$j=0$のとき、2次元公式の最後の項は0とする。このようにして得られた離散方程式は次のようになる。

$$\sum_{j=0} (-k^2)^j [H_j]\{u\} = \sum_{j=0} (-k^2)^j [G_j]\{\partial u/\partial n\} \tag{17}$$

すなわち、式(5)のように表したとき、行列$[H]$と$[G]$はk^2に関する多項式となる。したがって、固有方程式表示における行列$[A]$と$[B]$もk^2の多項式で表される。この定式化にもとづく固有値決定法が、Kamiyaらによって示されている[17~20]。

この章でここまでに説明した方法は、Laplace方程式の基本解およびその高次基本解を用いるものであるが、これとは違い、前章のHelmholtz方程式の基本解を用いた式をもとにして、これに高次の基本解を利用する方法がItagakiとBrebbia[21,22]によって提案された。この方法では、べき乗法による反復解法を用いる。固有値あるいは境界値をあるソース分布ごとに計算するための領域積分は、MRMによって境界積分の無限級数として表示された。この方法はあらかじめべき乗法による固有値決定のアルゴリズムにもとづいて定式化をすすめているのが特長である。各反復計算ごとに境界値問題を解く必要がある。なお、べき乗法であるから必ず(波数に関して)最小の固有値に収束することが保証されている。

3.4 Trefftz法

Trefftz法は、境界型解法のオリジナルであり、解はあらかじめ支配方程式を満足する関数(T-complete関数とよばれる)の多項式あるいはそれを重み関数として重みつき残差法によって定式化することができる[23]。閉じた領域に対するHelmholtz方程式のT-complete関数w_mは次のように与えられる。

$$w_m = \begin{cases} \{J_0(kr), J_m(kr)\cos(m,\theta), J_m \sin(m,\theta)\} & \text{(2D)} \\ \{j_m(kr) P_m^q(\cos\theta) e^{iq\psi}\} & \text{(3D)} \end{cases} \tag{18}$$

ここでJはBessel関数、jは球Bessel関数、Pは陪Legendre関数である。ただし、r、θは2次元球座標である。解は

$$u = \sum_m a_m w_m \tag{19}$$

のように定義され、選点法あるいは重みつき残差法によって境界条件を満足するように係数a_mが決定される。

これに同次境界条件を用いれば固有値問題を得る。このとき、Bessel関数あるいは球Bessel関数がkに関する多項式で表されることを考慮すれば、式(8)の行列$[A]$はkの多項式となる。したがって、先に述べた方法と同じように、一般化固有値問題に帰着させることができる[24]。MRMによる多項式展開よりも、本方法の方がkに関する収束性は高い。

3.5 変分定式

孫、加川[25,26]は変分原理にもとづく境界要素法定式を行い、境界だけで固有値を決定できる方法を示した。この方法によって得られる固有値は2種類あり、解の上下界を与えることから、両者を求めれば、比較的要素数を少なくしても解を正確に求めることができる。元来この方法は行列式の0点(極小値)を探索する方法であるが[25]、DRMとの組み合わせにより効率化されることを示した[26]。

4 固有値決定のアルゴリズム

固有値を決定するような代表的な数値計算は、できるかぎり既存のサブルーチンによってブラックボックスとして決定されることが望ましい。ただし、このようなことができるのはいわゆる標準固有値問題あるいは一般化固有値問題として定式化された場合に限られる。このようなことが可能であるのは先に述べた定式化において、

Kirkupらの行列の多項式近似[7]	→	一般化固有値問題
境界要素法/内部セル法	→	標準固有値問題
2重相反法[9~12]	→	標準固有値問題
多重相反法の一部[18~20]	→	一般化固有値問題

その他の方法は独立に固有値決定アルゴリズムを求めなければならない。なお、Itagakiらの方法[21,22]はあらかじめべき乗法を用いるようにMRMを用いた定式化を行っているので、それについてはすでに述べた通りである。

したがって、あとに残されるのは行列$[A]$の行列式が0あるいは極小値をとるkの値をいかにして定めるかである。最もプリミティブな方法は$det[A]$のkに関する分布を直接に求め、それから必要な値を決定する方法である。この方法はすでに述べたものであり、効率を問題にしなければ、簡単に使える方法である。

MRM定式を用いたあとで上記のような探索を行うことも可能である[17]。1度$[A^i]$の行列成分を計算しておけば、これらはkを含まないので、あとはkを変えて行列式の値を逐次計算することは容易で、しかも効率良くなる。またかなり粗い初期推定値がわかっていれば、これにNewton法を用いて反復計算ができる[27]。なおこの際みかけの固有値を消すようにKamiyaら[17~19]は次のような定式化を用いた。

$$\eta \equiv \frac{det[A]}{det[R]} = 0 \tag{20}$$

ここで行列$[R]$は$[A]$の任意の列ベクトルを$[B]$のそれで置き換えたものであり、このようにしたときも、反復計算は容易である。

さらに、もとのHelmholtz方程式の基本解を用いた固有値問題の定式化を実数部と虚数部に分けたものと、MRMによる定式化の関連から、新しい複素定式の固有値解析法が提案された[28]。この方法は標準型に変形することもできるが、行列の元数が大きくなるので、これについて直接$det[A]$の極値を探索する方法がとられた。この反復計算はMRM定式の結果として得られるkの多項式表示が計算効率を高くしている。これは式(20)のηを用いる方法における行列$[R]$の決め方によって、場合によって生じる計算の不安定性[29]を避けるために大きい寄与をすることがわかった。ただし、η法に比べて計算の時間はやや長くなる。

上記の方法はすべて、固有値を固有方程式から定める方法であったが、これとは違って、特定の境界値問題をkを変えて順次解いてゆき、特異点から固有値を求める方法がある[30]。これは特定の境界値問題にはそのまま使えるが、境界条件が変われば、対応する応答は異なる。

5 まとめ

Helmholtz方程式の固有値を決定するために提案された境界型解法の種々の定式化を関連する計算アルゴリズムを解説した。従来BEMが不向きであると考えられていた固有値解析は、最近かなり大きい進歩があったといえよう。またBEMによる固有値解析にアダプティブ解析法を取り入れた研究も新たに提案された[29]。

参考文献

[1] Brebbia, C.A., Boundary Element Methods for Engineers, Pentech Press, 1978.

[2] Niwa, Y., Kobayashi, S., and Kitahara, M., Determination of Eigenvalues by Boundary Element Methods, Chapter 7, Developments in Boundary Element Methods, Vol. 2, P. K. Banerjee and R. Shaw eds., Applied Science Pub., 143-176, 1982.

[3] Beskos, D. ed., Boundary Element Methods in Mechanics, North Holland, 1987.

[4] DeMey, G., Calculation of eigenvalues of the Helmholtz equation by integral equation, Int. J. Num. Meth Eng., **10**, 59-66, 1976.

[5] DeMey, G., A simple integral equation method for the calculation of the eigenvalues of Helmholtz equation, Int. J. Num. Meth. Eng., **11**, 1340-1342, 1977.

[6] Zhou, J., Computations of eigenfunction and eigenfrequencies of two-dimensional vibrating structures by the boundary element method, Proc. 28th Conf. Decision and Control, IEEE, 2045-2049, 1989.

[7] Kirkup, S.M., and Amini, S., Solution of the Helmholtz eigenvalue problem via the boundary element method, Int. J. Num. Meth. Eng., **36**, 321-330, 1993.

[8] Nardini D., and Brebbia C. A., A new approach to free vibration analysis using boundary elements, Proc. 4th Int. Conf. Bound. Elms., Brebbia C. A. ed., Springer Ver., 313-326, 1982

[9] Partridge P. W., and Brebbia C. A., The dual reciprocity boundary method for the Helmholtz equation, Proc. Int. Bound. Elms. Symp. Brebbia C. A. and Choudouet-Miranda A., eds., Comp. Mech. Pub / Springer Ver., 543-555, 1990

[10] Banerjee, P.K., Ahmad, S., and Wang, H.C., A new BEM formulation for the acoustic eigenfrequency analysis, Int. J. Num. Meth. Eng., **26**, 1299-1309, 1988.

[11] Coyette, J.P.,and Fyfe, K.R., An improved formulation for acoustic eigenmode extraction from boundary element models, Trans. ASME, J. Vib. Acoust., **112**, 392-398, 1990.

[12] Ali, A., Rajakumar, C., and Yunus, S.M., On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problems, Int. J. Num. Meth. Eng., **31**, 1271-1282, 1991.

[13] Nowak, A. J., Temperature fields in domains with heat sources using boundary only formulations, Proc. 10th BEM Conference, Brebbia C. A. ed., Vol.2, Springer Ver., 233-247, 1988.

[14] Nowak, A.J., and Brebbia, C.A., Solving Helmholtz equation by boundary elements using the multiple reciprocity method, Computers and Experiments in Fluid Flow, Carlomagno, G.M. and Brebbia, C.A. eds., Comp. Mech. Pub./Springer Ver., 265-270, 1989.

[15] Kamiya, N., and Andoh, E., Multiple reciprocity boundary integral formulation for the three-dimensional Helmholtz equation, Bound. Elms. Abst. Newslett., **3**, 147-149, 1992.

[16] Kamiya, N., and Andoh, E., A note on multiple reciprocity formulation for the Helmholtz equation, Comm. Num. Meth. Eng., **9**, 9-13, 1993.

[17] Kamiya, N., and Andoh, E., Eigenvalue analysis by boundary element method, J. Sound Vib., **160**, 279-287, 1993.

[18] Kamiya, N., Andoh, E. and Nogae, K., Eigenvalue analysis by boundary elements methods: New developments, Eng. Anal. Bound. Elms., **12**, , 1993.

[19] Kamiya, N., Andoh, E., and Nogae, K., Three-dimensional eigenvalue analysis of the Helmholtz equation by multiple reciprocity boundary element method, Adv. Eng. Software, **16**, 203-207, 1993.

[20] Kamiya, N., and Andoh, E., Standard eigenvalue analysis by boundary element method, Comm. Num. Meth. Eng., **9**, 489-495, 1993.

[21] Itagaki, M., and Brebbia, C.A., Multiple reciprocity boundary element formulation for one-group fission neutron source iteration problems, Eng. Anal. Bound. Elms., **11**, 39-46, 1993.

[22] Itagaki, M., and Brebbia, C.A., Source iteration multiple reciprocity techniques for Helmholtz eigenvalue problems with boundary elements, Proc. Fifth Japan-China Symp. BEM., Tanaka, M., Du, Q., and Honma, T., eds., Elsevier Sci. Pub., 79-88, 1993.

[23] Herrera, I., Trefftz Method, Chapter 10 in Topic in Boundary Element Research, Brebbia, C.A., ed., 225-253, Springer-Ver., 1984.

[24] 神谷、Wu, S.T.、Trefftz 法による境界型固有値解析、シミュレーション学会論文集、**12**、239-243、1993.

[25] 孫、加川、変分原理による境界要素法-2次元ヘルムホルツ方程式の固有値問題、境界要素法論文集、**9**、157-162、1992.

[26] 孫、加川、ヘルムホルツ方程式の変分原理による境界要素解析、BEM テクノロジーコンファレンス論文集、**3**、47-52、1993.

[27] Yang, W.H., A method for eigenvalues of sparese λ- matrices, Int. J. Num. Meth. Eng., **19**, 943-948, 1983.

[28] 野替、神谷、安藤、新しい複素定式を用いた、境界要素法による Helmholtz 方程式の固有値解析、機械学会講演論文集、No.943-1,101-103,1994.

[29] 野替、神谷、安藤、境界要素法による固有値解析のためのアダプティブメッシュ、日本機械学会論文集、C59 、3785-3791 、1993.

[30] Sladek, V., Sladek, J., and Tanaka, M., Eigenvalue analysis by three-dimensional Helmholtz equation, Eng. Anal. Bound. Elms., **11**, 167-172, 1993.