境 界 要 素 法 研 究 会 (JASCOME)
BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集第4回
(1994年6月)

JASCOME
Proc. of BTEC-94
June 1994

多重極展開法を用いた境界要素法の高速化

渡辺 修*, 速水 謙†

A FAST SOLVER FOR THE BOUNDARY ELEMENT METHOD USING MULTIPOLE EXPANSION

Osamu WATANABE and Ken HAYAMI

There is a difficulty in applying the boundary element method to large scale and practical problems, since with the number of boundary elements n, the amount of computation grows at an order of $O(n^3)$ and the memory at $O(n^2)$ using the standard technique. In this paper, we apply an iterative method (Bi-CGSTAB) to solve the linear systems of equations, and use the multipole expansion method by Rokhlin and Greengard for the matrix-vector multiplication in each iteration.Thus, the approximate matrix-vector multiplication is computed with $O(n)$ operations, and the amount of required memory is $O(n)$ since the explicit full matrix expression is not required.

Numerical experiments on the two dimensional Laplace equation with mixed boundary condition were performed on a work station. The direct method (LU decomposition), iterative method and the multipole expansion method were compared. Results showed that the iterative method was the fastest for ordinary size problem, whereas for 'large scale problems', the multipole expansion method is the only choice.

keywords : boundary element method, Bi-CGSTAB, multipole expansion, 2-D Laplace equation, mixed boundary condition.

1 はじめに

境界要素法では連立1次方程式を解く作業が含まれるが,現れる行列は密行列であり,従来はLU分解法などの直接法が用いられてきた.従って,計算量,メモリーの点で計算機の負担が大きかった.そこで,本論文では境界要素法で生じる連立1次方程式の解法に反復法を適用することを考察する.

反復解法に共通の計算要素には,ベクトルの更新(書換え),内積の計算,行列ベクトル積の計算などがある.このうち,計算量が最も大きいのは行列ベクトル積の計算であり,解くべき連立1次方程式の元数をnとすると密行列の場合n^2回の加算,乗算を要する.また,行列を保持するためのメモリも$O(n^2)$である.従って,この部分の計算を工夫しないかぎり,解法としての性能の向上は望めない.ところで,反復解法においては行列ベクトル積を行なった結果がわかればよいので,もしある方法で行列ベクトル積に相当する(近似)計算ができれば,行列を明示的に保持しておく必要はない.

そこで,Rokhlin[1], Greengard[2] のアルゴリズムを境界要素法に適用して,行列ベクトル積に相当する計算を$O(n)$で行うことを考える.このアルゴリズムを用いると計算オーダーを減らせるばかりでなく,行列を保持する必要がないため,メモリが大幅に節約できる.

2 2次元ラプラス方程式に対する境界要素法の定式化

本論文では2次元ラプラス方程式の境界値問題:

* 非会員, 東京大学 大学院 総合文化研究科, 〒153 東京都目黒区駒場 3-8-1, TEL 03-5454-6807
† 学識会員, 東京大学 工学部 計数工学科, 〒113 東京都文京区 7-3-1, TEL 03-3812-2111 内線 6906

$$
\begin{cases}
\nabla^2 u(x) = 0, & x \in \Omega \\
u(x) = \bar{u}(x), & x \in \Gamma_1 \\
q(x) = \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = \bar{q}(x), & x \in \Gamma_2
\end{cases} \tag{1}
$$

を考える. ここで u はポテンシャル, n は境界での外向き単位法線ベクトル, q は u の n の方向への偏微分である. また, 全境界を Γ とすると $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ である. この問題に対し, 基本解 $u^*(x, x_s)$ とその法線方向微分 $q^*(x, x_s)$ は

$$
u^*(x, x_i) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x - x_i|) \tag{2}
$$

$$
q^*(x, x_i) = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi}\frac{(x - x_i, n)}{|x - x_i|^2} \tag{3}
$$

で与えられ, これらとグリーンの定理により境界積分方程式

$$
\begin{aligned}
c(x_s)\, u(x_s) &= \int_\Gamma q(x)\, u^*(x, x_s)\, \mathrm{d}\Gamma \\
&\quad - \int_\Gamma u(x)\, q^*(x, x_s)\, \mathrm{d}\Gamma
\end{aligned} \tag{4}
$$

を得る. 但し,

$$
c(x_s) = \begin{cases} 1, & x_s \in \Omega \\ \dfrac{\theta}{2\pi}, & x_s \in \Gamma\,(\theta \text{ は } x_s \text{ で } \Omega \text{ が見込む角}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}
$$

である.

以下では境界 Γ を直線分の境界要素 Γ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ で離散化し, $\Gamma_1 = \cup\Gamma_i$ $(i = 1, \cdots, m)$, $\Gamma_2 = \cup\Gamma_i$ $(i = m+1, \cdots, n)$ とする. また各境界要素上で u, q の値は一定として扱う.

各要素 Γ_i を代表する点 (要素の中心点) を x_i とし, それを (4) 式を離散化した式に代入し, さらに未知量を左辺, 既知量を右辺にまとめると

$$
I = -c(x_i)\, u(x_i) + I' \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{6}
$$

$$
c(x_i)\, u(x_i) + I = I' \quad (i = m+1 \cdots, n) \tag{7}
$$

となる. ここで

$$
\begin{aligned}
I &= -\sum_{j=1}^{m} q(x_j) \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_i)\, \mathrm{d}\Gamma \\
&\quad + \sum_{j=m+1}^{n} u(x_j) \int_{\Gamma_j} q^*(x, x_i)\, \mathrm{d}\Gamma
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
I' &= \sum_{j=m+1}^{n} q(x_j) \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_i)\, \mathrm{d}\Gamma \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} u(x_j) \int_{\Gamma_j} q^*(x, x_i)\, \mathrm{d}\Gamma
\end{aligned} \tag{9}
$$

である.

(6),(7) 式は適当な置き換えによって

$$
Ay = b \tag{10}
$$

但し $y = (q(x_1), \cdots, q(x_m), u(x_{m+1}), \cdots, u(x_n))^{\mathrm{T}}$, となり連立 1 次方程式に帰着する.

3 反復解法

(10) 式の連立 1 次方程式は通常直接解法 (LU 分解) で解かれるが, A は $n \times n$ の密行列なので $\mathrm{O}(n^3)$ の演算量を要する. 本論文では, まず非対称行列用の反復解法 Bi-CGSTAB 法 [3] を用いて (10) 式を解くことを試みる. 反復法の解の収束性, 必要な反復回数は一般には保証されないが, ラプラス方程式の境界要素法では一般にもとの積分演算子の性質を反映して A は優対角で条件がいいので, 少ない反復数 (2 次元問題なら $\mathrm{O}(\sqrt{n})$ またはそれ以下) で解に収束することが期待される. よって, 反復 1 回当りの行列ベクトル積 Ap の演算量は n^2 なので全体の演算量のオーダーは直接法の $\mathrm{O}(n^3)$ より少ないと期待される.

また, この種の共役勾配法系の反復法は行列に前処理を加えることにより収束を加速することができる. 一番簡単な前処理は行列の対角項によるスケーリングで, 対角項の値が相異なるときに有効である.

4 多重極展開法

反復法の演算量をさらに減らすため, 反復毎の行列ベクトル積を多重極展開法を用いて $\mathrm{O}(n)$ にする方法を検討する.

4.1 基本解の多重極展開

2 次元問題では $x \in \mathrm{R}^2$ を $x \in \mathrm{C}$ とみなせるので以下では複素平面で考える.

定理 1 (多重極展開 [2]) z, z_0, z_i $(i = 1, \cdots, m) \in \mathrm{C}$ とする. $i = 1, \cdots, m$ に対して, $|z_i - z_0| < r$ なる位置 z_i に強さ q_i, あるいは q'_i のソースがあり, 各ソースによるポテンシャル関数が

$$
\begin{aligned}
\phi_{z_i}(z) &= q_i \log(z - z_i) \\
\psi_{z_i}(z) &= \frac{q'_i}{z - z_i}
\end{aligned}
$$

で表されているとする. このとき $|z - z_0| > r$ なる位置 z でのポテンシャル関数 $\phi(z), \psi(z)$ は,

$$
\begin{aligned}
\phi(z) &= a_0 \log(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^k} \\
\psi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a'_k}{(z - z_0)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

となる. 但し

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \sum_{i=1}^{m} q_i \\
a_k &= \sum_{i=1}^{m} \frac{-q_i (z_i - z_0)^k}{k} && (\text{for} \quad k \geq 1) \\
a'_k &= \sum_{i=1}^{m} q'_i (z_i - z_0)^k && (\text{for} \quad k \geq 0)
\end{aligned}
$$

である. また, $p \geq 1$ として

$$\left|\phi(z) - a_0 \log(z - z_0) - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{(z-z_0)^k}\right| \leq \frac{A}{c-1}\left(\frac{1}{c}\right)^p$$

$$\left|\psi(z) - \sum_{k=0}^{p} \frac{a'_k}{(z-z_0)^{k+1}}\right| \leq \frac{A'}{|z|(c-1)}\left(\frac{1}{c}\right)^p.$$

但し, $\quad c = \left|\frac{z-z_0}{r}\right|, \quad A = \sum_{i=1}^{m} |q_i|, \quad A' = \sum_{i=1}^{m} |q'_i|$

が成立する.
(証明には Taylor 展開と重ね合わせの原理を用いる.)

定理 2 (多重極展開の平行移動 [2]) $z, z_0 \in \mathrm{C}$ に対して,

$$\phi(z) = a_0 \log(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^k}$$

が中心 z_0, 半径 R の円の外側, すなわち $|z - z_0| > R$ に対して成立しているとする. すると $z_1 \in \mathrm{C}$ に対して, 中心 z_1, 半径 $R+|z_1-z_0|$ の円の外側, すなわち $|z-z_1| > R+|z_0-z_1|$ では

$$\phi(z) = b_0 \log(z - z_1) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{(z-z_1)^k}$$

が成立する (Fig. 1参照). ただし, $\begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}$ を二項係数として

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_l &= -\frac{a_0(z_0-z_1)^l}{l} + \sum_{k=1}^{l} a_k (z_0 - z_1)^{l-k} \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \\ &\quad (\text{for} \quad l \geq 1) \end{aligned}$$

である. また $p \geq 1$, $^\exists \alpha, (> 0)$ に対して,

$$\begin{aligned} &\left|\phi(z) - b_0 \log(z - z_1) - \sum_{l=1}^{p} \frac{b_l}{(z-z_1)^l}\right| \\ &\qquad \leq \alpha \left|\frac{|z_0 - z_1| + R}{z - z_1}\right|^{p+1} \end{aligned} \tag{11}$$

が成立する.(証明には Taylor 展開を用いる.)

4.2 積分の近似計算

次に多重極展開を用いて (8), (9) 式の積分を近似計算することを考える. ここで, 後に使う定義を示す.

定義 1 本論文においてクラスタ $\tilde{\Gamma}_{\tau_h}$ とは, いくつかの境界要素 Γ_j の結合領域と定義し, それを

$$\tilde{\Gamma}_{\tau_h} = \bigcup_{j \in \tau_h} \Gamma_j$$

と表わす.

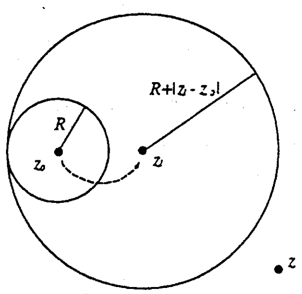

Fig. 1 Translation of a multipole expansion

定義 2 ある Γ_i 上の代表点 $\boldsymbol{x}_i$ に対して, クラスタ領域 $\tilde{\Gamma}_{\tau_h}$ が遠いとは, $^\forall \boldsymbol{x} \in \tilde{\Gamma}_{\tau_h}$, 定数 $c(> 1)$ に対して,

$$|\boldsymbol{x}_i - C_{\tau_h}| > c|\boldsymbol{x} - C_{\tau_h}|$$

となる点 C_{τ_h} がとれることをいう.
また, そのときクラスタに含まれる各々の Γ_j も遠い領域にあるという. そして, どのクラスタにも含まれない Γ_j は $\boldsymbol{x}_i$ に対して近い領域にあると定義する.

まず (8) 式の I を近似計算するために, $\boldsymbol{x}_i$ に対して境界 Γ_1, Γ_2 を近い領域 ($j \in near\Gamma_1$, $j \in near\Gamma_2$ の様に表す) と遠い領域 ($j \in far\Gamma_1$, $j \in far\Gamma_2$ の様に表す) とに分類して,

$$I = I_{near} + I_{far} \tag{12}$$

とする. 但し,

$$\begin{aligned} I_{near} &= -\sum_{j \in near\Gamma_1} q(\boldsymbol{x}_j) \int_{\Gamma_j} u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i)\, \mathrm{d}\Gamma \\ &\quad + \sum_{j \in near\Gamma_2} u(\boldsymbol{x}_j) \int_{\Gamma_j} q^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i)\, \mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} I_{far} &= -\sum_{j \in far\Gamma_1} q(\boldsymbol{x}_j) \int_{\Gamma_j} u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i)\, \mathrm{d}\Gamma \\ &\quad + \sum_{j \in far\Gamma_2} u(\boldsymbol{x}_j) \int_{\Gamma_j} q^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i)\, \mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{14}$$

とおいた. I_{near} については直接計算する. I_{far} については $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^2$ を $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}$ と考え, I_{far} に基本解の具体形を代入して定理 1を用いると,

$$\begin{aligned} &I_{far} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\sum_{j \in far\Gamma_1} q(\boldsymbol{x}_j) \int_{\Gamma_j} \left\{ \log(\boldsymbol{x}_i - C_j) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} \frac{(\boldsymbol{x} - C_j)^k}{(\boldsymbol{x}_i - C_j)^k} \right\} \mathrm{d}\Gamma \right) \\ &- \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\sum_{j \in far\Gamma_2} u(\boldsymbol{x}_j) n_j \int_{\Gamma_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{x} - C_j)^k}{(\boldsymbol{x}_i - C_j)^{k+1}} \mathrm{d}\Gamma \right) \end{aligned} \tag{15}$$

となるが,(15) 式で C_j とは,

$$|x_i - C_j| > c|x - C_j| \qquad ({}^\forall x \in \Gamma_j,\ \ c > 1) \tag{16}$$

が成立する点で,一言でいうと Γ_j の代表点 x_j に近い点である.いま Γ_j は x_i から遠いあるクラスタの一部だからこのような点は必ず存在する.

遠い領域を

$$\bigcup_{j \in far} \Gamma_j = \bigcup_{\tau_h \in far} \bar{\Gamma}_{\tau_h}$$

となるようにクラスタに分ける.ここで $far = far\Gamma_1 \cup far\Gamma_2$ である.まとめられたものに対しては C_j と同様にして C_{τ_h} が定義でき (定義 2),

$$\begin{aligned} I_{far} &\\ = &-\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\tau_h \in far}\left\{a_0^{\tau_h}\log(x_i - C_{\tau_h})\right.\right.\\ &\left.\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{\tau_h}}{(x_i - C_{\tau_h})^k}\right\}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

となる.ここで

$$\begin{aligned} a_0^{\tau_h} &= \sum_{j\in\tau_h} q(x_j)\,h_j,\\ a_k^{\tau_h} &= \sum_{j\in\tau_h}\frac{-q(x_j)}{k}\int_{\Gamma_j}(x - C_{\tau_h})^k\,\mathrm{d}\Gamma\\ &\quad+\sum_{j\in\tau_h}u(x_j)\,n_j\int_{\Gamma_j}(x - C_{\tau_h})^{k-1}\mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{18}$$

である.但し Γ_j は直線要素で $h_j = |\Gamma_j|$ であり, $j \in far\Gamma_1$ に対して $u(x_j) = 0$, $j \in far\Gamma_2$ に対して $q(x_j) = 0$ とおく.また,実際の計算では (17) を有限項で終らせる.

I とほとんど同様にして I' の計算をして,

$$\begin{aligned} I'_{far} &\\ = &\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\tau_h \in far}\left\{b_0^{\tau_h}\log(x_i - C_{\tau_h})\right.\right.\\ &\left.\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k^{\tau_h}}{(x_i - C_{\tau_h})^k}\right\}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

となる.ここで

$$\begin{aligned} b_0^{\tau_h} &= \sum_{j\in\tau_h} q(x_j)\,h_j,\\ b_k^{\tau_h} &= \sum_{j\in\tau_h}\frac{-q(x_j)}{k}\int_{\Gamma_j}(x - C_{\tau_h})^k\,\mathrm{d}\Gamma\\ &\quad+\sum_{j\in\tau_h}u(x_j)\,n_j\int_{\Gamma_j}(x - C_{\tau_h})^{k-1}\mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{20}$$

である.但し $j \in far\Gamma_1$ に対して $q(x_j) = 0$, $j \in far\Gamma_2$ に対して $u(x_j) = 0$ とおく.

4.3 クラスタリング

さて (18),(20) 式の係数は x_i に依存しないため,先に計算しておくことができる.この係数計算の方針としては,まず定理 1を用いて境界要素を 2 つずつ合わせたレベル 1 のクラスタを作る.次にレベル 1 でできた隣り合うクラスタを 2 つずつ組み合わせて,順次高レベルのクラスタを作るという方法をとる.それには,定理 2を用いて各クラスタの多重極展開の中心 z_0, z_0' を両クラスタの境にある点 z_1 に平行移動する (Fig. 2).

例として要素数 16 の境界をクラスタリングする様子を描くと, Fig. 3の様になる.

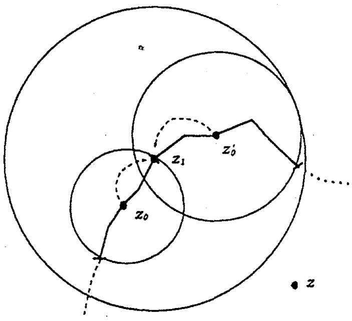

Fig. 2 Merging of two neighbouring clusters by translating the centers of expansions to z_1

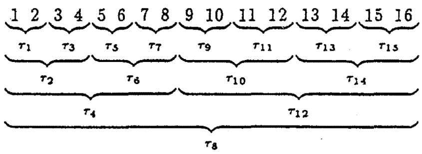

Fig. 3 Clustering

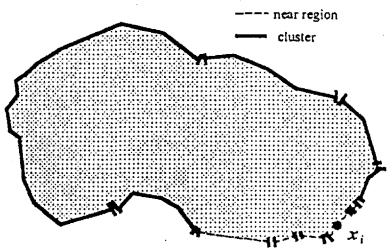

Fig. 4 Combination of cluster for the element at x_i

クラスタリングが終了したならば,後は各 x_i に応じてクラスタを適宜組み合わせて使用する.この際レベルの高いク

ラスタから順次採用していくようにすれば使用するクラスタの数を少なくできる．一般的には x_i からの距離が遠くなればなるほど高レベルのクラスタを用いることができる．最終的に，ある x_i に対して採用するクラスタは Fig. 4 のようになる．

4.4 誤差

(18), (20) 式や near 領域の積分計算が正確に求まっているとしても，レベル 1 のクラスタを計算するときとそれらを定理 2 で平行移動させるときに展開の打ち切り誤差が生じる．ここでは (16) 式で $c \geq 2$ とし，(11) でも $|z - z_1| > 2(R + |z_0 - z_1|)$ となるようにすると，相対精度 ε を実現させるためには，定理 1，2 における展開の項数 p は

$$p \approx -\log_2 \varepsilon$$

まで計算する必要がある．

4.5 計算量

行列ベクトル積 (に相当する計算) にかかる計算量を示す．簡単のため，境界要素数 n は 2 の巾乗とする．先に述べたように，計算するには次の 2 つの手続きが必要となる．

手続き 1　種々のクラスタを作る

手続き 2　各 x_i ごとにクラスタを適当に組み合わせ，さらに近い領域 の計算をして，それらを加える

手続き 1 では，まずレベル 1 のクラスタを，境界要素を 2 ずつまとめて $n/2$ 個作る．その手間は，$O(np)$ である．次に定理 2 により C_{T_λ} を平行移動をして順次まとめていく．その回数は $n/2$ 回で，手間は $O(np^2)$ である．手続き 2 での計算量は境界の形状によって変わってくるが，各 x_i における far 領域のクラスタ数を T とすると，手間は $O(nTp)$ である．

なお [1] [2] では多重極展開を局所展開に変換して，いわば "far 領域へ与える影響" から "far 領域から受ける影響" を高レベルのクラスタから順次計算していくので，上の様に各 x_i に対してクラスタを組み合わせることはしない．この場合計算量は $O(np^2)$ となるが，T が p と同程度なら計算量は上記の方法とさほど変らない．

5 数値実験

Fig. 5 に示した領域の混合境界条件のポテンシャル問題に対して，境界要素数を変化させて 3 通りの方法で数値実験を試みた．要素の分割は等分割とする。また積分の計算には 4 点の Gauss 公式を使用した．ここで，2 次元問題で 1000 以上の境界要素を使うことは通常はあまり意味がないかもしれないが，ここでは手法の比較のために行なった．

第 1 の方法は，境界の離散化を行って連立 1 次方程式を導き，それを直接法 (LU 分解) で解く従来の解法 (LU 分解法) である．ピボットの部分選択は行うが，メモリ使用の効率を上げる工夫はしていない．

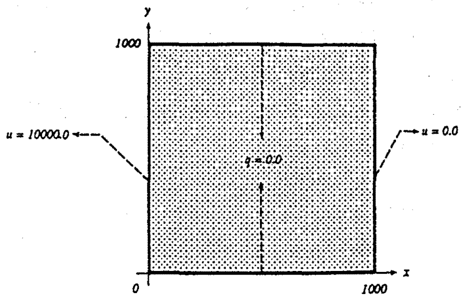

Fig. 5 mixed problem

第 2 の方法は，連立 1 次方程式の構成は第 1 の方法と同じであるが，解法として Bi-CGSTAB 法を用いる方法 (単純反復法) である．前処理は，対角項によるスケーリングのみ行なっている．反復の収束条件は残差ベクトルを r として

$$\frac{\|r\|}{\|b\|} < 1.0 * 10^{-6} \quad 但し \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

とした．

第 3 の方法は，Bi-CGSTAB 法の行列ベクトル積を前節で述べたように近似的に計算をする方法 (多重極展開法) である．前節にある c, p は $c = 2, p = 21$ とし，前処理や反復の終了条件は単純反復法の場合と同じにした．

以上のような設定のもとで，ワークステーション DEC3000 (model300AXP) を用いた CPU 時間を実測した結果を示す．プログラムは C 言語を用いた．

境界要素数 n に対する各手法の CPU 時間 (秒) を Fig. 6 に示す．但し，曲線は第 1，第 2，第 3 の各手法の CPU 時間を，(反復法の反復数は $O(\sqrt{n})$ として) 各々 $an^3, bn^2\sqrt{n}, cn\sqrt{n}$ と仮定してデータから最小 2 乗推定して得たものである．Fig. 7 は Fig. 6 の両対数表示である．

境界要素数が約 800 までは LU 分解法と単純反復法では解を得るまでの時間に大きな差はないが，要素数がそれより大きくなると単純反復法の方が優位に立つ．

また Fig. 7 より，多重極展開法のグラフは他の 2 つよりも傾きが小さいが，分割数が小さいうちは多重極展開法は他の方法よりも CPU 時間が大きい．単純反復法と比較すると，外挿曲線上では分割要素数が約 3000 までは単純反復法の方が優位にたつ．しかし実際にはメモリの制約のため，方法 1,2 では 2500 要素が限界だった．それ以上では，仮想記憶装置とのデータのやりとりに時間がかかるため事実上実行が不可能だった．計算の経過時間 (wall clock time) にはばらつきがあるが，境界要素数が 2500 のときで，LU 分解法では 255 分，単純反復法で 93 分，多重極展開法では 14 分 (それぞ

れ3回の実験の平均値)であった.これは多重極展開法は要するメモリが少なくて済むので,主記憶だけで計算が済むのに対して,他の手法は拡張記憶(ディスク)にアクセス必要があるからである.このことは多重極展開法の大規模問題に対する有効性を示している.

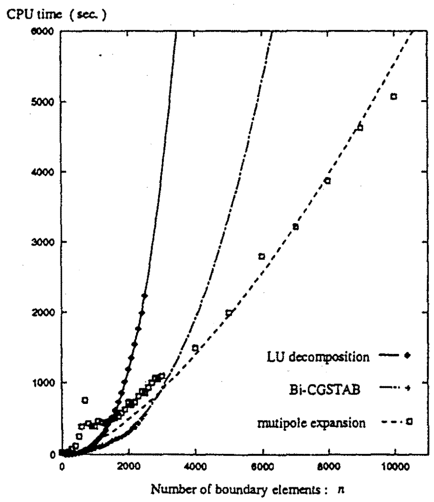

Fig. 6 Comparison of CPU time

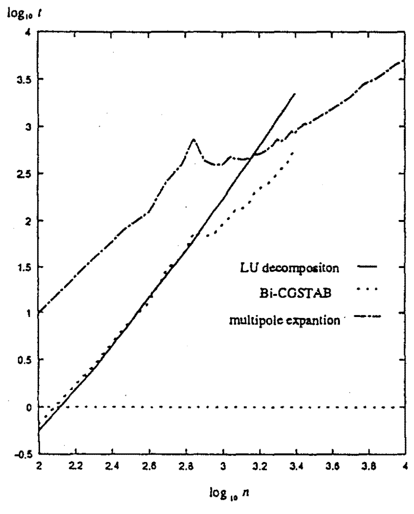

Fig. 7 Comparison of CPU time in log scale

最後に境界要素数が2500のときの数値解の誤差について調べた.厳密解,LU分解法,単純反復法,多重極展開法の解をそれぞれ$ANS[i], LU[i], ITE[i], MU[i]$ $(i = 1, \cdots, 2500)$とする.直接法との解の相対誤差は,

$$\max_i \left| \frac{ITE[i] - LU[i]}{LU[i]} \right| = 0.005274$$
$$\max_i \left| \frac{MU[i] - LU[i]}{LU[i]} \right| = 0.002671$$

となった.また厳密解と比べた相対誤差については,

$$\max_i \left| \frac{LU[i] - ANS[i]}{ANS[i]} \right| = 0.151998$$
$$\max_i \left| \frac{ITE[i] - ANS[i]}{ANS[i]} \right| = 0.156441$$
$$\max_i \left| \frac{MU[i] - ANS[i]}{ANS[i]} \right| = 0.153659$$

となった.なお,厳密解との誤差が大きくなるのは角付近の要素であり,各角付近の4要素の解を除いた厳密解との誤差はいずれも2%未満となる.

6 まとめ

以上,2次元のラプラス方程式の境界値問題を例にとって境界要素法の多重極展開法による高速化を試みた.今回の実験結果では,境界要素数が小さいうちは従来法より計算時間がかかるが,要素数が大きくなるにつれ従来の直接法,単純反復法に比べて優位になる.特に,要素数が非常に大きくなるとメモリの制約から多重極展開法のみが現実的な時間で解を与える.

今後は手法の高速化や3次元問題への適用を検討して行きたい.

謝辞

本研究は文部省科学研究補助金の助成を受けている.

参考文献

[1] Rokhlin, V. : Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory, *J. Comput. Phys.* , 60, (1985), pp. 187-207.

[2] Greengard, L. F. : The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems, (1988), MIT Press.

[3] van der Vorst, H. A. : Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems, *SIAM J. Stat. Comput.* , 13, No. 2, (1992), pp. 631-644.