

## 変数変換型の自動数値積分法とその誤差解析

國廣 昇\*, 速水 謙†, 杉原 正顕‡

# AUTOMATIC NUMERICAL INTEGRATION USING VARIABLE TRANSFORMATION AND ITS ERROR ANALYSIS

Noboru KUNIHIRO, Ken HAYAMI and Masaaki SUGIHARA

Numerical integration governs the accuracy of the Boundary Element Method (BEM). When the source point is near the boundary element, the boundary element integrals cannot be computed accurately using ordinary methods such as the Gauss-Legendre rule, because of the near singularity of the integrand.

To overcome this problem, the PART method was introduced, where the numerical integration is performed after weakening the nearly singularity using an adaptive variable transformation. However, it is not easy to apply automatic numerical integration to the previous PART method, since it is based on the Gauss-Legendre rule.

In this paper we propose the  $\log L_2$ -DE transformation in combination with the truncated trapezium rule for the radial variable integration in the PART method.

Numerical experiments on model integrals for 2D and 3D potential problems show that the  $\log L_2$ -DE transformation is superior to the DE (double exponential) transformation, and is almost as good as previous transformations based on the Gauss-Legendre rule. The proposed method is easily applied to automatic numerical integration, since it is based on the trapezium rule. Also, theoretical error analysis using complex function theory is performed which agrees well with the numerical results and explains the effectiveness of the proposed transformation.

Key Words: Boundary Element Method, PART method,  $\log L_2$ -DE transformation, truncated trapezium rule, complex function theory, automatic numerical integration, model integral

### 1 はじめに

境界要素法において積分の計算は同手法の精度を支配するとともに、その計算時間の大きな割合をしめる。2次元および3次元の境界要素法ではそれらの積分は一般に

$$I = \int_S \frac{f}{r^\alpha} dS \quad (1)$$

もしくは

$$I = \int_S f \log r dS \quad (2)$$

の形で表される。ここで  $S$  は解析する領域の境界を離散化したときの一つの境界要素、 $r$  は空間に固定されたソース点  $x_s$  と  $S$  上の点  $x$  の間の距離、 $\alpha$  は自然数、 $f$  は  $x$  の関数で、後述の近特異性を持たないものとする。

$S$  が直線要素 (2次元)、平面要素 (3次元) で、ポテンシャル問題等の限られた問題に関しては (1)(2) 式は解析的に積分できるが、 $S$  が一般の曲線、曲面要素の場合、また一般の問題に対しては数値積分に頼らざるを得ない。ところが、ソース点  $x_s$  が  $S$  に近い場合は (1)(2) 式の被積分関数は  $x_s$  の付近で急激に変化するいわゆる近特異性をもつため、通常の数値積分法 (Gauss-Legendre 法) では十分な精度は望めない。この問題を克服するために種々の方法が提案されているが、そのうちの一つに PART 法<sup>(1,2)</sup>がある。これは近特異性を緩和するような変数変換を行なった後に数値積分を行なう手法である。ところが、今まで提案されている変数変換は数値積分法として Gauss-Legendre 公式を用いていたため、自動的に積分精度を保証するいわゆる自動数値積分法を効率的に適用するのが困難であった。

\*非会員, 東京大学工学系研究科計数工学専攻, 〒113 東京都文京区 本郷 7-3-1, TEL 03-3812-2111

†学識会員, 東京大学工学部計数工学科, 同上

‡非会員, 東京大学工学部物理工学科, 同上

ここで、本論文では数値積分に台形公式を用いる新しい変数変換として  $\log L_2$ -DE 変換を提案し、その有効性を理論および数値実験により検証する。

## 2 2次元および3次元境界要素法のモデル積分

3次元ポテンシャル問題に対する PART 法では、曲面境界要素を平面多角形に写像し、その平面多角形上に、 $S$  上でソース点  $x_s$  に最も近い点に対応する点を中心とした極座標  $(\rho, \theta)$  を導入する。その結果生じる動径方向の積分は次のような1変数の積分でモデル化できる<sup>(1, 2)</sup>：

$$I = \int_0^{\rho_j} \frac{\rho^\delta}{r^\alpha} d\rho \quad (3)$$

同様に、2次元問題では曲面境界要素を直線分に写像し、(3) 式もしくは

$$I = \int_0^{\rho_j} \log r d\rho \quad (4)$$

のモデル積分が得られる<sup>(3)</sup>。ここで  $r = \sqrt{\rho^2 + d^2}$  である。ただし、 $d$  はソース点  $x_s$  と境界要素との距離(ソース点距離)である。また  $\rho_j$  は動径方向の積分の上限で、角度  $\theta$  によって定まる。今後、便宜上(4) 式の場合を  $\alpha = 0, \delta = 0$  の場合と呼ぶ。

## 3 従来の変換

PART 法では次に動径方向(及び、偏角方向)の変数変換を施して積分核の近特異性を緩和した後、数値積分を行なう。

従来動径方向の変数変換として提案されているものに以下のものがある<sup>(1, 2)</sup>。

Gauss-Legendre 公式を用いるもの：

$$R(\rho) = \log \sqrt{\rho^2 + d^2} \quad (\log L_2 \text{ 変換}) \quad (5)$$

$$R(\rho) = \sqrt{\rho^2 + d^2}^{-\frac{1}{m}} \quad (L_2^{-\frac{1}{m}} \text{ 変換}) \quad (6)$$

$$R(\rho) = \log(\rho + d) \quad (\log L_1 \text{ 変換}) \quad (7)$$

$$R(\rho) = (\rho + d)^{-\frac{1}{m}} \quad (L_1^{-\frac{1}{m}} \text{ 変換}, m = 5) \quad (8)$$

台形公式を用いるもの：

$$\rho(R) = \frac{\rho_j}{2} (1 + \tanh R) \quad (\text{SE 変換}^{(7)}) \quad (9)$$

$$\rho(R) = \frac{\rho_j}{2} \left\{ 1 + \tanh \left( \frac{\pi}{2} \sinh R \right) \right\} \quad (\text{DE 変換}^{(7)}) \quad (10)$$

特に、(7)、(8) 式が有効であるが、Gauss-Legendre 公式に基づいているので自動数値積分が適用しにくい。(通常の境界要素法のプログラムでは、ソース点  $x_s$  と積分する境界要素  $S$  の間の距離(ソース点距離： $d$ )

に応じてあらかじめ積分点と重みのテーブルを用意しておく。)一方、(9)、(10) 式は、台形公式を用いるので自動数値積分に向いているが(7)、(8) 式に比べて効率が悪い。

## 4 $\log L_2$ -DE 変換

ここで、(5) 式と(10) 式を組み合わせた  $\log L_2$ -DE 変換に台形公式を適用することを提案する。ここではまず、(3)、(4) 式のモデル積分を  $\log L_2$ -DE 変換を用いて計算することを考える。

Step 1.  $\log L_2$  変換を行なう。すなわち、

$$R(\rho) = \log \sqrt{\rho^2 + d^2} \quad (11)$$

$$R(x) = \frac{\{R(\rho_j) - R(0)\}x + R(\rho_j) + R(0)}{2} \quad (12)$$

と変換する。モデル積分は次のようになる：

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\rho^\delta}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^\alpha} \frac{d\rho}{dR} \frac{dR}{dx} dx \quad (13)$$

$$= \int_{-1}^1 b \left( a^x - \frac{1}{a} \right)^{\frac{\delta-1}{2}} a^{\frac{2-\alpha}{2}x} dx \quad (14)$$

$$\equiv \int_{-1}^1 g(x) dx \quad (15)$$

$$\text{ただし、} b = \frac{\log a}{2} (\sqrt{\rho_j^2 + d^2} \cdot d)^{\frac{\delta-\alpha+1}{2}}, \\ a = \frac{\sqrt{\rho_j^2 + d^2}}{d}$$

Step 2. DE(二重指数)<sup>(4)</sup>変換する。

$$x = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) \text{ と変数変換する。}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{dx}{du} du \quad (16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right)\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh u}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right)} du$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \quad (17)$$

Step 3. 台形公式を適用する。

$$I = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh) \quad (18)$$

実際に数値積分する際は、無限和を有限和で打ち切る。他にも、 $L_2^{-\frac{1}{m}}, \log L_1, L_1^{-\frac{1}{m}}$  の各変換と DE 変換を組み合わせた変換も考えられる。

## 5 数値実験結果

次に、モデル積分での数値実験結果により、 $\log L_2$ -DE 変換の有効性を検証する。 $\rho_j = 1.0$  とし実験を行なう。

実験方法

積分面と、ソース点との距離  $d$  を 10 から  $10^{-3}$  まで変化させて、次の条件を満たす最小の積分点数  $n$  を求める。

条件

$$\left| \frac{I - I_n}{I} \right| < \varepsilon \quad (19)$$

$I$  は積分の真の値。  $I_n$  は積分点数  $n$  の時の積分値。

ここでは  $\varepsilon = 10^{-6}$  とおく。

### 5.1 3次元ポテンシャル問題の場合

3次元ポテンシャル問題で、平面要素の場合、モデル積分は(3)式で  $\alpha = 1, \delta = 1$  および  $\alpha = 3, \delta = 1, 2$  および  $\alpha = 5, \delta = 1, 2$  のみ現れるので<sup>(2)</sup>この5通りで比較する。比較する変換は、DE,  $\log L_2$ -DE,  $\log L_1$ -DE,  $L_2^{-1/6}$ -DE,  $L_1^{-1/2}$ -DE,  $\log L_2$ ,  $\log L_1$ ,  $L_1^{-1/2}$  各変換の8個である。Table 1~8に各手法の要する積分点数を示す。

Table 1. DE Transformation

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	1	15	18	26	32	34
	3	15	19	36	52	70
3	2	15	18	32	47	63
	5	15	19	36	51	67
5	1	15	20	40	50	68
	2	15	20	40	50	68

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

Table 2.  $\log L_2$ -DE Transformation

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	1	14	15	18	20	20
	3	14	15	18	20	20
3	2	14	14	16	18	18
	5	14	16	20	20	18
5	1	14	16	22	23	21
	2	14	16	22	23	21

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

Table 3.  $\log L_1$ -DE Transformation

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	1	14	18	24	21	18
	3	14	20	32	39	39
3	2	14	18	28	33	36
	5	14	19	33	33	30
5	1	14	20	33	37	36
	2	14	20	33	37	36

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

### 5.2 2次元境界要素法の場合

2次元境界要素法で直線要素を用いる場合、(3)(4)式のモデル積分は  $\alpha = 0, \delta = 0$  および  $\alpha = 2, \delta = 0, 1$  および  $\alpha = 4, \delta = 0, 1$  の5通りが現れる<sup>(3)</sup>。Table 9に  $\log L_2$ -DE 変換で必要な積分点数を示す。

Table 4.  $L_2^{-1/6}$ -DE Transformation

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	1	14	15	18	20	22
	3	14	13	16	20	19
3	2	14	14	15	17	17
	5	14	16	19	18	18
5	1	14	16	20	22	21
	2	14	16	20	22	21

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

Table 5.  $L_1^{-1/2}$ -DE Transformation

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	1	15	17	20	22	29
	3	14	20	27	33	32
3	2	15	19	25	28	28
	5	14	21	31	32	29
5	1	15	19	31	32	29
	2	15	19	31	32	29

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

Table 6.  $\log L_2$  Transformation

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	1	2	3	4	5	6
	3	2	3	4	5	6
3	2	55	55	64	72	80
	5	2	3	6	8	10
5	1	55	64	120	170	200
	2	55	64	120	170	200

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

Table 7.  $\log L_1$  Transformation

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	1	3	5	8	9	8
	3	3	5	12	16	20
3	2	3	6	11	11	16
	5	3	6	14	20	25
5	1	3	6	14	20	20
	2	3	6	14	20	20

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

Table 8.  $L_1^{-1/2}$  Transformation

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	1	3	5	7	8	11
	3	3	5	9	14	16
3	2	3	6	10	12	14
	5	3	6	11	16	20
5	1	3	6	12	16	20
	2	3	6	12	16	20

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

Table 9.  $\log L_2$ -DE Transformation (2 dimension)

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
0	0	13	15	19	21	23
	2	13	14	18	21	25
2	1	14	14	14	14	14
	4	12	16	21	21	21
4	1	14	16	20	21	20
	2	14	16	20	21	20

( $n$  for  $\varepsilon < 10^{-6}$ )

### 5.3 高次要素の場合

(3次元境界要素法で)高次要素を用いた場合のモデル積分に対して、 $\log L_2$ -DE変換、 $L_2^{-1/10}$ -DE変換が必要となる積分点数は Table 10,11 のようになる。

Table 10.  $\log L_2$ -DE Transformation (higher order elements)

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	2	14	15	19	19	20
	3	15	16	19	20	18
3	3	15	15	15	19	19
	4	15	14	17	19	20
	5	15	15	19	20	18
5	3	15	15	20	21	23
	4	15	14	19	20	21
	5	15	15	15	16	19

( $n$  for  $\epsilon < 10^{-6}$ )

Table 11.  $L_2^{-1/10}$ -DE Transformation (higher order elements)

$\alpha$	$\delta$	$d$				
		10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
1	2	14	15	18	21	21
	3	15	16	18	19	20
3	3	15	13	17	18	20
	4	15	14	18	21	21
	5	15	15	19	19	20
5	3	15	15	18	22	21
	4	15	14	19	20	20
	5	15	15	15	18	20

( $n$  for  $\epsilon < 10^{-6}$ )

### 5.4 実験結果の考察

$\log L_2$ -DE 変換及び  $L_2^{-1/10}$ -DE 変換は、台形公式に基づいた他の変換 (DE,  $\log L_1$ -DE,  $L_1^{-1/3}$ -DE 変換) に勝っている。例えば、従来の二重指数型変換 (DE 変換) に比べると約半分の積分点数ですむ。また、Table 6 の  $\log L_2$  変換では、(14) 式の被積分関数が  $\delta$  が偶数の時  $x = -1$  で分岐点を持つため、多くの積分点数が必要なのに対し、Table 2 の  $\log L_2$ -DE 変換では、 $\log L_2$  変換に、さらに DE 変換を施すことによりこの問題が克服されていることがわかる。一方、Gauss-Legendre 公式に基づいた  $L_1^{-1/3}$ 、 $\log L_1$  変換と比較すると  $\log L_2$ -DE 変換と  $L_2^{-1/10}$ -DE 変換は必要な積分点数は若干多めだが、次節で述べるように容易に自動数値積分が適用できる点で Gauss-Legendre 型の変換より優っている。

$\log L_2$ -DE 変換と  $L_2^{-1/10}$ -DE 変換を比較すると、高次要素の場合まで含めると若干  $\log L_2$ -DE 変換が優っている。Table 9 より、 $\log L_2$ -DE 変換は 2次元境界要素法にも適用できることがわかる。

## 6 $\log L_2$ -DE 変換による自動数値積分

次に、 $\log L_2$ -DE 変換したあとで台形公式を用いるときの自動数値積分の方法について具体的に述べる。

$n$  点公式:

$$I_h = h \left[ \frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{n-2} f(a + jh) + \frac{1}{2} f(b) \right] \quad (20)$$

ただし、 $h = \frac{b-a}{n-1}$  とする。

- (18) 式を打ち切る積分範囲  $[a, b]$  を決定し、(20) 式により積分値を求める。
- きざみ幅  $h$  を半分にし、積分の近似値を求める。

- 収束条件

$$\left| \frac{I_{h/2} - I_h}{I_{h/2}} \right| < \epsilon \quad (21)$$

を満たしているか調べる。

- もし満たしていれば、収束したとみなし処理を終了。

もし満たしていなければ、2. へ行く。

次に、台形公式を用いて自動積分を行なうとき、Gauss-Legendre 公式を用いて自動積分を行うときとの比較をする。

台形公式を用いる場合は  $2n - 1$  点公式の積分点は  $n$  点公式の積分点を全て含むので  $2n - 1$  点で積分を終了した段階での総積分点数は (従って、関数値の計算回数も)  $2n - 1$  で抑えられる<sup>(5)</sup>。

一方、Gauss-Legendre 公式では一般に、異なる積分点数の公式では積分点が一致しないので、前回使った積分点や関数値は使えず、自動積分を行なおうとすると効率が悪い。ただし、 $n$  点の Gauss-Legendre 法に  $n + 1$  点を追加する Gauss-Kronrod<sup>(6)</sup> の公式があるが Gauss-Legendre の意味での  $(2n + 1)$  点での最適性はない。前節の結果は、より簡便な台形公式と  $\log L_2$ -DE 変換を組み合わせることにより、精度と効率の良い自動数値積分法を構築できることを示している。

## 7 理論誤差解析

次に、台形公式の理論誤差解析の方法<sup>(7)</sup>を紹介し、実際に DE 変換、 $\log L_2$ -DE 変換、 $\log L_1$ -DE 変換、 $L_2^{-1/10}$ -DE 変換、 $L_1^{-1/3}$ -DE 変換の理論誤差を求める。

### 7.1 誤差の特性関数

求める積分の形を  $I = \int_a^b f(x) dx$  とし、その数値積分による近似を  $I_n = \sum_{j=1}^n A_j f(a_j)$  とする。

定理 1  $f(z)$  が実軸上で正則ならば, 積分誤差  $\Delta I = I - I_n$  は次の式で表される:

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Phi_n(z) f(z) dz \quad (22)$$

ここで

$$\Phi_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{z-x} - \sum_{j=1}^n A_j \frac{f(a_j)}{z-a_j} \quad (23)$$

であり, 積分路  $C$  は複素平面の実軸の上を左方向に下を右方向に走る路であり,  $f(z)$  は積分路  $C$  の内側 (実軸に近い側) で正則であるとする。

(22) 式により積分誤差を厳密に評価するのは困難であるので, 鞍点法を用いて  $n \gg 1$  での漸近評価を行なう。

## 7.2 鞍点法

鞍点法とは, 複素積分において積分路  $C$  を被積分関数  $F(z)$  の鞍点を通して変形して積分を近似的に計算する方法である。

被積分関数  $F(z)$  の鞍点を  $z = s_1, s_2, \dots$  とする。鞍点の近傍で  $F(z) = \exp G(z)$  と表すことにする。積分路  $C$  を次々峠を越える形でこれらの鞍点を通してると, 積分は近似的に

$$I \approx \sum_j \frac{\sqrt{2\pi} F(s_j)}{\sqrt{e^{\mp \pi i} G''(s_j)}} \quad (24)$$

と計算できる。

## 7.3 台形公式の特性関数

台形公式の特性関数  $\Phi_n(z)$  は,  $h$  を刻み幅とすると

$$\Phi_n(z) \approx \begin{cases} +2\pi i \exp\left(+\frac{2\pi iz}{h}\right), & \text{Im } z > 0 \\ -2\pi i \exp\left(-\frac{2\pi iz}{h}\right), & \text{Im } z < 0 \end{cases} \quad (25)$$

で与えられる。積分誤差

$$|\Delta I| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi_n(z) f(z) dz \right| \quad (26)$$

は, 近似的に

$$|\Delta I| \approx \sum_j \frac{\sqrt{2\pi} |\Phi_n(s_j) f(s_j)|}{\sqrt{\left| \frac{d^2}{dz^2} [\log \{\Phi_n(z) f(z)\}] \right|_{z=s_j}}} \quad (27)$$

となる。鞍点  $z = s_j$  の位置は,

$$\frac{d}{dz} \{\Phi_n(z) f(z)\} = 0 \quad (28)$$

から決められる。

定理 2 誤差に寄与するのは, 鞍点の内でも最も実軸に近いもの一つもしくはその複素共役の二つである。

(証明)

一般的に鞍点は複数である。鞍点を  $z = A_j + B_j i$  とする。ただし  $B_j > 0$  とする。

$$|\Delta I| \sim \sum_j \left| \exp \left\{ \frac{2\pi i}{h} \times (A_j + B_j i) \right\} \right| \quad (29)$$

$$\sim \sum_j \exp \left( -\frac{2\pi B_j}{h} \right) \quad (30)$$

$$\sim \exp \left\{ -\frac{2\pi B}{h} \right\} \quad (31)$$

となる。ただし  $B \equiv \min_j \{B_j\}$  である。

$B_j < 0$  の場合も同様である。  $\square$

そして, その鞍点の実軸から遠ければ遠いほど誤差は急速に小さくなる。

## 7.4 鞍点の位置の評価

鞍点は特異点の近傍にあるので, 以後断りのない限り鞍点の位置を特異点の位置で近似する<sup>(4)</sup>。

前述の 5 つの DE 変換に基づく変換の実軸にもっとも近い特異点の満たすべき方程式を以下に列挙する。

### 1. DE 変換

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) = -1 + \frac{d}{\rho_j} i$$

### 2. $\log L_2$ -DE 変換

$\delta$  が偶数の時

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) = -1 + \frac{2n\pi}{\log a} i \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$$

$\delta$  が奇数の時  $u = \frac{\pi}{2} i$

$$\text{ここで } a = \frac{\sqrt{\rho_j^2 + d^2}}{d}$$

### 3. $\log L_1$ -DE 変換

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) = -1 + \frac{\log 2}{\log a'} + \frac{\pi}{2 \log a'} i$$

$$\text{ここで } a' = 1 + \frac{d}{a}$$

### 4. $L_2^{-\frac{1}{m}}$ -DE 変換

$\delta$  が偶数の時

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) = -\frac{a^{\frac{1}{m}} - (2 \cos \frac{\pi}{m} - 1)}{a^{\frac{1}{m}} - 1} + \frac{2}{a^{\frac{1}{m}} - 1} \sin \frac{\pi}{m} i$$

$\alpha > 1$  の時

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) = \frac{a^{\frac{1}{m}} + 1}{a^{\frac{1}{m}} - 1}$$

$\delta$  が偶数で,  $\alpha > 1$  のときは上の 2 式を満たすもの内で最小のもの。

その他の場合  $u = \frac{\pi}{2} i$

### 5. $L_1^{-\frac{1}{m}}$ -DE 変換

$\alpha - \delta - 1 > 0$  のとき

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) = \frac{1 + \Delta^{\frac{1}{m}} - 2^{1-\frac{1}{m}} \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + 2^{1-\frac{1}{m}} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) i}{1 - \Delta^{\frac{1}{m}}}$$

その他の場合は上の式と

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) = \frac{1 + \Delta^{\frac{1}{m}}}{1 - \Delta^{\frac{1}{m}}}$$

を満たすものうちもっとも実軸に近いもの。

(ただし,  $\Delta = 1/a'$ )

一般に,

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) = z_0 \quad (32)$$

の解で実軸に最も近いものは次のようになる<sup>(4)</sup>:

$$u = A + \arcsin \frac{1}{\pi} \left\{ \sqrt{s^2 + \left(t + \frac{\pi}{2}\right)^2} - \sqrt{s^2 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2} \right\} i \quad (33)$$

ただし,  $s = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+z_0}{1-z_0} \right|, t = \frac{1}{2} \arg \frac{1+z_0}{1-z_0}$

上の式を利用して, 各変換の実軸に最も近い特異点の実軸からの距離  $B$  (31 式参照) を縦軸に, ソース点からの距離  $d$  を横軸にしてプロットする (Fig. 1)<sup>1</sup>. ただし, 任意の  $\alpha, \delta$  の組合せのうちで, 最も実軸に近くなり得る  $\alpha, \delta$  の組を採用した.

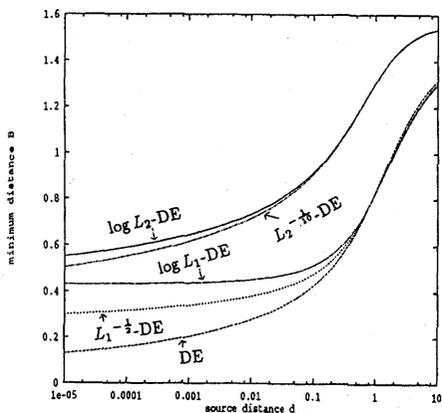


Fig. 1. Distance between the nearest singular point and the real axis

Fig.1 より,  $\log L_2$ -DE 変換は,  $L_2^{-1/10}$ -DE 変換以外の 3 つの変換と比較した場合, 圧倒的に有利であり, 5 節の数値実験結果を良く反映している.

$\log L_2$ -DE 変換で,  $\delta$  が奇数の時は, 特異点が  $u = \frac{\pi}{2} i$  にあるが, 特異点の位置と鞍点の位置がかなりずれている. そこで, 特異点の回りでテーラー展開をし, より精密に鞍点を求めると理論誤差

$$|\Delta I_h| \sim \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{h} + \frac{3\sqrt{3}}{2} (2\pi(\log a)|\delta - \alpha + 1|)^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{3}{2}} \right\} \quad (34)$$

となり<sup>(3)</sup>これも Table 2 の数値実験結果を良く反映している.

以上で得たきざみ幅  $h$  に関する理論誤差の式 (31), (34) 式は定量的にも数値実験結果と良くあっている.

<sup>1</sup>  $L_1^{-1/10}$ -DE 変換の内では最適な時  $m = 2, L_2^{-1/10}$ -DE 変換の内では最適な時  $m = 10$  の時のみをしるした.

## 8 まとめ

本論文では, 境界要素法で生じる近特異積分の数値積分法 (PART 法) において, 近特異性を緩和する変数変換として  $\log L_2$ -DE 変換を提案した. この変換は, 従来の Gauss-Legendre 公式用の変換 ( $\log L_1, L_1^{-1/2}$  変換) と比べた場合, 収束に要する積分点数は, 若干増えるが, 台形公式に基づいているので, 容易に自動数値積分が適用できる点で優れている.

また, 同じ台形公式用の DE (二重指数) 変換に基づく変換と比べた場合,  $\log L_2$ -DE 変換は, 約半分の積分点数にですむことを数値実験により示し, 複素関数論を用いた理論誤差解析によりそれを裏付けた.

## 謝辞

本研究は文部省科学研究費補助金の助成を受けている.

## 参考文献

- (1) Hayami, K.: *A Projection Transformation Method for Nearly Singular Surface Boundary Element Integrals*, C.A.Brebbia and S.A.Orszag (eds.), *Lecture Notes in Engineering*, Vol.73, (1992), Springer-Verlag.
- (2) Hayami K. and Matsumoto, H.: *Quadrature for Nearly Singular Boundary Element Integrals*, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.13, No.2, (1994) (in print).
- (3) 國廣 昇: 境界要素法における変数変換型の自動数値積分法, 東京大学工学部計数工学科, 卒業論文, (1994).
- (4) Takahasi, H. and Mori, M.: *Double Exponential Formulas for Numerical Integration*, *Publications of R.I.M.S., Kyoto University* Vol. 9, (1974), pp.721-741.
- (5) 森 正武: 数値解析法, (1984), 朝倉書店.
- (6) Piessens, R., de Doncker-Kapenga, E., Überhuber, C.W., Kahaner, D.K.: *QUADPACK - A Subroutine Package for Automatic Integration* - (1983), Springer-Verlag.
- (7) 森 正武: 数値解析と複素関数論, (1975), 筑摩書房.