

双対相補変分原理による正則境界積分法

— 2次元ラプラス問題への応用 —

加川幸雄* 孫永浩**

REGULAR BOUNDARY INTEGRAL SOLUTION WITH DUAL AND COMPLEMENTARY VARIATIONAL FORMULATIONS APPLIED TO TWO-DIMENSIONAL LAPLACE PROBLEMS

Yukio KAGAWA and Yonghao SUN

Regular Boundary Integral Elements are employed for the dual and complementary variational formulations of Laplace problems. In this method, the problems are defined only on the boundary as usual, but like in the Charge Simulation Method(CSM), the source terms are arranged outside the domain so that the singular integrals can be avoided. Some Laplace problems are analyzed and the usefulness is discussed in comparison with direct BEM. The scalar potential and electric displacement vector potential functions are used in the dual and complementary formulations, with which the upper and lower bounds of the system energy or the capacitance can also accurately be evaluated.

key words: Boundary Element Method, Charge Simulation Method, Dual and Complementary Energy, Upper and Lower Bounds

1. 緒言

境界要素法 (BEM) と代用点荷法 (CSM)⁽¹⁾ は多くの共通点を持っているが、その境界表現の取り扱いが異なっている。BEMでは境界積分方程式を直接積分するために境界上にとられた節点間を内挿関数で近似し、節点に関する連立1次方程式の形の近似境界積分式を得るのに対し、CSMにおいては仮想電荷点を境界の周囲に配置し、境界上にとられた節点でだけ境界条件を満足する様なグリーン関数の1次結合で近似する選点型の境界表現を得る。境界要素法においてもこれと類似に基本解のソース点を対象領域の外に取り、特異積分を避ける正則境界積分がPattersonら⁽²⁾により提案され、流体問題及び静弾性問題に適用されている。本間ら⁽³⁾はまた移流拡散問題などへの応用を試みている。この方法はソース点を領域外にとる以外は通常境界要素法と同じである。そのためCSMと同様特異積分を回避できるのが正則境界積分の特徴である。

通常のBEMと正則直接法は境界付近で誤差が大きいことが知られている。CSMは境界上の選点では誤差は少ないが、選点以外では誤差が大きくなる。しかも、ソース点 (仮想電荷点) の選定によって誤差が異なり、適切な位置に配置しなければ精度の高い解が得られないことがある。

著者らはさきに変分原理による境界要素法を提案し、その有効性を確認してきた^{(4),(5)}。しかしそこで現れる特異積分の評価は必ずしも容易ではない。本論文では理論解の得られる二つのLaplace場を解き、計算精度について検討を行う。まず、変分原理に基づいた境界要素表現を示し、特異積分を避けるために正則境界積分を導入する。次に、変分原理によって定式化された二つの双対相補境界積分形解法により系エネルギー及び静電容量の下限と上限を求める。最後に精度のよい系エネルギー及び静電容量が下限と上限の平均値として求められることを示す。

2. 変分原理による境界要素法の定式化

静電界問題において、ポテンシャルを ϕ とし、媒質の誘電率を ϵ とすると、ラプラス場は次の式で与えられる。

支配方程式と境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \nabla^2 \phi &= 0 & \text{in } \Omega \\ \phi &= \hat{\phi} & \text{in } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \hat{q} & \text{in } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 学識会員、 岡山大学工学部電気電子工学科、 〒700 岡山市津島中3丁目1番1号 TEL (086)251-8130
** 非会員、 岡山大学工学部電気電子工学科、 〒700 岡山市津島中3丁目1番1号 TEL (086)251-8130

ここで、 n は境界の法線方向単位ベクトル、 $\Gamma=(\Gamma_1+\Gamma_2)$ は領域 Ω を囲む全境界、 $\hat{\phi}$ は境界 Γ_1 上のポテンシャルで既知、 \hat{q} は境界 Γ_2 上のフラックスで既知である。(1)式に対するエネルギー汎関数は

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon (\nabla \phi)^2 d\Omega - \int_{\Gamma_2} \varepsilon \phi \hat{q} d\Gamma \quad (2)$$

ϕ を領域 Ω で定義されるポテンシャル、 $\bar{\phi}, \bar{q}$ を境界 Γ だけで定義されるポテンシャルとフラックスとすれば、(2)式を次のようにハイブリッド形の変分表現で表すことができる⁽⁵⁾。

$$\begin{aligned} \Pi(\phi, \bar{\phi}, \bar{q}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon (\nabla \phi)^2 d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \varepsilon (\phi - \bar{\phi}) \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \varepsilon \bar{\phi} \hat{q} d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 \hat{q} は境界 Γ_2 に加わる駆動項であり、 Γ_1 上では $\hat{\phi}$ の拘束が課せられている。(3)式を $\phi, \bar{\phi}, \bar{q}$ に関してそれぞれ変分を取れば、

ラプラス支配方程式

$$\varepsilon \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega$$

境界条件式

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} && \text{on } \Gamma \\ \bar{\phi} &= \hat{\phi} && \text{on } \Gamma_1 \\ q &= \hat{q} && \text{on } \Gamma \\ \bar{q} &= \hat{q} && \text{on } \Gamma_2 \end{aligned}$$

が得られる。(3)式の第一項を部分積分すれば、領域積分は消滅して、境界に関する汎関数

$$\begin{aligned} \Pi(\phi, \bar{\phi}, q, \bar{q}) = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \varepsilon \phi q d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \varepsilon (\phi - \bar{\phi}) \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \varepsilon \bar{\phi} \hat{q} d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる。次に境界要素法による離散化表現を考える。 L 個の仮想電荷 β_j を領域の外側に配置すれば、領域内部の任意の点 $D(i)$ におけるポテンシャルはそれぞれの β_j について既知関数の一次結合として次の形の試験関数を想定することができる。

$$\phi_i = \sum_{j=1}^L \phi_{ji}^* \beta_j = \{\phi^*\}_i^T \{\beta\} \quad (5)$$

ただし、

$$\{\phi^*\}_i = \{\phi_{i1}^* \phi_{i2}^* \dots \phi_{iL}^*\}, \quad \{\beta\} = \{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_L\}$$

である。 ϕ_{ji}^* はソース点を j としたときのラプラスの基本解、 β_j はソース点 j に対応する未知仮想電荷である。

境界を境界要素 $\Gamma_m (m=1, 2, \dots, M)$ に M 分割すれば、境界要素 Γ_m 上の点 $D(i)$ についてポテンシャル、フラックスはそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i &= \{N_{\bar{\phi}}\}^T \{\bar{\phi}\}_m \\ \bar{q}_i &= \{N_{\bar{q}}\}^T \{\bar{q}\}_m \end{aligned} \quad (6)$$

である。ここで二次元場を対象にすれば、境界は一次元となり、要素 Γ_m は2節点である。従って、 $\{\bar{\phi}\}_m = \{\bar{\phi}_{m1} \bar{\phi}_{m2}\}, \{\bar{q}\}_m = \{\bar{q}_{m1} \bar{q}_{m2}\}$ 。一定要素を採用すれば要素内ポテンシャルとフラックスは要素内の位置によらないから、内挿関数 $\{N_{\bar{\phi}}\}, \{N_{\bar{q}}\}$ の成分は $1/2$ である。一定要素の場合 $\bar{\phi}_i, \bar{q}_i$ はそれぞれ境界要素 m の節点1と節点2の平均のポテンシャルとフラックス値になる。(5), (6)式を(4)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Pi(\beta, \bar{\phi}, \bar{q}) = & \frac{1}{2} \varepsilon \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \varepsilon \{\beta\}^T [G] \{\bar{q}\} \\ & + \varepsilon \{\bar{\phi}\}^T [L] \{\bar{q}\} - \varepsilon \{\bar{\phi}\}^T [N] \{\hat{q}\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、

$$\{\bar{\phi}\} = \{\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 \dots \bar{\phi}_M\}, \quad \{\bar{q}\} = \{\bar{q}_1 \bar{q}_2 \dots \bar{q}_M\}$$

$$\{\hat{q}\} = \{\hat{q}_1 \hat{q}_2 \dots \hat{q}_N\}, \quad (N \leq M)$$

である。マトリックス $[H], [G]$ の成分はそれぞれ

$$H_{jk} = \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \phi_{jm}^* \frac{\partial \phi_{km}^*}{\partial n} d\Gamma_m$$

$$G_{jm} = \int_{\Gamma_m} \phi_{jm}^* d\Gamma_m \quad (j, k=1, 2, \dots, L, m=1, 2, \dots, M)$$

であり、 $[L]$ と $[N]$ は対角マトリックスで、 $[L]$ の成分は境界 Γ 上の要素の長さ、 $[N]$ の成分は境界 Γ_2 上の要素の長さである。

(7)式を $\{\beta\}$ と $\{\bar{q}\}$ で変分 $\delta \Pi(\beta, \bar{q})=0$ すれば、系全体に関する離散化方程式が求められる。

$$\delta \Pi_{\beta} = \varepsilon [F] \{\beta\} - \varepsilon [G] \{\bar{q}\} = 0 \quad (8)$$

$$\delta \Pi_{\bar{q}} = \varepsilon [L] \{\bar{\phi}\} - \varepsilon [G]^T \{\beta\} = \{0\} \quad (9)$$

(8)と(9)式から

$$[K] \{\bar{\phi}\} - \{Q\} = \{0\} \quad (10)$$

が得られる。ここで、

$$[K] = [R]^T [F] [R]$$

$$[R] = ([G]^{-1})^T [L]$$

$$\{Q\} = [L] \{\bar{q}\}$$

$$F_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \phi_{jm}^* \frac{\partial \phi_{km}^*}{\partial n} d\Gamma_m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \phi_{km}^* \frac{\partial \phi_{jm}^*}{\partial n} d\Gamma_m$$

$$(j, k=1, 2, \dots, L)$$

である。

3. 双対相補原理による定式化

双対変分原理は電磁界問題などの有限要素解析にも

用いられている。この原理によると、互いに双対相補な変数で表現されたエネルギー汎関数が有限要素法などの離散化拘束下解に対して上限値、下限値をとることが知られている^(6,7)。前章では変分原理による境界要素の定式化をポテンシャル ϕ 、フラックス q に対して示した。ここではこれに対して双対相補原理を利用した表現を示す。電気変位ベクトルポテンシャル ψ (電束密度 $D = \nabla \times \psi$)を定義する。電位 ϕ (電界の強さ $E = \nabla \phi$)と ψ の対応を2次元ラプラス場の場合について、示しておく。法線 n を領域境界の外向きに、接線 τ を境界内側に沿って左まわりにとると、次式で与えられる⁽⁸⁾。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = -\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \quad (11)$$

支配方程式と境界条件はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \psi &= 0 && \text{in } \Omega \\ \partial \psi / \partial n &= \partial \hat{\psi} / \partial n && \text{on } \Gamma_1 \\ \psi &= \hat{\psi} && \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

になる。この場合電気変位ベクトルポテンシャル ψ を変関数としたエネルギー汎関数⁽⁷⁾は

$$\Pi(\psi) = -\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} \hat{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\Gamma \quad (13)$$

で与えられる。これがエネルギー汎関数(2)式的双対相補表現である。文献(5)でも同じ形の汎関数を使ったが双対相補定式化は ψ ではなく同一の電位 ϕ を利用して行った。従ってその解は完全な双対相補解ではない。通常のBEMではソース点を境界上に取る必要があるので、特異積分が存在し、特に電気変位ベクトルポテンシャル ψ を導入した場合この積分をうまく処理できなかったためである。ここではソース点を領域外に配置したため特異積分の必要がなくなり、電気変位ベクトルポテンシャル ψ を導入しても問題が生じない。

(13)式のハイブリッド形の変分表現を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Pi(\psi, \tilde{\psi}, \tilde{p}) &= -\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (\psi - \tilde{\psi}) \tilde{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \hat{\phi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式を部分積分すれば、(4)式と同様の境界のみに関する表現

$$\begin{aligned} \Pi(\psi, \tilde{\psi}, \tilde{p}) &= -\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Gamma} \psi p d\Gamma \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (\psi - \tilde{\psi}) \tilde{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \hat{\phi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。ここで、 $p = \partial \psi / \partial n$ 、 $\tilde{p} = \partial \tilde{\psi} / \partial n$ である。領域内部の任意の点 $D(i)$ における電気変位ベクトルポテンシャル ψ_i は仮想電荷 β_j を係数とする既知関数の一次結合として次の形の試験関数を想定することができる。

$$\psi_i = \sum_{j=1}^L \psi_{ji}^* \beta_j = \{\psi_{ji}^*\}_i^T \{\beta\} \quad (16)$$

ただし、

$$\{\psi_{ji}^*\}_i = \{\psi_{1i}^* \psi_{2i}^* \dots \psi_{Li}^*\}$$

である。境界要素 Γ_m 上の点 $D(i)$ について

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i &= \{N_{\tilde{\psi}}\}_i^T \{\tilde{\psi}\}_m \\ \tilde{p}_i &= \{N_{\tilde{p}}\}_i^T \{\tilde{p}\}_m \end{aligned} \quad (17)$$

である。ここで $\{\tilde{\psi}\}_m = \{\tilde{\psi}_{m1} \tilde{\psi}_{m2}\}$ 、 $\{\tilde{p}\}_m = \{\tilde{p}_{m1} \tilde{p}_{m2}\}$ 。一定要素を採用すれば内挿関数 $\{N_{\tilde{\psi}}\}$ 、 $\{N_{\tilde{p}}\}$ の成分は $1/2$ である。一定要素の場合 $\tilde{\psi}_i$ 、 \tilde{p}_i はそれぞれ境界上の要素 Γ_m の節点1と節点2の平均値になる。

(15)式に試験関数(16)、(17)を代入すれば

$$\begin{aligned} \Pi(\beta, \tilde{\psi}, \tilde{p}) &= -\frac{1}{2\varepsilon} \{\beta\}^T [A] \{\beta\} + \frac{1}{\varepsilon} \{\beta\}^T [U] \{\tilde{p}\} \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \{\tilde{\psi}\}^T [L] \{\tilde{p}\} + \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} \right\}^T [M] \{\hat{\phi}\} \end{aligned} \quad (18)$$

になる。マトリックスの成分はそれぞれ

$$A_{jk} = \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \psi_{jm}^* \frac{\partial \psi_{km}^*}{\partial n} d\Gamma_m$$

$$U_{jm} = \int_{\Gamma_m} \psi_{jm}^* d\Gamma_m \quad (j, k = 1, 2, \dots, L, m = 1, 2, \dots, M)$$

であり、 $[M]$ は対角マトリックスで、 $[M]$ の成分は境界 Γ_1 上の要素の長さである。

(18)式を $\{\beta\}$ 、 $\{\tilde{p}\}$ で変分 $\delta \Pi(\beta, \tilde{p}) = 0$ すれば

$$\delta \Pi_{\beta} = -\frac{1}{\varepsilon} [S] \{\beta\} + \frac{1}{\varepsilon} [U] \{\tilde{p}\} = \{0\} \quad (19)$$

$$\delta \Pi_{\tilde{p}} = -\frac{1}{\varepsilon} [L] \{\tilde{\psi}\} + \frac{1}{\varepsilon} [U]^T \{\beta\} = \{0\} \quad (20)$$

(19)、(20)式から、系全体に関する離散化方程式

$$[Z] \{\tilde{\psi}\} - \{P\} = \{0\} \quad (21)$$

が得られる。ここで

$$[Z] = [B]^T [S] [B]$$

$$[B] = ([U]^{-1})^T [L]$$

$$\{P\} = [L] \{\tilde{p}\}$$

$$S_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \psi_{jm}^* \frac{\partial \psi_{km}^*}{\partial n} d\Gamma_m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_m} \psi_{km}^* \frac{\partial \psi_{jm}^*}{\partial n} d\Gamma_m$$

$$(j, k = 1, 2, \dots, L)$$

試験関数 ϕ^* と ψ^* はラプラス場の基本解であるが、それぞれ複素グリーン関数の実部と虚部

$$\phi_{jm}^* = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\sqrt{X^2 + Y^2} \right) \quad (22)$$

$$\psi_{jm}^* = -\frac{1}{2\pi} \arctan \left(\frac{Y}{X} \right) \quad (23)$$

に選べば、これらは互いに直交する。ここで

$$X = x_m - x_j, \quad Y = y_m - y_j$$

ソース点と観測点とをいずれも境界上にとると特異積分に際し特別な配慮が必要となるが、ここでは

Pattersonにならって試験関数のソース点を対象領域の外に取り、特異積分を避ける。ところで、系のエネルギーを Π とすると

$$\Pi(\phi) \geq \Pi \geq \Pi(\psi) \quad (24)$$

の関係が常に成り立つことが知られている⁽⁶⁾。従って、

$$\Pi = \frac{1}{2}[\Pi(\phi) + \Pi(\psi)] \quad (25)$$

の関係を利用することによって離散化誤差を改善できると期待される。

4. 計算例

Fig.1に示す閉領域におけるポテンシャル分布をBEMと本法でそれぞれ計算してみよう。境界分割と仮想電荷の配置なども図に示してある。ここでは境界を32個の一定要素で分割し、同数の仮想電荷を要素近傍(外部領域)に配置した。領域内の等ポテンシャル線とポテンシャルの相対誤差をFig.2, 3に示す。(a), (b)はそれぞれ通常のBEMと本法で計算したものである。計算結果を比較してみると、同じ計算条件で本法は計算誤差が少ないことが分かった。誤差の最大値は境界上に現れるが、本法での最大誤差は4.06%なのに対して、BEMでは26.99%である。

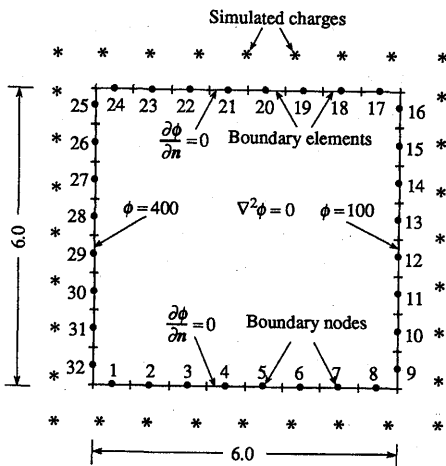
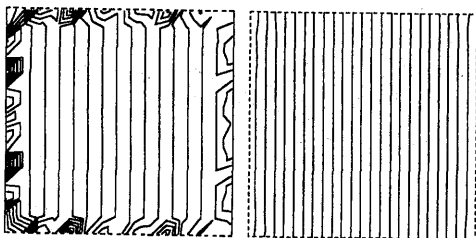
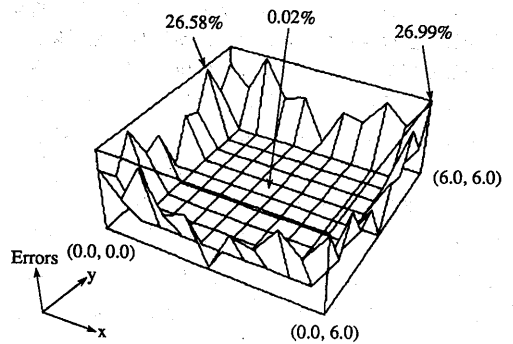


Figure 1 An example of Laplace field with boundary elements, nodes and simulated charges

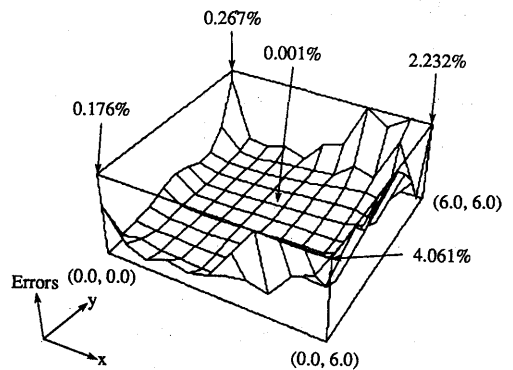


(a) Equal ϕ lines of the BEM solution (b) Equal ϕ lines of the solution of the proposed method

Figure 2 Potential distributions



(a) Error distribution of the BEM solution



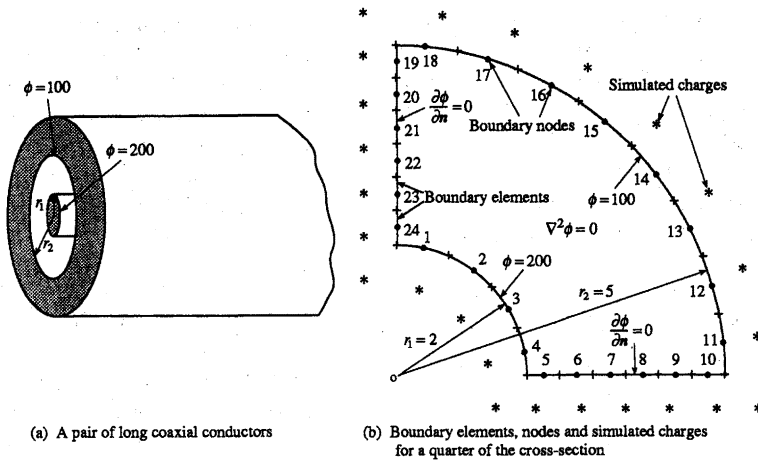
(b) Error distribution of the solution of the proposed method

Figure 3 Potential error distributions

次にFig.4(a)に示す同心円筒間のポテンシャル分布を通常のBEMと本法でそれぞれ計算する。Fig.4(b)に示すように1/4の領域境界を一定要素で分割し、仮想電荷を配置する。ここでは境界を24個の一定要素で分割し、同数の仮想電荷を配置して計算を行なった。領域内の等ポテンシャル線をFig.5に示す。(a), (b)はそれぞれBEMと本法で計算したものである。この場合も本法の計算誤差が少ないことが分かった。

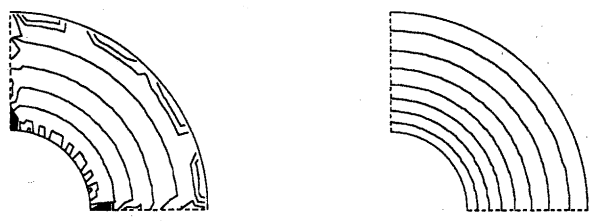
変分原理によって得られた離散化方程式、(10)式と(21)式は双対相補の関係になるので、閉領域及び同心円筒間におけるポテンシャル ϕ の問題を電気変位ベクトルポテンシャル ψ の問題として計算することができる。境界条件などをFig.6(a)に示す。境界要素の分割と仮想電荷の配置はポテンシャル ϕ の問題と同様である。(21)式によって得られた領域内の等電気変位ベクトルポテンシャル線 ψ をFig.6(b)に示す。これは ϕ と直交し、 ψ とは(11)式の関係にある。

系のエネルギー及び静電容量は次のように計算することができる。まず(10)式により境界上のポテンシャルを計算する。次に、(9)式によって求められた β を(5)式に代入すれば領域内のポテンシャルが得られる。系



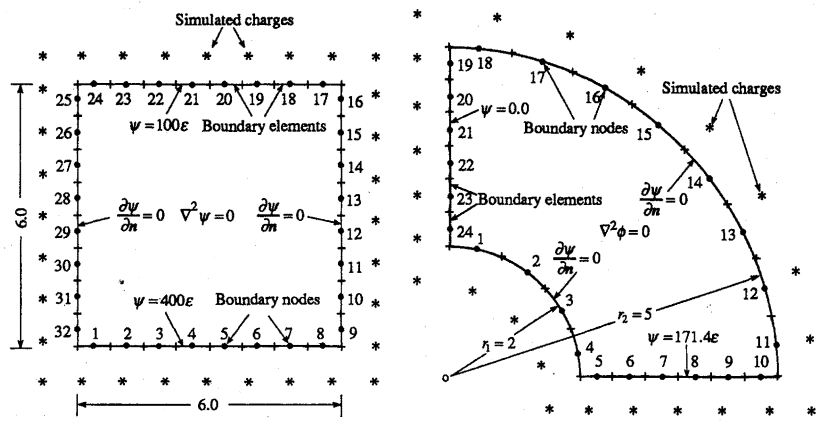
(a) A pair of long coaxial conductors
 (b) Boundary elements, nodes and simulated charges for a quarter of the cross-section

Figure 4 Another example of Laplace field

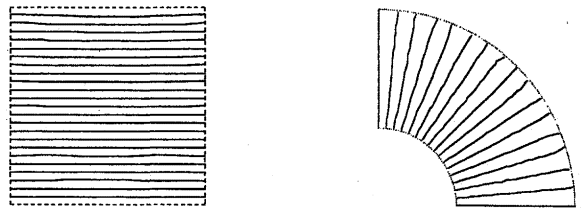


(a) Equal ϕ lines of the BEM solution
 (b) Equal ϕ lines of the solution of the proposed method

Figure 5 Potential distributions



(a) Boundary conditions for a square closed domain with respect to the electric displacement vector potential ψ
 (a) Boundary conditions for a quarter of the cross-section with respect to the electric displacement vector potential ψ



(b) Equal electric displacement vector potential ψ lines
 (b) Equal electric displacement vector potential ψ lines

Figure 6 Problems and solutions calculated by the proposed method

のエネルギーの上限は離散化された(7)式を使って求める。同様に(21)式と(18)式により境界上及び領域内の電気変位ベクトルポテンシャルを計算する。系のエネルギーの下限は離散化された(18)式を使って求める。

Fig. 1に示す閉領域における系のエネルギーを計算してみよう。エネルギーの理論値は 45000ϵ (ϵ は媒質の誘電率)である。(7)式と(18)式に基づき系のエネルギーの上限と下限を計算した。エネルギーの収束の様子をFig. 7に示す。

Fig. 4に示す同軸の静電容量の理論値は $C=6.857\epsilon$ [F/m]である。(24)式より静電容量の関係式は次の様になる。

$$\Pi = \frac{1}{2}\phi^2 C_{exact}, \quad \Pi(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 C_{upper}, \quad \Pi(\psi) = \frac{1}{2}\psi^2 C_{lower}$$

(4)式と(15)式に基づく静電容量の上限と下限は

$$C_{upper} \geq C_{exact} \geq C_{lower}$$

である。静電容量の収束の様子をFig. 8に示す。

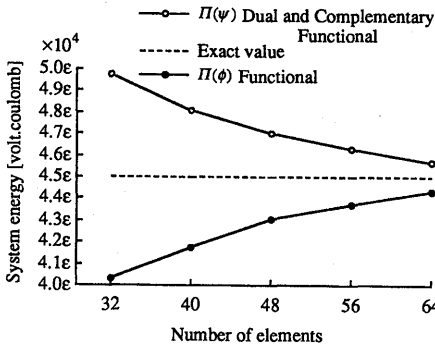


Figure 7 Convergence in energy with the number of elements increased (closed square)

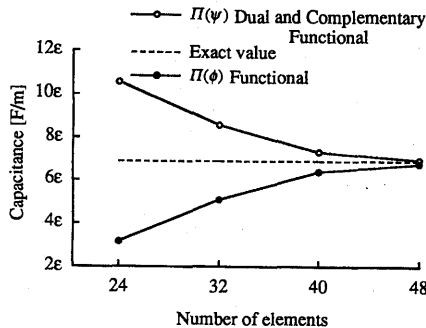


Figure 8 Convergence in capacitance with the number of elements increased (coaxial conductors)

5. 結言

静電界解法に対して変分原理に基づく正則境界積分法を提案して、簡単な問題について等ポテンシャル分布、系のエネルギー、静電容量を計算し、その有効性を検討した。正則境界積分法は通常BEMとCSMの特徴を併せ持っているため、特異点を含む積分の処理な

どに特別な工夫の必要がなくなり、数値計算が簡単で精度も高いことが示された。ただし本法はCSMと同様に解の精度は仮想電荷の配置に依存するので、精度をよくするためには境界の形状に応じて仮想電荷点を適切に選ぶ必要がある。その位置は境界の節点から領域の外に要素の大きさとればよいことも確認された⁽¹⁾。また、双対相補原理に基づく系方程式の導出もスカラーポテンシャルだけでなくこれに直交する電気変位ベクトルポテンシャルに関する定式化が有効になり、上限、下限の評価が可能になった。さきの報告(文献(5))は要素分割数に対する上限、下限の収束が対称にならない問題点があった。その理由は、双対相補エネルギー関数の評価において、被積分関数として直交関数 ψ^* を選んだ場合特異積分の評価が不可能であったため、代わりに ϕ^* を採用したためである。そのためエネルギー関数の評価が双対相補のものになっていなかったためと考えられる。

今後、ポアソン、ヘルムホルツ問題についても本法を適用し、その有効性を調べて行きたい。

参考文献

- (1) 村島定行：代用電荷法とその応用，(1983) 森北出版。
- (2) Patterson, C. and Sheikh, M. A.: Regular Boundary Integral Equations for Fluid Flow, Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow (1981) Pineridge Press.
- (3) 本間, 田中, 加地: 正則境界要素法による移流拡散方程式の三次元解析, 境界要素法論文集第2巻(1985) pp.25-30.
- (4) 孫永浩, 加川幸雄: “変分原理による境界要素法—2次元ヘルムホルツ方程式の固有値問題”, 境界要素法論文集 第9巻(1992) pp.157-162.
- (5) Y. Sun and Y. Kagawa: A variational Approach to Boundary Elements — Two-Dimensional Laplace Problem, International Journal of Numerical Modelling, Electronic Networks, Devices and Fields, Vol.7, No.1 (1994) pp.1-14.
- (6) P.Hammond and J.Penman: Calculation of Inductance and Capacitance by Means of Dual Energy Principles, Proc. IEE., Vol. 123, No.6 (1976) pp.554-559.
- (7) J. Penman, J.R. Fraser, J.R. Smith, M.D. and Grieve: Complementary Energy Methods in the Computation of Electrostatic Fields, IEEE Trans. (MAG), Vol.19, No.6 (1983) pp.2288-2291.
- (8) 神谷紀生: 演習境界要素法, (1985) サイエンス。