

自由縁応力特異性に適合させた特異要素の導入による異種接合材の境界要素解析

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF BONDED DISSIMILAR MATERIALS USING SINGULAR ELEMENTS FOR FREE-EDGE STRESS SINGULARITY

井岡 誠司¹⁾, 金國 祐介²⁾, 久保 司郎³⁾

Seiji IOKA, Yusuke KANEKUNI and Shiro KUBO

- 1) 大阪大学大学院工学研究科 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1, E-mail: ioka@mech.eng.osaka-u.ac.jp)
 2) 大阪大学大学院工学研究科 (現 JFE) (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
 3) 大阪大学大学院工学研究科 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1, E-mail: kubo@mech.eng.osaka-u.ac.jp)

When stress analysis of bonded dissimilar materials are made by the conventional boundary element method, accuracy is decreased because of the free-edge stress singularity near the intersection of the interface and the free-surface. In this study, the usefulness of the singular element which incorporates the free-edge singularity for the analysis of bonded dissimilar materials is described. The singular element proposed by Tanaka *et al.* for numerical analysis of singular element field near the crack front was applied in this study. It is confirmed that the free-edge stress singularity is described by using the singular element. The accuracy of stress analysis by using the singular element is improved well as compared with that calculated by using normal element when the exponent of singularity is large.

Key Words: Bonded Dissimilar Materials, Boundary Element Method, Free-edge Stress Singularity, Singular Element

1. はじめに

異なる材料を接合する異種接合材料は、最近の接合・複合化技術の著しい発達とともに、各種分野に広く用いられるようになってきている。また、使用される場所が増えるとともに異種接合材料の強度評価の重要性も高くなっている⁽¹⁾。

異種接合材料の強度は、その接合界面の強度に強く支配される。接合界面の強度において大きな問題となるのは、接合界面端に生じる自由縁応力特異性である⁽²⁾⁻⁽⁶⁾。接合材の強度評価を行うにあたっては、接合界面上および接合界面端近傍の応力分布を精度よく求める必要がある。しかし、応力分布を解析的に求めることが困難である場合が多く、数値解析が用いられる。応力分布を境界要素法^(7,8)や有限要素法などの数値解析手法によって求める場合、界面端の自由縁応力特異性の存在によって、接合界面上の応力分布の解析精度低下が起こることが考えられる。

特異性が存在する問題を境界要素法を用いて解く場合、特異性を表す特異要素を用いる方法がしばしば用いられる。その手法の一つとして、特異性を表す内挿関数を用いる手法が

田中ら^(9,10)により提案されている。この方法は座標値には通常の内挿関数を用い、変位および表面力に対しては、それぞれ特殊な内挿関数を用いて特異性を表そうとするものである。この特殊な内挿関数は変位および表面力が特異応力場におけるそれぞれの分布を表すように工夫されている。この手法は均質材き裂の応力特異性への適用を前提に考案されたもので、き裂先端の $1/\sqrt{r}$ 特異性を表すために用いられてきたが、内挿関数の工夫により任意の特異性も表現することができる。

一般に異種接合材料では接合される材料の組合せや接合角度の組合せにより特異性の指数が変化する。異種接合材料の特異性の指数は材料定数、接合角度の組合せが決まれば Airy の応力関数を用いて固有関数展開法によりあらかじめ求めることができる^(5,6)。本研究では、二次元異種接合材料のモデルに対する境界要素解析において、応力関数の固有関数展開によって求めた特異性の指数を、特殊な内挿関数を用いた特異要素に代入することで、界面端の応力特異性を表現する。この特異要素を用いて境界要素解析を行った場合と

通常要素を用いた場合の結果の比較を行い、解析精度の向上について検討を行う。

2. 特異要素

異種接合材料の自由表面と接合界面が交わる点は弾性学上の特異点となり、理論上、応力・ひずみが無限大となる。異種接合材の界面上の応力分布を解析する場合、特異点を中心とした界面端近傍は自由縁特異応力場が支配的となり、応力 σ_{ij} および変位 u_i は

$$\sigma_{ij} \propto r^{-p} \quad u_i \propto r^q \quad (1)$$

の形で表される。ここで、 r は接合界面端からの距離、 p は応力の特異性の指数、 q は変位の指数である。これらの指数 p, q は材料の組合せ、接合角度の組合せにより変化する。

異種接合材料の応力解析を行う際に境界要素法を用いる場合、この応力特異性を考慮に入れる必要がある。特異性を導入する方法として代表的なものに均質材中のき裂の解析に用いられるクォーターポイントエレメント法がある。この方法は特異要素としてき裂先端の要素の中間節点を $1/4$ の位置へ移動させることによってき裂先端の $1/\sqrt{r}$ 特異性を表現するものである。ところが、異種接合材の自由縁応力特異性の指数は材料の組合せ、接合角度の組合せに依存するため、任意の特異性指数に対応することができる特異要素を導入する必要がある。任意の指数を持つ特異性に対応するため、座標値については通常の内挿関数を用い、変位 $u_i(\xi)$ および表面力 $t_i(\xi)$ の内挿関数としてそれぞれ特殊な内挿関数を用いる特異要素がき裂の応力拡大係数解析のために、田中ら (9, 10) によって考案されている。本研究では、この田中らによって考案された特異要素を、異種接合材の界面端特異性の解析へ適用する。なお、この特異要素に対して、座標、変位、表面力の内挿関数として通常の内挿関数を用いる要素を通常要素と呼ぶことにする。

要素として1次元2次要素を用いることとする。離散化の過程で正規化された座標 ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$) における内挿関係として以下のものを与える。

$$x_i(\xi) = N_k(\xi)x_i^k \quad (2)$$

$$u_i(\xi) = N_k^u(\xi)u_i^k \quad (3)$$

$$t_i(\xi) = N_k^t(\xi)t_i^k \quad (4)$$

ここで N_k は通常の内挿関数である。 N_k^u, N_k^t はそれぞれ変位、表面力(応力)の内挿関数である。変位と表面力の内挿関数は式(1)のような挙動を示すように無次元座標系 ξ を新たに写像する。まず、変位の内挿関数にはラグランジュの内挿公式に

$$\xi^* = 2^{1-q}(\xi + 1)^q - 1 \quad (5)$$

の写像を施す。この正規座標系 ξ^* によって内挿関数は次の形で表される。

$$N_j^u(\xi^*) = \prod_{i=1, i \neq j}^3 \frac{\xi^* - \xi_i^*}{\xi_j^* - \xi_i^*} \quad (6)$$

また、表面力の内挿関数には、ラグランジュの内挿公式を $(1 + \xi)^p$ で除したものを用いる。これによって表面力の内挿関数は次のような形になる。

$$N_1^t(\xi) = (1 + \xi)^{-p} N_1(\xi) \quad (7)$$

$$N_j^t(\xi) = (1 + \xi_j)^p (1 + \xi)^{-p} N_j(\xi) \quad \text{for } j \neq 1 \quad (8)$$

以上の内挿関数は界面端が節点1にある場合に用いられる。界面端が節点3にある場合には、変位の内挿関数については、式(5)の代わりに次の写像を用いる。

$$\xi^* = 2^{1-q}(\xi - 1)^q + 1 \quad (9)$$

また、表面力の内挿関数についてはラグランジュの内挿関数を $(1 + \xi)^p$ で除す代わりに $(1 - \xi)^p$ で除すことによって特異性を表すことができる。

特異性の指数 p, q は Airy の応力関数を用い、固有関数展開法により理論的に求めることができる。本研究では p, q として固有関数展開法による値を用い、上記の内挿関数を界面端を含む要素に対して導入し自由縁応力特異性を表現した。

3. 特異要素を用いた接合界面上の応力分布解析

境界条件として外力を負荷した場合の異種接合材の接合界面上の応力分布の応力解析を行った。なお、解析精度の比較を行うため、特異要素を用いた解析を行うとともに、通常要素を用いた解析も行った。

3.1. 解析対象

解析に用いた異種接合材のモデルを Fig. 1 に示す。材料1と材料2は完全に接合されているものとする。材料定数としては、材料1および2のヤング率を E_1 および E_2 、ポアソン比を ν_1 および ν_2 とする。また、材料の幾何形状は接合界面上における半幅を W 、材料1, 2の高さを H_1 および H_2 とし、接合角度を θ_1 および θ_2 とする。ただし、本研究では $\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$ を満たすように θ_1, θ_2 を設定し、高さを $H_1/W = H_2/W = 0.1$ と設定する。応力条件としてはすべて平面ひずみを仮定している。境界条件は解析対象の上端に一律な引張応力 σ_0 を負荷し、下端の y 方向変位を0とする。解析には二次弾性境界要素法を用い、要素には二次の

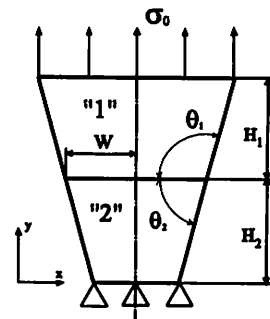


Fig. 1 Model used for B.E.M. analysis

Table 1 Material properties and theoretical values of exponent of free-edge stress singularity

Apex angle θ_1	E_2/E_1	p
90°	3	0.0798983
	5	0.136181
	10	0.198467
	20	0.239153
	100	0.278033
105°	5	0.0890617
	7	0.136231
	10	0.183192
	20	0.253062
	100	0.325248

アイソパラメトリック要素を用いた。なお、解析には解析対象の対称性を用いて、解析対象の右半分のみ要素分割し、要素数は170、節点数は342とした。特異要素を用いる場合には、界面端の点を含む要素のみに特異要素を用い、他の要素にはすべて通常要素を用いた。

3.2. 解析結果

接合角度 θ_1 を 90° および 105° に設定して解析を行った。ポアソン比を $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ に固定し、ヤング率の比 E_2/E_1 をそれぞれの接合角度に対して5通りずつ設定した。境界要素解析に用いたヤング率の比と、それぞれの組合せに対して自由縁応力特異性を応力関数の固有関数展開を用いて求めた結果を Table 1 に示す。

また、各条件に対し特殊な内挿関数を用いた特異要素を導入した場合、ならびに特異要素を用いず通常要素のみを用いて解析を行い接合界面上の応力分布を求めた。 $\theta_1 = 90^\circ$ および 105° の場合について得られた界面上の垂直応力 σ_y の分布をそれぞれ Fig. 2 および Fig. 3 に両対数線図上に示す。ただし、図にはヤング率比 $E_2/E_1 = 5, 10, 100$ とした場合に得られた結果を示している。図の縦軸には σ_y を負荷した応力 σ_0 で無次元化した値、横軸には接合界面端からの距離 r を W で無次元化した値を用いた。図より、接合界面端において応力分布は両対数線図上で直線性を示しており、式 (1) に示されているべき関数型の特異性を示していることがわかる。

得られた結果から、ヤング率比 E_2/E_1 が小さい場合には特異要素を用いた場合の解析結果と通常要素を用いた場合の解析結果の間にはあまり差が見られない。しかし、ヤング率比 E_2/E_1 が大きくなり特異性の指数 p が大きくなると特異要素を用いた場合と通常要素を用いた場合の結果に差が見ら

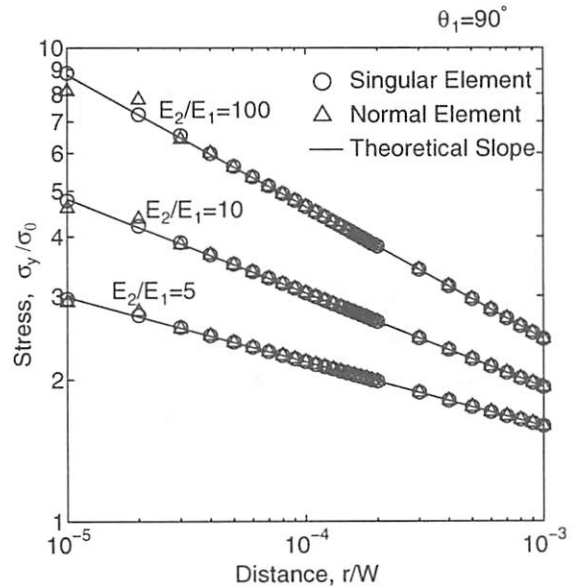


Fig. 2 Stress distributions near the edge of interface for $\theta_1 = 90^\circ$

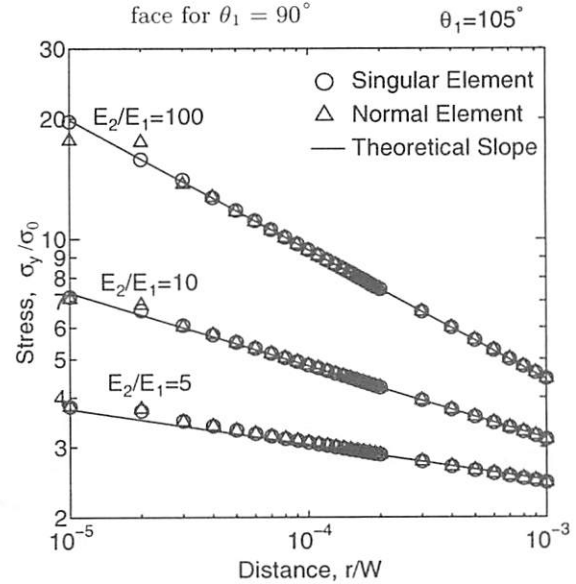


Fig. 3 Stress distributions near the edge of interface for $\theta_1 = 105^\circ$

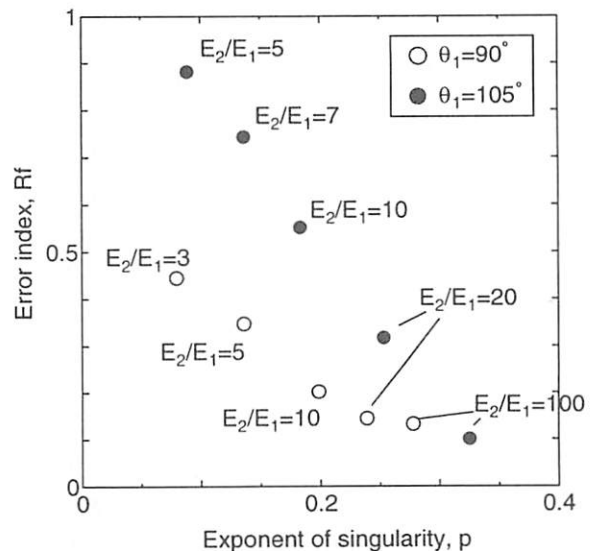


Fig. 4 Relation between exponent of singularity p and error index Rf

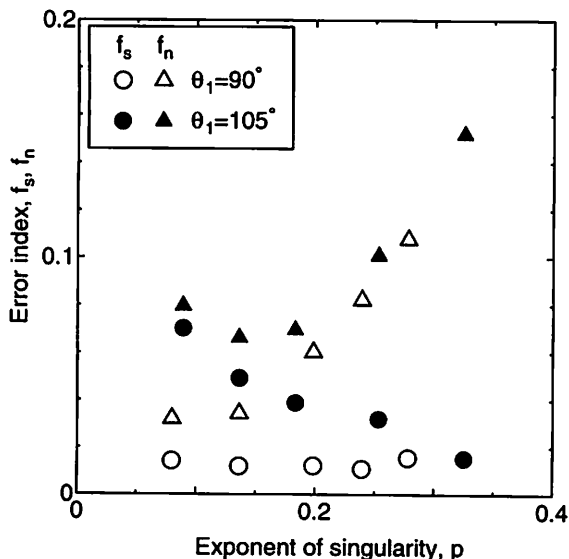


Fig. 5 Relation between exponent of singularity p and error index f_s, f_n

れるようになる。

次に特異要素を用いた場合の解析精度の傾向を調べるために、次のような誤差指標 Rf を導入して評価を行った。

$$f_s = \sqrt{\sum(\sigma_s/\sigma_{th} - 1)^2} \quad (10)$$

$$f_n = \sqrt{\sum(\sigma_n/\sigma_{th} - 1)^2} \quad (11)$$

$$Rf = \frac{f_s}{f_n} \quad (12)$$

式(10)中の σ_s は特異要素を用いた場合の応力、式(11)中の σ_n は通常要素を用いた場合の応力を表している。 σ_{th} は理論応力値であり、ここでは、次のようにして求めた。両対数線図上であらかじめ応力関数の固有関数展開により求めた特異性の指数 p を傾きとする直線を考える。この直線が、界面端の要素から十分に離れ、特異要素を用いて計算した応力の値と、通常要素を用いて計算した応力の値が十分一致する1点を通るようにする。この直線上の応力の値を理論応力値 σ_{th} とする。界面端から順に節点の応力値を比較し、 $|\sigma_s - \sigma_{th}|$ と $|\sigma_n - \sigma_{th}|$ が有効桁数3桁まではじめて一致するときの応力値をその収束値とする。式(10)、(11)中の総和は界面端から収束値までのすべての節点に関してとるものとする。式(12)で Rf を評価すると、 $Rf > 1$ のときは全体として σ_s のほうが σ_n よりも理論値から遠いことを表しており、すなわち精度が低下していることを表している。また、 $Rf < 1$ のときには全体として σ_s のほうが σ_n よりも理論値から近いことを表しており、すなわち精度が向上していることを示している。

応力分布の境界要素解析結果から、誤差指標 Rf を求めた結果をFig. 4に示す。誤差指標 Rf と自由縁応力特異性の指数 p の関係を調べるため、横軸に特異性の指数 p 、縦軸に誤差指標 Rf をとっている。また、式(10)、(11)で表される f_s および f_n と特異性指数 p の関係を求めた結果をFig. 5に示

す。Fig. 4より、特異性の指数 p が大きくなるにつれて Rf が小さくなる傾向が見られる。また、Fig. 5において、 p が大きくなるにつれて f_n が大きくなっていくという結果が得られているのに対し、 f_s は減少するかあるいはほぼ一定の値をとっているという結果が得られている。このことから、 p が大きい、すなわち特異性が厳しい場合には特異要素の導入による解析精度が向上していることがわかる。また、 p が小さい場合にはFig. 5において f_s と f_n が近い値をとっているという結果が得られている。この原因としては、特異性が弱い、すなわち p が0に近い場合には特異性を導入した変位、表面力の内挿関数は通常の内挿関数に近くなることが挙げられる。

4. 結言

異種接合材料の二次元境界要素解析において、自由縁応力特異性を考慮に入れた内挿関数を特異要素に導入し、異種接合材料の応力分布の解析を行った。その結果、特異要素によって自由縁応力特異性が表現され、解析精度の向上が図られることを確認した。解析精度の向上は特異性の指数が大きいほどより顕著に現れることがわかった。

参考文献

- (1) 豊田政男：インターフェースメカニクス，(1991)，理工学社。
- (2) 結城良治（編）：界面の力学，(1993)，培風館。
- (3) D. B. Bogy: Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges Under Normal and Shear Loading, *Journal of Applied Mechanics*, **35**(1968) pp. 460-466.
- (4) D. B. Bogy: On the Problem of Edge-Bonded Elastic Quarter-Planes Loaded at the Boundary, *International Journal of Solids and Structures*, **6**(1970) pp. 1287-1313.
- (5) 久保司郎，大路清嗣：自由縁応力特異性を消失させるための異種接合材接合部端の幾何学的条件，*日本機械学会論文集 A 編*，**57**(1991) pp. 460-465.
- (6) 大路清嗣，久保司郎，中井善一，井岡誠司：異種接合材における自由縁特異応力場の支配領域とその消失，*材料*，**41**(1992) pp. 1389-1395.
- (7) 結城良治，木須博行：境界要素法による弾性解析，(1987)，培風館。
- (8) 田中正隆：境界要素法，(1991)，培風館。
- (9) 田中正隆，伊藤英和：3次元静弾性問題における応力拡大係数の境界要素解析についての一考察，*日本機械学会論文集 A 編*，**52**(1986) pp. 1870-1876.
- (10) M. Tanaka and H. Itoh: A New Family of Crack Elements for Stress Intensity Factor Computation in Elastostatic by Boundary Element Method, *Boundary Elements VIII*, (1986) pp. 131-142.