

1次元非定常熱伝導問題の境界要素解析

Boundary Element Analysis of 1-D Unsteady Thermal Convection Problem

具志堅功¹⁾, 登坂宣好²⁾

Isao GUSHIKEN and Nobuyoshi TOSAKA

- 1) 日本大学大学院 生産工学研究科 数理工学専攻
(〒275-8575 千葉県習志野市泉町 1-2-1, E-mail:c17040@cit.nihon-u.ac.jp)
- 2) 工博 日本大学教授 生産工学部数理工学専攻
(〒275-8575 千葉県習志野市泉町 1-2-1, E-mail:n7tosaka@cit.nihon-u.ac.jp)

A boundary element approach to one dimensional unsteady thermal convection problem is discussed. The initial-boundary value problem of thermal convection equation to deal with has a special characteristic to be prescribed step-wise Neumann conditions on flux boundary points. The fundamental solution used to solve this problem numerically is the time-dependent of finite difference approximation for the time variable. Numerical results obtained are compared with the results by the finite difference method in order to verify applicability of our approach.

Key Words : Boundary Element Method , Unsteady Thermal Convection Equation , Step-wise Condition

1. はじめに

我々を取り巻く様々な自然現象や工学の諸問題は微分方程式として記述することができ、この微分方程式を解くことによって現象を把握することができる。特に近年では、コンピュータ上でシミュレーションする研究が盛んに行われ、そのための高精度な数値計算手法が提案されている。

この数値計算手法¹⁾の代表例としては、差分法、有限要素法、境界要素法^{2), 3)}が挙げられる。このうち境界要素法は、未知量が境界上だけにあるので境界型解法に分類され、差分法や有限要素法のような領域内部の未知量を含む領域型解法と比較して未知数ははるかに少なくなる上、近似の精度もよくなるという利点がある。

数値計算手法の発展に伴い、多くの複雑な現象の数値解析が行われている。代表的な分野としては、数値流体力学や固体力学、電磁気学などが挙げられる。その中でも熱伝導現象の数値解析は、機器の熱設計、工業プロセスの最適化、省エネルギー化など工学の様々な分野で応用されていて、その果たす役割もきわめて重要である。

そこで本論では、工学上適用範囲の広い非定常熱伝導方程式を取扱い、境界条件が Step-wise に与えられる場合の解析を行い、数値計算手法のひとつである境界要素法の有効性を差分法との比較により検討する。

2. 基本方程式の離散化

1次元の非定常熱伝導問題について境界要素法を用いて離散化する。この場における数値モデル及び初期条件、境界条件は以下の式で与えられる。

[1次元非定常熱伝導方程式]

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (0 < x < l, 0 < t) \quad (1)$$

[初期条件]

$$u(x, 0) = g(x) \quad (0 < x < l) \quad (2)$$

[境界条件]

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = a, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = b \quad (3)$$

但し、 k は熱伝導率を表す。

本論では時間微分項の取扱いとして、時間微分を差分近似する方法^{4), 5)}を用いる。熱伝導方程式(1)の時間微分項について、以下の差分近似を用いる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n+1} = \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} \quad (4)$$

よって式(1)は、以下の半離散化式として表すことができる。

$$\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}(x) - g^2 u^{n+1}(x) = -g^2 u^n(x) \quad (g^2 = \frac{1}{k\Delta t}) \quad (5)$$

この方程式の右辺が零であるとき、この方程式は物理現象によく現れる変形ヘルムホルツ方程式と呼ばれる方程式となる。ここで、式(5)に重み関数を $\mathbf{n}(x)$ とすると、次の重み付き残差表現が得られる。

$$\int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 u^{n+1}(x)}{\partial x^2} - \mathbf{g}^2 u^{n+1}(x) \right\} \mathbf{n}(x) dx = - \int_0^l \mathbf{g}^2 u^n(x) \mathbf{n}(x) dx \quad (6)$$

この式に部分積分公式を2回適用すると、以下の逆形式が導かれる。

$$\int_0^l u^{n+1}(x) \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{n}(x)}{\partial x^2} - \mathbf{g}^2 \mathbf{n}(x) \right\} dx + \left[\frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} \mathbf{n}(x) \right]_0^l - \left[u^{n+1}(x) \frac{\partial \mathbf{n}(x)}{\partial x} \right]_0^l = - \int_0^l \mathbf{g}^2 u^n(x) \mathbf{n}(x) dx \quad (7)$$

重み関数 $\mathbf{n}(x)$ として、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}^*(x, y)}{\partial x^2} - \mathbf{g}^2 \mathbf{n}^*(x, y) = -\mathbf{d}(x - y) \quad (8)$$

の解となるような $\mathbf{n}^*(x, y)$ を採用する。但し、 $\mathbf{d}(x - y)$ はディラックのデルタ関数を表す。ここで、 $\mathbf{n}^*(x, y)$ は1次元変形ヘルムホルツ作用素の基本解としてとらえる事ができ、 $\mathbf{n}^*(x, y)$ とその導関数は次式で与えられる。

$$\mathbf{n}^*(x, y) = \frac{1}{2\mathbf{g}} e^{-\mathbf{g}|x-y|} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}^*(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2} e^{-\mathbf{g}|x-y|} \cdot \text{sgn}(x - y) \quad (10)$$

この基本解を使うことによって、以下の境界積分方程式の離散化表現式が得られる。

$$\begin{aligned} u^{n+1}(y) &= \left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(x) \mathbf{n}^*(x, y) \right]_0^l - \left[u^{n+1}(x) \frac{\partial \mathbf{n}^*(x, y)}{\partial x} \right]_0^l \\ &\quad + \int_0^l \mathbf{g}^2 u^n(x) \mathbf{n}^*(x, y) dx \\ &= \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(l) \mathbf{n}^*(l, y) - \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(0) \mathbf{n}^*(0, y) \\ &\quad - u^{n+1}(l) \frac{\partial \mathbf{n}^*(l, y)}{\partial x} + u^{n+1}(0) \frac{\partial \mathbf{n}^*(0, y)}{\partial x} \\ &\quad + \int_0^l \mathbf{g}^2 u^n(x) \mathbf{n}^*(x, y) dx \quad (11) \end{aligned}$$

ここで、点 y を境界点とした時、式(11)は以下の行列表現式で表す事ができる。

$$\mathbf{H}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{G}\mathbf{q}^{n+1} + \mathbf{f}^n \quad (12)$$

式(12)に境界条件を考慮すると、以下の連立一次方程式が得られる。

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b} + \mathbf{f}^n \quad (13)$$

式(13)に対して初期条件を考慮した連立一次方程式を解くことによって、第1時間ステップでの境界上の未知量 $\mathbf{u}^1, \mathbf{q}^1$ が決定される。これらを用いて、領域内部における任意の点 y での関数値を式(11)を利用して求める。

上記のようにして求められた $\mathbf{u}^1, \mathbf{q}^1$ を次の第2時間ステップにおける初期値として用いれば、 $\mathbf{u}^2, \mathbf{q}^2$ も同様の方法で求めることができる。以下同様にして、前ステップでの値を次のステップに対する初期値として、第 F 時間ステップまで同様の計算を繰り返すことによって非定常過程の計算をすることができる。

ここで、式(12)の \mathbf{f}^n は、解析的に積分を行うことができないため、適当な数値積分公式を用いることによって近似的に評価しなければならない。区間に対する数値積分公式としてはNewton-CotesやGaussの積分公式を利用することができるが、ここでは境界要素法で多用されているGaussの積分公式を用いることとする。

3. 数値計算例

Fig.1に示すような長さ $l(m)$ の1次元熱伝導物における数値計算例を示す。解析では熱伝導物として二種類の物質を用い、各々の計算条件はTable.1に示す。但し、式(1)の熱伝導率 \mathbf{k} は次式で定義される。

$$\mathbf{k} \equiv \frac{k}{rC} \quad (14)$$

また、境界条件は以下として与えられるものとする。

$$[\text{高温側}] \quad -k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = f(t) \quad (15)$$

$$[\text{低温側}] \quad -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = h\{u(l, t) - T_a\} \quad (16)$$

但し、高温側境界条件の $f(t)$ はステップ熱流束を示し、Table.1に示す周期と熱流束値を持ち、Fig.2, Fig.3のような周期関数として与えられる。

以上の諸条件のもとに、前章で示した境界要素法を用いて1次元熱伝導問題に対する数値解析を行った。Fig.4からFig.7に差分法と比較した境界上の点における温度に対する数値計算結果を示す。このとき、式(12)中の \mathbf{f}^n は10点の1次元Gaussの積分公式を用いて計算を行っている。

比較している差分法の解析では、解析領域を20分割し、空間微分に対して陰的差分を用いて計算を行った。また境界条件は以下のように差分近似して計算を行っている。

$$[\text{高温側}] \quad f(t) = -k \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} \quad (17)$$

$$[\text{低温側}] \quad h\{u_N^n - T_a\} = -k \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} \quad (18)$$

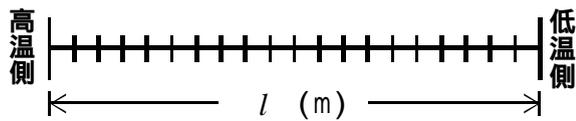


Fig.1 Analysis Model

Table.1 Condition of Calculation

		Model A	Model B	
領域スケール $l(m)$		1.00	0.01	
熱物性値	比熱 $C(J/(kg \cdot K))$	712	398	
	密度 $\rho(kg/m^3)$	2300	8960	
	熱伝導係数 $k(W/(m \cdot K))$	21.2	378	
境界条件	高温側	熱伝達係数 $h(W/(m^2 \cdot K))$	300	20000
		Bulk 温度 $T_a(K)$	290	
	低温側	高温時ステップ 熱流束 (W/m^2)	30000	3000000
		低温時ステップ 熱流束 (W/m^2)	10000	300000
		ステップ 熱流束の周期 (s)	36000	36
初期温度条件 $g(x)(K)$		300 $(0 < x < l)$		

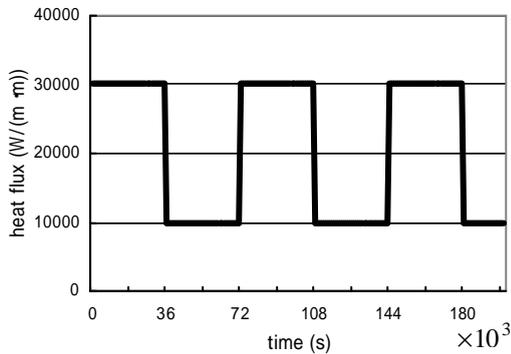


Fig.2 Step-Wise Condition of Model A

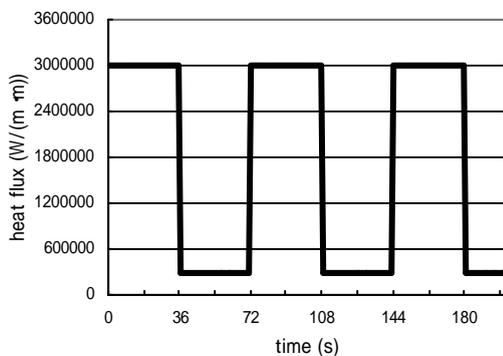


Fig.3 Step-Wise Condition of Model B

Model A の計算結果である Fig.4 と Fig.5 を見ると、二つの数値計算手法で違いが見られた。境界要素法では、ステップ熱流束の切り替わるところですぐに温度変化が伝達されているが、差分法では少し遅れて温度変化が伝達されている。これは、境界要素法は境界条件を直接、離散化式に入れているが、差分法は境界条件に対しても差分近似しているため、そのために温度変化の伝達が遅れているのではないかと考えられる。

また、高温側でステップ熱流束を与えているために、Model B の計算結果である Fig.7 と Fig.8 を見ると、二つの数値計算手法における顕著な違いは確認できなかった。これは、二つのモデルで熱伝導率が違うため、この影響により Model B ではどちらの計算手法を用いても結果に違いが現れなかったと思われる。

Fig.6 と Fig.9 は各モデルの解析領域の midpoint に関する計算結果である。どちらも上記に示した各モデルの特徴が出ていることがわかる。このことにより、境界だけでなく領域内部でも境界要素法と差分法の相違があることが示された。

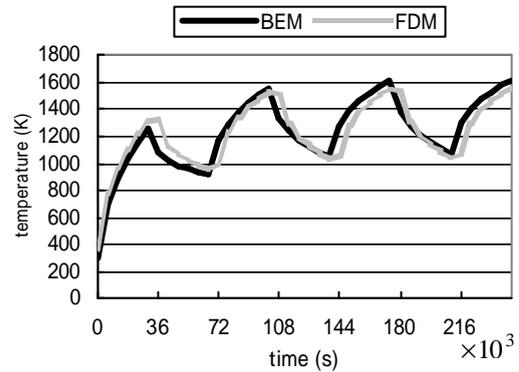


Fig.4 High Temperature Side of Model A

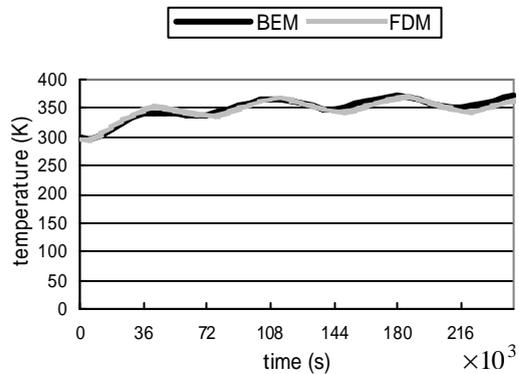


Fig.5 Low Temperature Side of Model A

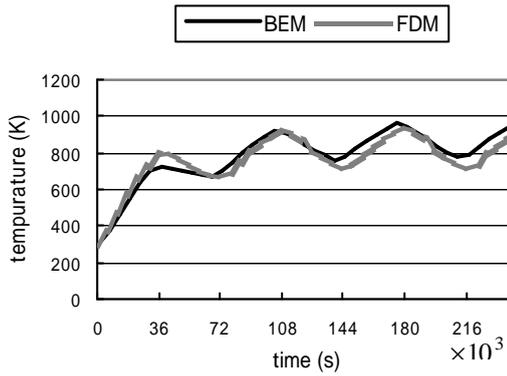


Fig.6 Middle Point of Model A

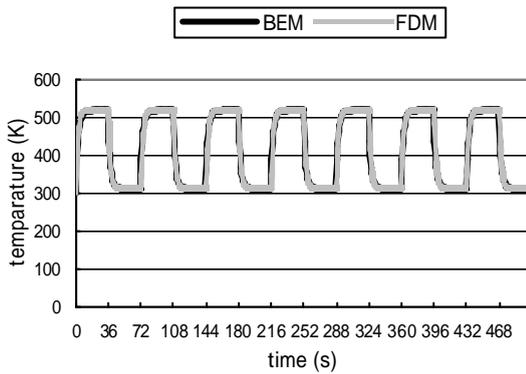


Fig.7 High Temperature Side of Model B

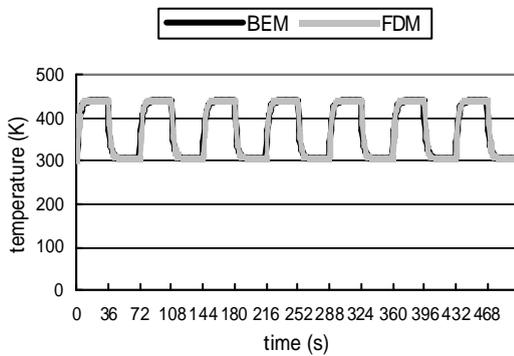


Fig.8 Low Temperature Side of Model B

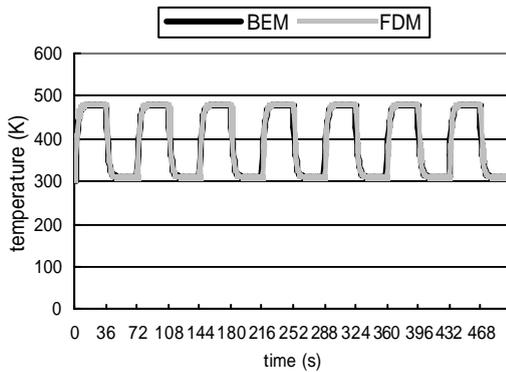


Fig.9 Middle Point of Model B

4. おわりに

本論では、1次元非定常熱伝導問題における境界要素法の適用の有効性を検討した。数値計算例により境界要素法は、Step-wise に与えられる境界条件を与えても差分法と比較して精度よく計算できることがわかった。これは、境界要素法が外部からの急激な変化に対しても精度よく解析できることを示している。

差分法では領域型解法であるので、精度よく計算するためには領域内部を細かく分割する必要がある。そのため解くべき連立一次方程式の本数は多くなってしまふ。それに対して境界要素法は、境界のみ要素に分割するため領域型解法と比較しても連立一次方程式の本数は少なくなる。特に1次元の場合は2点の境界での関数値と導関数値を求めることによって、領域内部の任意の点における関数値を求めることができる。よって境界要素法では計算時間が領域型解法に比べて短縮できる利点がある。

今後は、より多次元のモデルや工学の諸問題などより実用的な問題に対して、境界要素法の適用、有効性を検討していきたい。

参考文献

- 1) 登坂宣好, 大西和榮: 偏微分方程式の数値シミュレーション, 東京大学出版会, (1991)
- 2) 登坂宣好, 中山司: 境界要素法の基礎, 日科技連出版社, (1987)
- 3) 境界要素法研究会編: 境界要素法の応用, コロナ社, (1987)
- 4) V.Roures and E.Alarcon: Transient Heat Conduction Problems Using B.I.E.M., Computers & Structures, Vol.16, No.6, pp.717-730, (1983)
- 5) 田中正隆, 楊慶峰: 非定常熱伝導問題の時間ステップ境界要素解析, 境界要素法論文集, 第7巻, pp.93-98, (1990)