境界要素法論文集　Vol.19 (2002 年 12 月), 論文 No. 14_021023　JASCOME

偏微分方程式の境界値問題の境界型近似解法

Boundary-type Approximate Solution Methods for Boundary-value Problems of Partial Differential Equation

登坂 宣好

Nobuyoshi TOSAKA

日本大学生産工学部数理情報工学科（〒275–8575 習志野市泉町 1–2–1，E-mail: n7tosaka@cit.nihon-u.ac.jp）

Boundary-type solution methods for the approximate solution of the boundary-value problem of partial differential equation are proposed in this paper. Solution procedures are developed on two integral expressions of the boundary-value problem, which are the weighted integral formulation and the inverse form. The first method based on the weighted integral formulation is constructed with a boundary-type solution procedure and the Trefftz expression of the unknown function. Introduction of this expression on the unknown function can be considered as the use of so-called node-free element. The second method is a boundary-type solution procedure based on the inverse formulation and boundary element with the dual reciprocity treatment of the inhomogeneous function. Discussion and construction on the methods are developed with the boundary-value problem of Poisson equation. Application to elastostatics is also discussed.

Key Words: *Boundary-value Problem, Boundary-type Solution Method, Trefftz Method, Inverse Formulation, Nodeless Element, Boundary Element*

1　はじめに

偏微分方程式の境界値問題や初期値問題の近似解法として様々な解法が展開されているが，差分法，有限要素法および境界要素法が代表的な手法として多用されている [1]．これらの各手法にはそれぞれの特徴を有しているが，境界要素法は上記の 2 つの手法が領域型解法であることに対し，境界型解法であることに大きな特徴を有している．

現在，偏微分方程式の近似解法の境界型解法として境界要素法の他に，トレフツ (Trefftz) 法が存在している [2]．境界要素法では偏微分方程式の随伴微分作用素の基本解を用いるが，トレフツ法では，偏微分方程式の同次解を用いることになり，基本的な相異がある．基本解に含まれる特異性の処理に関する取り扱いを避けることから，トレフツ法を再評価し，様々な問題に適用しようとする研究も活発化している [3, 4, 5]．

本論では基本解の代わりにトレフツ法の基礎である未知関数の偏微分方程式の同次解および特解に基づいた境界型解法の提案と展開を示す．ポアソン方程式の境界値問題に対して提案する境界型解法を具体的に示す．

まず初めにこの境界値問題の積分表現として，重み付き積分定式化とそれから導かれる逆定式化を設定する．次にこの 2 つの積分表現に含まれる領域積分項を境界積分項に変換するための関数の近似表現と重み関数の選び方によって境界型解法が構築できることを示す．さらに，ポアソン方程式の境界値問題の拡張としての連成偏微分方程式としての弾性問題への適用についても言及する．

2　境界値問題とその積分表現

ポアソン方程式の次の境界値問題を考える．

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \widehat{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \tag{2}$$

$$q(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}) = \widehat{q} \quad \text{on} \quad \Gamma_q \tag{3}$$

ただし，$u(\boldsymbol{x})$ は未知関数，$b(\boldsymbol{x})$ は非同次関数，$\boldsymbol{n}$ は境界 Γ の外向き単位法線ベクトル，$\widehat{u}$ と $\widehat{q}$ は各境界上の規定値とする．

この境界値問題に対して，次の重み付き積分表現を与え

ることができる．

$$\int_\Omega \{\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})\} v(\boldsymbol{x})\, d\Omega + \int_{\Gamma_u} (u(\boldsymbol{x}) - \widehat{u})\tau(\boldsymbol{x})\, d\Gamma - \int_{\Gamma_q} (q(\boldsymbol{x}) - \widehat{q}) v(\boldsymbol{x})\, d\Gamma = 0 \tag{4}$$

ただし，$v(\boldsymbol{x})$ は重み関数とし，$\tau(\boldsymbol{x})$ はこの $v(\boldsymbol{x})$ を用いて $q(\boldsymbol{x})$ に対応する次式で与えるものとする．

$$\tau(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial v}{\partial n}(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

積分表現 (4) に 2 回発散定理を適用することによって，次の逆定式化 (inverse formulation) を得る．

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{x}) \nabla^2 v(\boldsymbol{x})\, d\Omega + \int_\Omega b(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, d\Omega = \int_\Gamma \tau(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x})\, d\Gamma - \int_\Gamma q(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, d\Gamma \tag{6}$$

3　境界型解法

3.1　重み付き積分表現に基づく境界型解法

積分表現 (4) に基づく境界型解法を考える．式 (4) の左辺の第 1 項に注目し，未知関数 $u(\boldsymbol{x})$ をポアソン方程式 (1) の同次式の一般解 $u^h(\boldsymbol{x})$ と特解 $u^p(\boldsymbol{x})$ との和

$$u(\boldsymbol{x}) = u^h(\boldsymbol{x}) + u^p(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

として選ぶことにすると，式 (4) は次の境界積分項のみからなる次の積分表現となる．

$$\int_{\Gamma_u} (u(\boldsymbol{x}) - \widehat{u})\tau(\boldsymbol{x})\, d\Gamma - \int_{\Gamma_q} (q(\boldsymbol{x}) - \widehat{q}) v(\boldsymbol{x})\, d\Gamma = 0 \tag{8}$$

ここで，ラプラス方程式の一般解 $u^h(\boldsymbol{x})$ を，調和関数 $\phi_i(\boldsymbol{x})$ の次のような線形結合によって近似する．

$$u^h(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

この近似および $v(\boldsymbol{x}) = \phi_i(\boldsymbol{x})$ とを境界積分式 (8) に代入することによって，未知係数 a_i に対する次の決定方程式を得る．

$$A_{ij} a_i = d_j \tag{10}$$

ただし，

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_u} \phi_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial n}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \frac{\partial \phi_i(\boldsymbol{x})}{\partial n} \phi_j(\boldsymbol{x})\, d\Gamma \tag{11}$$

$$d_j = \int_{\Gamma_u} (\widehat{u} - u^p(\boldsymbol{x})) \frac{\partial \phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial n}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_q} (\widehat{q} - \frac{\partial u^p(\boldsymbol{x})}{\partial n}) \phi_j(\boldsymbol{x})\, d\Gamma \tag{12}$$

未知係数 a_i に関する連立 1 次方程式 (10) を解くことによって a_i を定め，これを式 (9) に代入し，式 (7) を考慮することによって，未知関数の近似 $\widetilde{u}(\boldsymbol{x})$ が得られる．

以上の近似解法は，未知関数の同次解 $u^h(\boldsymbol{x})$ の近似に伴う未知係数 a_i を境界積分方程式 (8) を用いて決定しようとするものであるから境界型解法となる．なお，この解法において，同次解の近似 (9) は調和関数 $\phi_i(\boldsymbol{x})$ の線形結合として表現されていて，その未知係数 a_i は特に関数の節点値としての意味を有さないので無節点要素近似 [6, 7] となっている．さらに，任意の点 $\boldsymbol{x}$ における関数およびその導関数は，次式を用いて容易に計算できる．

$$\left.\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) &\simeq \widetilde{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i + u^p(\boldsymbol{x}) \\ q(\boldsymbol{x}) &\simeq \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial n}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial u^p}{\partial n}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

3.2　逆定式化に基づく境界型解法

次に逆形式 (6) に基づく境界型解法を展開する．逆定式化 (6) の左辺に注目し，重み関数 $v(\boldsymbol{x})$ としてラプラス方程式の同次解，すなわち，$\nabla^2 v(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす関数 $\overline{v}(\boldsymbol{x})$ を選ぶことにすると，式 (6) は次式となる．

$$\int_\Gamma \overline{\tau}(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x})\, d\Gamma \int_\Gamma q(\boldsymbol{x}) \overline{v}(\boldsymbol{x})\, d\Gamma = \int_\Omega b(\boldsymbol{x}) \overline{v}(\boldsymbol{x})\, d\Omega \tag{14}$$

上記の非同次項の領域積分に対し，2 重相反法 (dual reciprocity method)[8] を導入して境界積分項に変換する．非同次項 $b(\boldsymbol{x})$ を適当な関数 $f_j(\boldsymbol{x})$ の線形結合として次のように近似する．

$$b(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_j f_j(\boldsymbol{x}) \tag{15}$$

ただし，$f_j(\boldsymbol{x})$ は，各 j に対し，

$$\nabla^2 \psi_j(\boldsymbol{x}) = f_j(\boldsymbol{x}) \tag{16}$$

となる $\psi_j(\boldsymbol{x})$ を定めるものとする．以上より，$b(\boldsymbol{x})$ は次のように近似表現されることになる．

$$b(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_j \nabla^2 \psi_j(\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

この表現を式 (14) の右辺に代入すると，

$$\begin{aligned} &\int_\Omega b(\boldsymbol{x}) \widetilde{v}(\boldsymbol{x})\, d\Omega \simeq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N+L} \alpha_j \nabla^2 \psi_j(\boldsymbol{x}) \right) \overline{v}(\boldsymbol{x})\, d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_\Gamma \frac{\partial \psi_j(\boldsymbol{x})}{\partial n} \overline{v}(\boldsymbol{x})\, d\Gamma - \int_\Gamma \psi_j(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \overline{v}(\boldsymbol{x})}{\partial n}\, d\Gamma + \int_\Omega \psi_j(\boldsymbol{x}) \nabla^2 \overline{v}(\boldsymbol{x})\, d\Omega \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_\Gamma \frac{\partial \psi_j(\boldsymbol{x})}{\partial n} \overline{v}(\boldsymbol{x})\, d\Gamma - \int_\Gamma \psi_j(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \overline{v}(\boldsymbol{x})}{\partial n}\, d\Gamma \right\} \end{aligned} \tag{18}$$

となる．

以上より，逆定式化 (14) は次の境界積分方程式となる．

$$\int_\Gamma \overline{\tau}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\,d\Gamma - \int_\Gamma q(\boldsymbol{x})\overline{v}(\boldsymbol{x})\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_\Gamma \frac{\partial \psi_j(\boldsymbol{x})}{\partial n}\overline{v}(\boldsymbol{x})\,d\Gamma - \int_\Gamma \psi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial \overline{v}(\boldsymbol{x})}{\partial n}\,d\Gamma \right\} \tag{19}$$

ここで，境界上の未知関数 $u(\boldsymbol{x})$ と $q(\boldsymbol{x})$ とを求めるための離散化手法を考える．まず境界 Γ を M 個の弦 e_l $(l = 1, 2, \ldots, M)$ の和によって近似すると，式 (19) は次のようになる．

$$\sum_{l=1}^{M} \left(\int_{e_l} u(\boldsymbol{x})\overline{\tau}(\boldsymbol{x})\,d\Gamma - \int_{e_l} q(\boldsymbol{x})\overline{v}(\boldsymbol{x})\,d\Gamma \right) = \sum_{l=1}^{M}\sum_{i=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_{e_l} \frac{\partial \psi_j(\boldsymbol{x})}{\partial n}\overline{v}(\boldsymbol{x})\,d\Gamma - \int_{e_l} \psi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial \overline{v}(\boldsymbol{x})}{\partial n}\,d\Gamma \right\} \tag{20}$$

さらに，$u(\boldsymbol{x})$ と $q(\boldsymbol{x})$ とを e_l 上でたとえば一定値，すなわち一定境界要素

$$\left.\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) \simeq \widetilde{u}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{u}(\boldsymbol{x}_l) \equiv \widetilde{u}_l \\ q(\boldsymbol{x}) \simeq \widetilde{q}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{q}(\boldsymbol{x}_l) \equiv \widetilde{q}_l \end{aligned}\right\} (\boldsymbol{x}_l \in e_l) \tag{21}$$

を導入する．この結果，式 (20) は次のようになる．

$$\sum_{l=1}^{M} \left\{ \left(\int_{e_l} \overline{\tau}(\boldsymbol{x})\,d\Gamma \right) \widetilde{u}_l - \left(\int_{e_l} \overline{v}(\boldsymbol{x})\,d\Gamma \right) \widetilde{q}_l \right\} = \sum_{l=1}^{M}\sum_{i=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_{e_l} \frac{\partial \psi_j(\boldsymbol{x})}{\partial n}\overline{v}(\boldsymbol{x})\,d\Gamma - \int_{e_l} \psi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial \overline{v}(\boldsymbol{x})}{\partial n}\,d\Gamma \right\} \tag{22}$$

上式から，境界上の M 個の未知量 $\widetilde{u}_l$ と $\widetilde{q}_l$ とを決定するためには式 (22) から M 個の方程式を構成しなければならない．そこで，重み関数 $\overline{v}(\boldsymbol{x})$ を既に示したラプラス方程式の同次解 $\phi_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ と選ぶことにすると，次の離散化表現を得る．

$$\sum_{l=1}^{M} (H_{li}\widetilde{u}_l - G_{li}\widetilde{q}_l) = \sum_{l=1}^{M}\sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (A_{lji} - B_{lji}) \tag{23}$$

ただし，

$$H_{li} \equiv \int_{e_l} \frac{\partial \phi_i(\boldsymbol{x})}{\partial n}\,d\Gamma(\boldsymbol{x}) \tag{24}$$

$$G_{li} \equiv \int_{e_l} \phi_i(\boldsymbol{x})\,d\Gamma(\boldsymbol{x}) \tag{25}$$

$$A_{lji} \equiv \int_{e_l} \frac{\partial \psi_i(\boldsymbol{x})}{\partial n}\phi_i(\boldsymbol{x})\,d\Gamma(\boldsymbol{x}) \tag{26}$$

$$B_{lji} \equiv \int_{e_l} \psi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial \phi_i(\boldsymbol{x})}{\partial n}\,d\Gamma(\boldsymbol{x}) \tag{27}$$

$b(\boldsymbol{x})$ と境界条件 (2), (3) および関数 $f_j(\boldsymbol{x})$ に対して得られる離散化式 (23) を解くことによって $\widetilde{u}_l$ と $\widetilde{q}_l$ とを求めることができる．なお，離散化式 (23) に含まれている非同次項の展開係数 α_j は，具体的に与えられた関数 $f_j(\boldsymbol{x})$ に対し式 (15) から決定されている．

4　静弾性問題への適用

4.1　境界値問題とその積分表現

等方等質弾性体の混合型境界値問題への適用を与える．問題とその積分定式化は次のようになる．

- 釣合式

$$S_{ij,j} + b_i = 0 \quad (S_{ij} = S_{ji}) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{28}$$

- 応力-歪関係式

$$S_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{l,l}\delta_{ij} \tag{29}$$

- ナビェ方程式

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + b_i = 0 \tag{30}$$

- 境界条件

$$u_i = \widehat{u}_i \qquad \text{on} \quad \Gamma_u \tag{31}$$

$$s_i = S_{ij}n_j = \widehat{s}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_s \tag{32}$$

ただし，S_{ij} は応力テンソル，u_i は変位ベクトル，b_i は物体力ベクトル，μ と λ はラメ定数，s_i はトラクションとする．

- 重み付き積分定式化

$$\int_\Omega (S_{ij,j} + b_i)v_j\,d\Omega + \int_{\Gamma_u} (u_i - \widehat{u}_i)\tau_i\,d\Gamma - \int_{\Gamma_s} (s_i - \widehat{s}_i)v_i\,d\Gamma = 0 \tag{33}$$

- 逆定式化

$$\int_\Omega T_{ij,j}u_i\,d\Omega + \int_\Omega b_i v_i\,d\Omega = \int_\Gamma \tau_i u_i\,d\Gamma - \int_\Gamma s_i v_i\,d\Gamma \tag{34}$$

ただし，T_{ij} は重み関数（擬変位ベクトル）v_j に対する擬応力ベクトルとし，τ_i は T_{ij} による擬トラクションとする．

4.2　境界型解法

重み付き積分定式化 (33) に基づく境界型解法について示すことにする．

変位ベクトル $u_i(\boldsymbol{x})$ を非同次ナビェ方程式 (30) の同次解 $u_i^h(\boldsymbol{x})$ と特解 $u_i^p(\boldsymbol{x})$ との和

$$u_i(\boldsymbol{x}) = u_i^h(\boldsymbol{x}) + u_i^p(\boldsymbol{x}) \tag{35}$$

として与えるものとすると，式 (33) は次のように境界積分方程式となる．

$$\int_{\Gamma_u} (u_i(\boldsymbol{x}) - \widehat{u}_i)\tau_i(\boldsymbol{x})\,d\Gamma - \int_{\Gamma_s} (s_i(\boldsymbol{x}) - \widehat{s}_i)v_i(\boldsymbol{x})\,d\Gamma = 0 \tag{36}$$

ナビエ方程式 (30) を満たす変位ベクトル $u_j(\boldsymbol{x})$ はナビエ方程式の微分作用素行列 L_{ij} とその転置余因子行列 M_{ij} とを用いることによって，次のようにポテンシャル $\phi_l(\boldsymbol{x})$ 表現として与えられる [9].

$$u_j(\boldsymbol{x}) = M_{jl}\phi_l(\boldsymbol{x}) \tag{37}$$

ただし，各ポテンシャル $\phi_l(\boldsymbol{x})$ は次の微分方程式の解である.

$$L\phi(\boldsymbol{x}) \equiv M(\lambda+2\mu)\Delta^2\phi_i(\boldsymbol{x}) = -b_i \tag{38}$$

このように解としての各ポテンシャル $\phi_i(\boldsymbol{x})$ を L 個の $\boldsymbol{x}$ の多項式 $m_{il}(\boldsymbol{x})$ の和として

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) \simeq \widetilde{\phi}_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{L} c_l m_{il}(\boldsymbol{x}) \tag{39}$$

と近似することによって変位ベクトルの近似 $\widetilde{u}_j(\boldsymbol{x})$ が構築できる.

近似変位ベクトル $\widetilde{u}_j(\boldsymbol{x})$ と重み関数 $v_j(\boldsymbol{x}) = m_{jl}(\boldsymbol{x})$ $(l = 1, 2, \ldots, L)$ を式 (36) に代入することによって，未知係数 c_l に関する離散化表現を得る.

なお，逆定式化 (34) に基づく境界型解法に対しても，ポアソン方程式に関する 3.2 節で示した考え方に順じて構成することができる．すなわち，重み関数 $v_i(\boldsymbol{x})$ として式 (38) の同次解を選び，外力ベクトル $b_i(\boldsymbol{x})$ に 2 重相反法を適用し，未知関数 $u_i(\boldsymbol{x})$ と $s_i(\boldsymbol{x})$ に境界要素を用いることによって離散化式を得る.

5　おわりに

偏微分方程式の境界値問題の近似解を求めるための境界型解法について述べてきた.

本論での境界型解法は，従来の境界要素法とは異なり，微分作用素の基本解を利用する代わりに対象とする微分方程式の特異性を含まない同次解（またはトレフツ関数）や特解を利用することに特徴を有する.

そのような境界型解法をポアソン方程式の境界値問題という具体的な問題を対象として展開した．その境界値問題の積分表現として重み付き積分定式化（境界値問題の重み付き積分表示）とそこから得られる逆定式化とを設定した．次に，その 2 つの積分表示に基づく境界型解法を与えた.

重み付き積分定式化に基づく解法は，非同次微分方程式の同次解と特解から構成された未知関数とその導関数の近似表現を基にした境界型解法である．この解法では，特に特解の構成が問題となる．与えられた非同次関数に対応した特解の構成は種々の手法を用いて行う必要がある．なお，このような未知関数の近似表現は，従来の節点値による補間による境界要素の導入ではなく無節点要素の採用を意味している.

逆定式化に基づく解法は，未知関数の境界要素による近似表現と非同次項の領域積分の 2 重相反手法による境界積分項への変換とを導入し，同次解を重み関数とした離散化手法である.

ポアソン方程式および弾性方程式に対して提案した境界型解法による数値計算例を通した有効性の検証は今後の課題である.

参考文献

(1) 登坂宣好・大西和榮: 「偏微分方程式の数値シミュレーション（改訂版）」，東京大学出版会，2003

(2) 神谷紀生・北栄輔: 「トレフツ法入門」，コロナ社，2000

(3) 登坂宣好: 偏微分方程式の境界型近似解法，日本シミュレーション学会第 18 回計算電気・電子工学シンポジウム論文集，55–58, 1997

(4) Cheung Y. K., W. G. Jin, O. C. Zienkiewicz: Direct Solution Procedure for Solution of Harmonic Problems Using Complete, Non-Singular, Trefftz Functions, Communications in Applied Numerical Methods, 5, 159–169, 1989

(5) Jin, W. G., Y. K. Cheung, O. C. Zienkiewicz: Application of the Trefftz Method in Plane Elasticity Problems, Int. J. Numer. Methods Eng., 30, 1147–1161, 1990

(6) 川井忠彦: 固体力学問題の新しい離散化解析法の開発，日本機械学会材料力学部門講演会講演論文集，25–28, 1998

(7) 風間悦男，北山光也，川井忠彦: 2 次元弾性論における計算解析解の展開，日本機械学会第 12 回計算力学講演会講演論文集，777–778, 1999

(8) Partridge, P., C. A. Brebbia, L. C. Wrobel: “The Dual Reciprocity Boundary Element Method”, CML & Elsevier Applied Science, 1992

(9) 登坂宣好・中山司: 「境界要素法の基礎」，日科技連出版社，1987