

境界要素法による 3 次元異方性材料の調和振動解析法

AN EFFICIENT BOUNDARY INTEGRAL EVALUATION OF THREE-DIMENSIONAL TIME-HARMONIC BEM ANALYSIS OF ANISOTROPIC MATERIALS

松本 敏郎¹⁾, 田中 正隆²⁾, 石川 真之³⁾, 小川 洋平⁴⁾

Toshiro MATSUMOTO, Masataka TANAKA, Masayuki ISHIKAWA and Youhei OGAWA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 3) エスエムシー (株) (〒 105-0004 東京都港区新橋 1-13-12)
 4) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: ogawa@artist.shinshu-u.ac.jp)

The fundamental solution for time-harmonic vibration of an anisotropic elastic solid is represented with a double integral over the unit sphere. In this paper, a simple and efficient technique for approximate evaluation of the boundary integral with this fundamental solution is presented. The effectiveness of the approach for reducing the computation time is demonstrated through some numerical results.

Key Words: Boundary Element Method, Time-Harmonic Elastodynamics, Fundamental Solution, Anisotropic Material, Numerical Integration

1. はじめに

複合材料や機能性材料が機械要素・部品等に広く用いられるようになり、異方性材料の応力解析が重要となっている。境界要素法は等方弾性体の応力解析では高精度な数値解析法として確立しており、完全な異方性材料の弾性解析にも用いられるようになっている⁽¹⁾。

境界要素法の定式化では、支配微分方程式の基本解が必要となるが、3次元の異方性弾性体の場合は、その陽な形を得ることは困難であり、通常は単位円周上に沿った積分表現が用いられる。離散化された境界積分方程式の係数には基本解を含む関数の数値積分が必要となるが、その過程において基本解の計算自体も数値積分を行わなければならない、計算コストが大きくなる。しかしながら、静的な問題の場合は、基本解の中で距離に依存せず方向のみに依存する部分をあらかじめ計算して数表を作成し、実際の要素ごとの数値積分ではそれらの値を補間した値を用いる方法により、効率化を図ることができる⁽⁴⁾。一方、定常振動問題の解析では、基本解の正則な部分が単位球面上の二重積分で表現され、関数値が基本解のソース点と場の点の距離の関数となっているため、このような方法を用いることができず、基本解の計算コストが極めて大きくなるという問題点がある。境界要素法の定式化においては、支配微分方程式の基本解が必要となるが、定常振動問題における異方性材料の変形・応力解析に対する基本解は単位球面上の二重積分として数値積分しなければならない、

計算時間がかかる。

そこで本研究では、要素ごとに基本解の値を補間することにより、境界要素法による3次元異方性弾性体の調和振動解析の効率化を図る方法を提案する。また、数値解析例によりソース点と積分する要素の距離が数値解に及ぼす影響を示す。

2. 理 論

2.1. 支配微分方程式

線形弾性体を考えると、運動方程式は次式ようになる。

$$\sigma_{ij,i} - \rho \partial_t^2 U_j = -b_j \quad (1)$$

ただし、 σ_{ij} は応力、 ρ は密度、 b_j は物体力、 U_j は変位である。また、 ∂_t は時間による偏微分である。

異方性弾性体の構成式を変位を用いた表現で表すと次式となる。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} U_{k,l} \quad (2)$$

ただし、 C_{ijkl} は弾性定数テンソルである。

構成式を運動方程式に代入し、角振動数 ω の定常振動状態を考えると、異方性材料の調和振動問題の支配微分方程式が次のように得られる。

$$C_{ijkl} \partial_l \partial_i U_k + \rho \omega^2 \delta_{jk} U_k = -\delta_j \quad (3)$$

式 (3) の微分作用素は自己随伴作用素である．したがって境界要素法の定式化に必要な基本解 U_{km}^* は，次の微分方程式の特解となる．

$$C_{ijkl}\partial_i\partial_j U_{km}^* + \rho\omega^2\delta_{jk}U_{km}^* = -\delta_{jm}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (4)$$

ただし， \mathbf{x} ， \mathbf{y} はそれぞれ場の任意の点と基本解の選点の位置ベクトルである．

2.2. Radon 変換

式 (4) の基本解は，Radon 変換⁽²⁾を用いると容易に求めることができる．Radon 変換とは，多次元空間における関数を超平面 ($\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=s$ で表される平面) 上での積分として表す変換法である．Radon 変換を用いると偏微分方程式が s に関する常微分方程式に変換される．

3次元空間内の1点を $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ とする． \mathbf{x} に関する関数 $f(\mathbf{x})$ の Radon 変換は，次式で定義される．

$$\bar{f}(s, \mathbf{n}) = \mathbf{R}\{f(\mathbf{x})\} = \int f(\mathbf{x})\delta(s - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (5)$$

ただし， \mathbf{n} は単位ベクトルである．式 (5) の右辺の積分は， $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=s$ によって決められる平面上での積分となっている．

次に Radon 逆変換の理論について示す．Radon 逆変換は Radon 変換された関数をパラメータ s で2回微分したものをを用いて，次式によって表される．

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^*(\bar{f}) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\Omega} \partial_s^2 \bar{f}(s, \mathbf{n}) \Big|_{s=\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} d\Omega(\mathbf{n}) \quad (6)$$

ただし， Ω は通常 $|\mathbf{n}|=1$ で定義される単位球面上の積分として評価される．

2.3. 基本解

式 (4) の基本解を Radon 変換に基づき求めると，次のように書けることがわかっている⁽³⁾．

$$U_{kl}^* = U_{kl}^{*S} + U_{kl}^{*R} \quad (7)$$

ここで， U_{kl}^{*S} は特異性を有する部分で，静的な問題の基本解に対応する．また， U_{kl}^{*R} は動的な効果に対応する正則な部分である．

等方性弾性体においては U_{kl}^{*S} は Kelvin の解であるが，異方性弾性体の場合では次式のような単位円周上での積分の形⁽⁴⁾で表される．

$$U_{kl}^{*S} = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} Q_{kl}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) d\phi \quad (8)$$

ただし，

$$Q_{kl} = C_{ijkl}n_i n_j \quad (9)$$

であり， $n_i = \mathbf{n}$ は Fig.1 に示す座標系により表される単位ベクトルである．

Fig.1 に基づき，以下の式で定義される変数を導入する．

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = r \mathbf{e} \quad (10)$$

$$r = |\mathbf{r}| \quad (11)$$

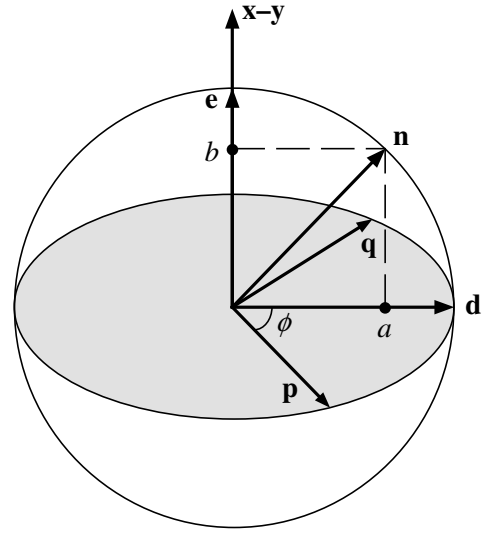


Fig.1 Geometrical relation between \mathbf{x} , \mathbf{e} , \mathbf{d} and \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = (\sqrt{1-b^2}) \mathbf{d} + b \mathbf{e} \quad (12)$$

$$\mathbf{d}(\phi) = \cos \phi \mathbf{p} + \sin \phi \mathbf{q} \quad (13)$$

U_{kl}^{*R} は特異性を有しないが，その値を計算するためには次式のような二重積分を評価しなければならない．

$$U_{kl}^{*R} = \frac{i\omega}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 \frac{\sqrt{\rho/\lambda_m} A_{kl}^m}{\lambda_m A_{gg}^m} \times e^{i\omega|r|b|\sqrt{\rho/\lambda_m}} db d\phi \quad (14)$$

ただし，

$$A_{kl}^m = \text{adj}[Q_{kl} - \lambda_m \delta_{kl}] \quad (15)$$

であり， λ_m ($m=1, 2, 3$) はマトリックス Q_{kl} の固有値， adj は余因子行列を意味する．

また，表面力に関する基本解 T_{kl}^* は次式により U_{kl}^* と関係づけられる．

$$T_{jm}^* = C_{ijkl} U_{km,ln}^* \quad (16)$$

したがって， T_{kl}^* を計算するためには U_{kl}^* の勾配が必要となる．特異項と正則項の勾配は，それぞれ，以下の式のように得られる．

$$U_{kl,j}^{*S} = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} \left[Q_{kl,j}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) - \frac{r_{,j}}{r} Q_{kl}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) \right] d\phi \quad (17)$$

$$U_{kl,j}^{*R} = \frac{-\omega^2}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 \frac{\rho}{\lambda_m^2} \frac{A_{kl}^m}{A_{gg}^m} n_j \times e^{i\omega|r|b|\sqrt{\rho/\lambda_m}} db d\phi \quad (18)$$

これらの式を用いて計算された $U_{kl,j}^*$ を式 (16) に代入することにより， T_{jm}^* を計算することができる．式 (17) より，表面力の基本解の特異性は $O(1/r^2)$ であり，境界積分方程式の評価に際しては，等方弾性体の場合と同じ方法が適用できる．

2.4. 境界積分方程式

以上の基本解を用いると、異方性材料の調和振動解析に対する積分表現が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} U_i(y) + \int_{\Gamma} T_{kl}^*(x, y) U_k(x) d\Gamma(x) \\ = \int_{\Gamma} U_{kl}^*(x, y) T_k(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、 $U_i(y)$ は領域内部の点 y の変位、 Γ は境界を表す。また T_k は表面力ベクトルであり、式 (16) と同様に、次式により変位と関係づけられる。

$$T_j = C_{ijkl} U_{k,l} n_i \quad (20)$$

式 (19) は、ポテンシャル問題における Green の公式や、静弾性問題における Somigliana の公式に対応した積分公式である。式 (19) で、点 y を境界上に移行すれば、境界上の U_k と T_k だけに関係づける境界積分方程式を導出できる。それを正則化すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} T_{kl}^*(x, y) \{U_k(x) - U_k(y)\} d\Gamma(x) \\ + \int_{\Gamma} T_{kl}^{*R}(x, y) U_k(y) d\Gamma(x) \\ = \int_{\Gamma} U_{kl}^*(x, y) T_k(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (21)$$

式 (21) において、 T_{kl}^* は $O(1/r^2)$ であり Cauchy の主値のオーダーの強い特異性を有する積分核であるが、変位が Hölder 連続である場合には、式 (21) の積分はすべて特異積分とならず、通常の意味での積分として評価することができる。本研究においては、式 (21) を、2 次の 8 節点アイソパラメトリック要素により離散化する。離散化のプロセスは、通常境界要素法における方法と同様であり、その詳細は省略する。式 (21) を離散化することにより、最終的に節点値に関する次の代数方程式を得る。

$$[H]\{U\} = [G]\{T\} \quad (22)$$

式 (22) に変位、表面力に関する境界条件を適用して、境界の未知量に関して解くことにより境界の未知量をすべて得ることができる。

3. 解析の効率化

境界を N_e 個の要素により分割したものとすると、離散化された境界要素法は次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y})U_i(\mathbf{y}) = \sum_{k_e=1}^{N_e} \left\{ \sum_{q=1}^8 \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^*(\mathbf{y}) \phi^q(\xi) \right. \right. \\ \left. \left. \times |G(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 \right] T_i^q \right\} \\ - \sum_{k_e=1}^{N_e} \left\{ \sum_{q=1}^8 \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^*(\mathbf{y}) \phi^q(\xi) \right. \right. \\ \left. \left. \times |G(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 \right] U_i^q \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、 N_e は要素番号、 ϕ は内挿関数、 ξ_1, ξ_2 は要素内の無次元座標、 $|G(\xi_1, \xi_2)|$ はヤコビアンである。

定常振動問題の基本解は正則項と特異項に分けることができ、静的な問題に対しては基本解は特異項のみの計算でよく、基本解の中の距離に依存しない部分については数表をあらかじめ作成し、任意の点に関する基本解の値はそれを補間して計算する方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾により計算の効率化を図ることができる。しかしながら動的な問題においては正則項が距離に依存する二重積分であり、このような方法を用いることができない。そこで、境界要素解析に要する計算時間を短縮するため、次式のように積分の対象となる要素を構成する節点において基本解の値をまず求め、内挿関数で補間する方法を用いることにする。

$$U_{ij}^*(\mathbf{y}) = \sum_{p=1}^8 \phi^p(\xi) U_{ij}^*(\xi^p, \mathbf{y}) \quad (24)$$

$$T_{ij}^*(\mathbf{y}) = \sum_{p=1}^8 \phi^p(\xi) T_{ij}^*(\xi^p, \mathbf{y}) \quad (25)$$

ここで、式 (24)、(25) を式 (23) に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y})U_i(\mathbf{y}) = \sum_{k_e=1}^{N_e} \left\{ \sum_{q=1}^8 \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{p=1}^8 \left(\phi^p(\xi) U_{ij}^*(\xi^p, \mathbf{y}) \right) \phi^q(\xi) \right. \right. \\ \left. \left. \times |G(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 \right] T_i^q \right\} \\ - \sum_{k_e=1}^{N_e} \left\{ \sum_{q=1}^8 \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{p=1}^8 \left(\phi^p(\xi) T_{ij}^*(\xi^p, \mathbf{y}) \right) \phi^q(\xi) \right. \right. \\ \left. \left. \times |G(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 \right] U_i^q \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

この式を解析対象の全範囲で適用した場合には、基本解の計算回数は、四角形二次要素を用いた場合において Gauss の数値積分点数を 8 点としたとき、1/8 回に減らすことができる。

4. 数値解析例

計算時間を比較するための解析例として Fig.2 のようなモデルを直交異方性体として解析した。このモデルに対して、境界節点数 170 点を図のように取り、56 個の 2 次要素により分割した。境界条件は、直方体の右側の面において x_1 軸方向のみを支持し、左側の面において調和加振力 1 [MPa] を与えた。また、異方性の主軸は解析対象の座標軸と一致しており弾性定数を Table1 とし、密度を 6000 [kg/m³]、角振動数を 9.32×10^3 [rad/s] とする。

要素の 1 辺の長さを l とし、Fig.3 に示すようにソース点からの距離が L を超える要素についてのみ式 (26) を適用し、それ以外の要素については、通常の方法で基本解の計算を行った。このときの計算時間と計算精度の比較を Table2 に示す。表の中の誤差は、相対誤差の最大値である。計算には Apple Computer 社製の iMac G3 400MHz を用い、Pro Fortran 6.0

Table 1 Elastic constants of an anisotropic material

$C_{11}(=C_{22})$	162.0
C_{12}	92.0
$C_{13}(=C_{23})$	69.0
C_{33}	181.0
$C_{44}(=C_{55})$	46.7
C_{66}	35.2

unit: [GPa]

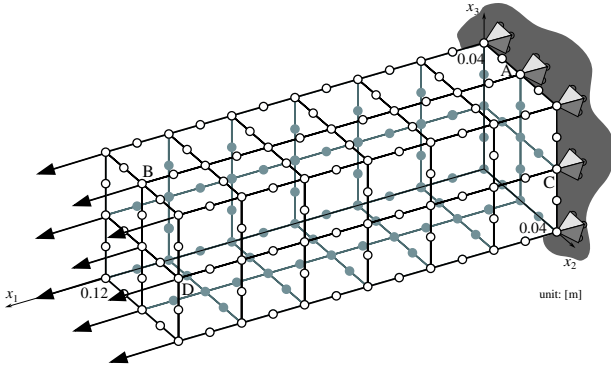


Fig. 2 Analysis model

を用いてコンパイルして計算を行った．基本解の値を内挿する関数は，解析対象の形状を内挿する関数と同じものを用いた．

$L/l = 1.0$ までの範囲ならば，通常の方法の場合の半分以下の計算時間で精度の良い結果が得られていることがわかる．

5. おわりに

異方性弾性体の調和振動問題の境界要素法における基本解の計算の効率化を図ることにより，解析時間の短縮を図る方法を提案した．本論文で示した方法では，通常の方法の半分以下の計算時間で同程度の高精度な解が得られることを，数値実験により示した．しかしながら，この方法によっても計算時間は依然大きく，より効率化を図る工夫が検討課題として残されている．

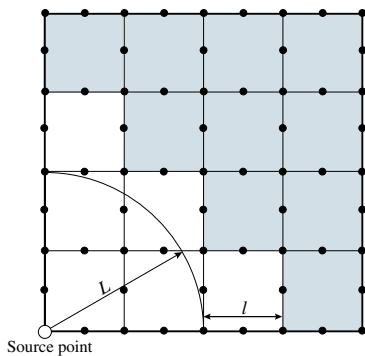


Fig. 3 Area for efficient integration scheme (Shaded regeon)

Table 2 Results for computation time and relative error [%]

L/l	CPU [sec]	Error of U_1	Error of T_1
∞	8735	0.022	0.036
2.0	5093	0.046	0.758
1.5	4364	0.047	0.553
1.0	4053	0.077	0.955
0.5	3118	0.918	13.837
0.0	2799	6.821	46.776

参考文献

- (1) Schlar, N.A.: Anisotropic Analysis using Boundary Elements, Topics in Engineering Volume 20. Southampton UK and Boston USA, Computational Mechanics Publications, (1994).
- (2) Gel'fand, I.M. Graev, M.I. Vilenkin, N.Ya.: *GENERALIZED FUNCTIONS*, Vol.5, Academic Press, New York, (1966).
- (3) Wang, C.-Y. Achenbach, J.D.: Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids, *Proc. R. Soc. Lond., A* **449**, (1995), pp. 441–458.
- (4) Wilson, R.B. and Cruse T.A.: Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis. *Int. J. Num. Methods in Eng.*, **12**, (1978), pp. 1383–1397.
- (5) 石川晴雄，高木一：三次元異方性体の境界要素法による弾性解析（き裂を有する物体の解析），日本機械学会論文集，A **55**, 515, (1989), pp. 1554–1559.