

三次元逆散乱解析に基づいた欠陥断面の再構成

RECONSTRUCTION OF CROSS-SECTIONAL FLAW IMAGE BY THE
THREE-DIMENSIONAL INVERSE SCATTERING ANALYSIS村上賢治¹⁾, 中畑和之²⁾, 山田真幸³⁾, 北原道弘⁴⁾

Kenji MURAKAMI, Kazuyuki NAKAHATA, Masaki YAMADA and Michihiro KITAHARA

- 1) 東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06, E-mail: murakami@nde.civil.tohoku.ac.jp)
 2) 東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06, E-mail: nakahata@nde.civil.tohoku.ac.jp)
 3) 東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06, E-mail: myamada@civil.tohoku.ac.jp)
 4) 東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06, E-mail: kitahara@civil.tohoku.ac.jp)

Three-dimensional inverse scattering methods are modified to a suitable form of ultrasonic measurements for the material with cylindrical surface. The methods are applied to the reconstruction of cross-sectional image of three-dimensional flaws. In this process, Gaussian beam profiles are introduced to model the incident wave fields radiated from ultrasonic transducers. The performance of the modified methods is investigated by imaging the cross-sectional slices for the spherical and cylindrical cavities.

Key Words : Born inversion, Kirchoff inversion, Gaussian beam, Elastodynamic BEM

1. はじめに

弾性体内に存在する欠陥によって散乱された散乱波の積分表現をもとに、逆に欠陥の大きさ、傾き、形状等の幾何学量を求める手法の一つとして弾性逆散乱法が挙げられる。弾性逆散乱法の代表が、欠陥内の変位場にボルン近似を導入したボルン逆散乱解析⁽¹⁻³⁾、欠陥表面の変位場にキルヒホフ近似を導入したキルヒホフ逆散乱解析⁽⁴⁾である。また、ボルン逆散乱解析とキルヒホフ逆散乱解析の基本アルゴリズムの類似性に着目することにより、両者を統合した体積状と面状欠陥の幾何学量の推定⁽⁵⁾、ポイドとクラックの識別⁽⁶⁾も試みられている。ボルンあるいはキルヒホフ逆散乱解析により3次元欠陥像を完全に再構成するためには、欠陥を取り囲む全方向からの散乱波データを必要とする。しかし、現実的な応用の場において、散乱波計測のための計測面は欠陥を囲むように確保することが難しく、計測面(方向)は制約を受ける場合が多い。本論文では、円柱状の支柱構造物内部に存在する欠陥形状を再構成することを意図して、円柱側面に垂直かつ円周に沿う方向からの散乱波が計測可能である場合を想定し、これらの方向から得られる散乱波形データを基にした3次元欠陥の再構成法について検討する。なお、円周に沿う方向から送信する超音波ビームの振幅プロファイルとして、ここではガウス分布⁽⁷⁾を仮定し、超音波ビームの広がり形状再構成結果に与える影響について考察する。また、形状再構成には3次元欠陥により散乱された散乱波動場の散乱振幅が必要となるが、この散乱振幅は境界要素法⁽⁸⁾を基に数値解析的に計算する。

2. 三次元逆散乱解析

3次元欠陥再構成のための線形化逆散乱解析法の理論はすでに発表⁽⁹⁾されているが、後に示す一側面からの超音波計測のための逆散乱解析法の導出に必要な関係式について要約する。Fig.1に示すような均質等方な3次元無限弾性体 D 内に空洞状の欠陥 D^c が存在しているものとする。このとき測定境界面上の y 点に設置した探触子によって縦波入射波 u^0 を欠陥近傍の点 O に向けて送信し、欠陥 D^c によって探触子方向 \hat{y} に散乱された散乱波 u^{sc} を同じ探触子で受信するパルス・エコーモードを採用する。欠陥を取り囲むように多点で散乱波形を計測することにより、受信散乱波形から逆に欠陥の形状を推定する。実際の超音波計測において、散乱波形は欠陥の寸法に比べて遠方で計測されることが多い。従って、欠陥 D^c によって散乱された波動は後方散乱縦波と横波が分離でき、この遠方散乱波の表現は3次元問題の場合、次のようになる。

$$u_m^{sc}(\mathbf{y}) = D(k_L|\mathbf{y}|)A_m^L(k_L, \hat{\mathbf{y}}) + D(k_T|\mathbf{y}|)A_m^T(k_T, \hat{\mathbf{y}}) \quad (1)$$

ここで、 k_L と k_T はそれぞれ縦波と横波の波数である。また、 $D(k_\alpha z) = \exp(ik_\alpha z)/4\pi z$ ($\alpha = L, T$)は球面波の遠方表現であり、 $A_m^L(k_L, \hat{\mathbf{y}})$ と $A_m^T(k_T, \hat{\mathbf{y}})$ はそれぞれ縦波と横波の散乱振幅を表している。ここでは受信波動成分のうち縦波散乱振幅 A_m^L を利用する。実際の計測では、Fig.1における超音波の送信中心 O は欠陥近傍の一点に前もって決めているので、計測点 y と超音波の送信中心 O の距離 $|y|$ は確定でき、関数 $D(k_L|\mathbf{y}|)$ の補正は可能⁽¹⁰⁾である。以上より、本論文における逆解析は式(1)の縦波散乱振幅 $A_m^L(\hat{\mathbf{y}})$ から逆に、材料

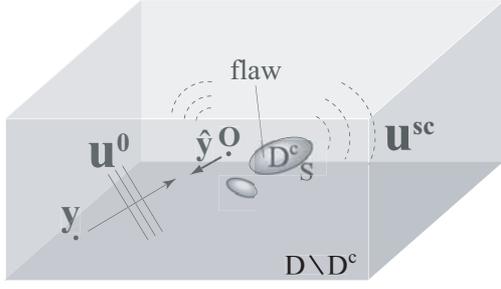


Fig.1 Three-dimensional wave field and interior flaws

内部の欠陥形状を推定する逆解析として以下のように定式化される．

2.1 ボルン逆解析

固体内への超音波の入射波は平面縦波であると仮定し，領域型の積分表現⁽⁹⁾にボルン近似を導入すれば，計測点における縦波成分の散乱振幅は次のように定式化できる．

$$A_m^L(k_L, \hat{\mathbf{y}})\hat{y}_m = 2u^0 k_L^2 \int_D \Gamma(\mathbf{x}) e^{-2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} dV(\mathbf{x}) \quad (2)$$

ここで， $\Gamma(\mathbf{x})$ は次式で定義されるように欠陥 D^c 内においてのみ値を有する特性関数である．

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{x} \in D^c \\ 0 & \text{for } \mathbf{x} \in D \setminus D^c \end{cases} \quad (3)$$

式(2)右辺の積分は $\mathbf{K} = 2k_L \hat{\mathbf{y}}$ と置いたとき，特性関数 Γ の \mathbf{K} -空間におけるフーリエ変換像であることから，欠陥の位置と形状を表す特性関数 $\Gamma(\mathbf{x})$ は散乱振幅 $A_m^L \hat{y}_m$ の逆フーリエ変換として次のように求められる．

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \oint \int_0^\infty \frac{A_m^L(k_L, \hat{\mathbf{y}})\hat{y}_m}{2u^0 k_L^2} \times e^{2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} 8k_L^2 dk_L d\Omega(\hat{\mathbf{y}}) \quad (4)$$

ここで， $d\Omega(\hat{\mathbf{y}})$ は $\hat{\mathbf{y}}$ 方向の原点 O に対する立体角を表す．

2.2 キルヒホフ逆解析

境界型の積分表現⁽⁹⁾にキルヒホフ近似を導入して線形化した縦波の散乱振幅は次式で表される．

$$A_m^L(k_L, \hat{\mathbf{y}})\hat{y}_m = 2iu^0 k_L \int_D \gamma(\mathbf{x}) e^{-2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} dV(\mathbf{x}) \quad (5)$$

ここで， $\gamma(\mathbf{x})$ は次式で定義される特異関数である．

$$\int_D \gamma dV = \int_S dS \quad (6)$$

即ち $\gamma(\mathbf{x})$ は，欠陥領域のうち境界上でのみ値を有する特異関数である．同様にして特異関数 $\gamma(\mathbf{x})$ は \mathbf{K} -空間の逆フーリエ変換により次のように表すことができる．

$$\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \oint \int_0^\infty \frac{-iA_m^L(k_L, \hat{\mathbf{y}})\hat{y}_m}{2u^0 k_L} \times e^{2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} 8k_L^2 dk_L d\Omega(\hat{\mathbf{y}}) \quad (7)$$

2.3 数値解析による模擬データを用いた欠陥再構成

ここでは，式(4)と(7)を基に，数値解析で求められた全方向の縦波散乱振幅 $A_m^L(k_L, \hat{\mathbf{y}})\hat{y}_m$ を用いて欠陥形状を再構成した結果を示す．Fig.2に示すようなポアソン比0.25の材料中に，空洞欠陥モデルとして球形キャビティと円柱キャビティを選んだ．超音波の送信中心 O をそれぞれのキャビティの中心に設定し，欠陥を取り囲むように全方向から超音波の送受信を行う．欠陥を再構成するためには縦波散乱振幅 $A_m^L \hat{y}_m$ が必要になるが，ここでは境界要素法と散乱波の遠方表現⁽⁸⁾を用いて探触子方向の遠方縦波散乱振幅を算出した．逆解析に要する縦波散乱振幅の波数帯域 k_L は，無次元化縦波波数で表現して $0.1 \leq ak_L \leq 10.0$ の範囲を使用した．Fig.3に球形キャビティの再構成結果を示す．Fig.3の上図は3次元ボルン逆解析およびキルヒホフ逆解析による再構成像であり， $\Gamma(\mathbf{x})$ ， $\gamma(\mathbf{x})$ の最大値でそれぞれを正規化し，しきい値を0.5以上として像を描いたものである．また， $\Gamma(\mathbf{x})$ ， $\gamma(\mathbf{x})$ の x_1-x_3 断面像を下図に示す．ボルン逆解析は特性関数 $\Gamma(\mathbf{x})$ を再構成することから欠陥の内部領域が再現できている．また，キルヒホフ逆解析は特異関数 $\gamma(\mathbf{x})$ を再構成することから欠陥の境界が再現されているのがわかる．Fig.4に円柱キャビティの3次元ボルンおよびキルヒホフ逆解析による再構成結果とその断面像を示す．円柱キャビティの角部を含めてかなり高精度な欠陥像が得られている．

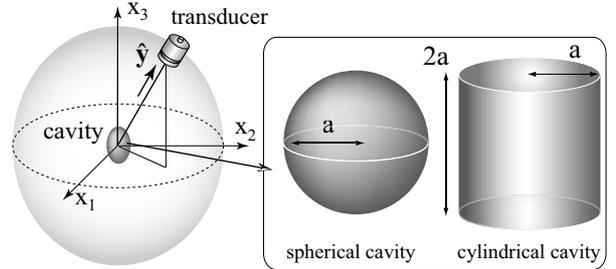


Fig.2 Transducer setting and numerical flaw models

3. 一側面計測のための逆散乱解析

既存の構造物に対する超音波探傷への適用を考えると，全方向からの欠陥による散乱波データを得ることは困難な場合が多い．しかし，橋梁の円柱橋脚部などの構造物においては，ある円周上の一側面で超音波計測が可能であることから，この計測面で得られる散乱波データから欠陥の断面形状を再構成する逆散乱手法について考える．

3.1 ボルン断面逆解析

3次元逆散乱解析法におけるボルン再構成式(4)をFig.5に示すような見込み角 θ と ϕ を用いて書き直せば，次のようになる．

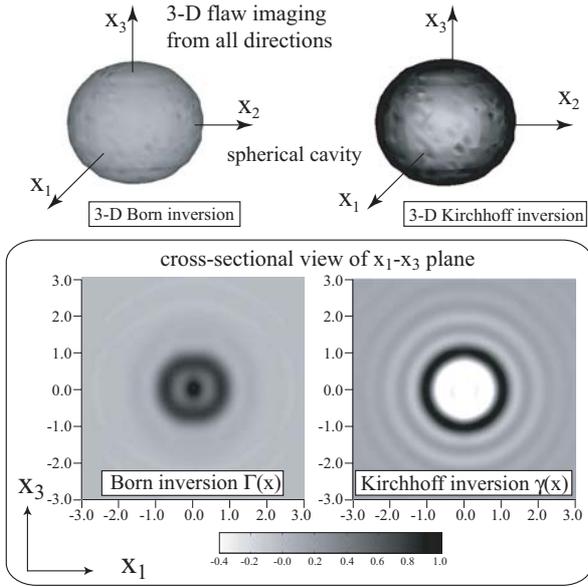


Fig.3 3-D reconstruction of spherical cavity and its cross-sectional view

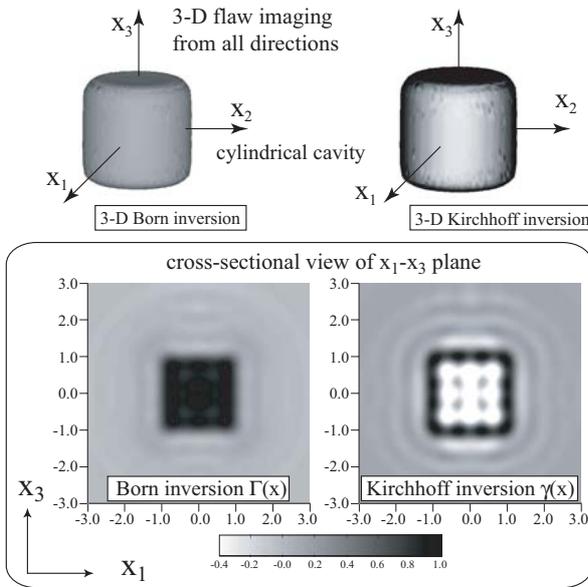


Fig.4 3-D reconstruction of cylindrical cavity and its cross-sectional view

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{A_m^L(k_L, \theta, \phi) \hat{y}_m}{2u^0 k_L^2} \times e^{2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} 8k_L^2 \sin \theta dk_L d\theta d\phi \quad (8)$$

ここで、Fig.5に示すように $\theta = \frac{\pi}{2}$ の一側面上で計測データが得られる場合を考える．このときの不完全な縦波散乱振幅データ $A_m^L(k_L, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi)$ を用いた際に得られる特性関数を $\bar{\Gamma}$ と書けば、この $\bar{\Gamma}$ は次のようになる．

$$\bar{\Gamma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{A_m^L(k_L, \theta, \phi) \hat{y}_m}{2u^0 k_L^2} \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) \times e^{2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} 8k_L^2 \sin \theta dk_L d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{A_m^L(k_L, \frac{\pi}{2}, \phi) \hat{y}_m}{2u^0 k_L^2} \times e^{2ik_L(x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi)} 8k_L^2 dk_L d\phi \quad (9)$$

上式を用いて、材料の一側面で計測された縦波散乱振幅データ $A_m^L(k_L, \frac{\pi}{2}, \phi) \hat{y}_m$ から、欠陥の x_1 - x_2 断面像の再構成を試みる．

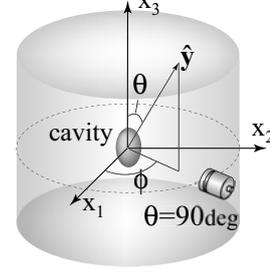


Fig.5 Spherical coordinate for measurement direction $\hat{\mathbf{y}}$

3.2 キルヒホフ断面逆解析

ポルン逆解析と同様な手順により、キルヒホフ再構成式 (7) から導かれる一側面の縦波散乱振幅データを用いた逆散乱解析式は次のようになる．

$$\bar{\gamma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-iA_m^L(k_L, \frac{\pi}{2}, \phi) \hat{y}_m}{2u^0 k_L} \times e^{2ik_L(x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi)} 8k_L^2 dk_L d\phi \quad (10)$$

3.3 数値解析のための入射ビームの設定

探触子から発せられる超音波ビームは進行方向に垂直な断面内で強度分布を持つことが知られている．一側面からの散乱振幅データを用いて欠陥の断面像を再構成する場合には、入射ビーム幅の到達範囲が欠陥の再構成結果に大きく影響してくると思われる．そこで、材料内に入射された超音波の波動場をなるべく現実に近い条件に設定するためにビームプロファイルを導入した解析を行う．ここでは、入射波の振幅プロファイルとしてガウス分布 (7) を仮定する．このとき、入射波は次のように表すことができる．

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = -F(r) \hat{\mathbf{y}} e^{-ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} \quad (11)$$

ここで、 $F(r)$ は Fig.6に示すように入射波の進行方向 $-\hat{\mathbf{y}}$ に直交する断面内における超音波ビームの中心軸からの距離 r を変数とする次のような関数である．

$$F(r) = e^{-\frac{r^2}{(d/2)^2}} \quad (12)$$

上式中の d はガウシアンビームのビーム半径を便宜的に定めたものであり、 $r = d$ のとき、振幅は入射波の進行方向に直交する断面内において次のように減少する．

$$F(d) = e^{-4} \cong 0.0183 \quad (13)$$

このときの d を本論文では入射ビーム半径と呼ぶことにする．このビーム半径は入射波の進行方向には変化せず、式 (12) に示した横断面内の振幅分布を保持しながら欠陥に入射されるものとする．

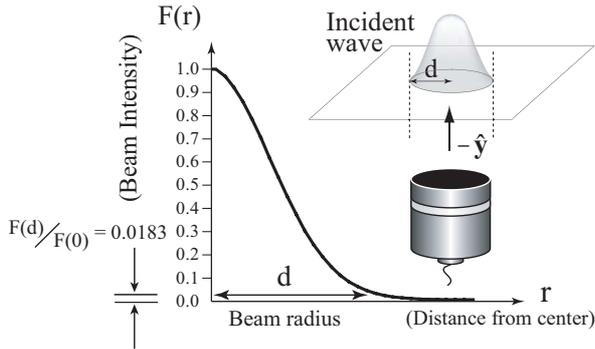


Fig.6 Gaussian incident beam profile

3.4 数値解析による欠陥再構成

ガウシアンビームを仮定した入射波を送信し、欠陥からの後方散乱波を用いて欠陥像の再構成を試みる。欠陥モデルは2.3節で3次元欠陥形状を再構成したものと同一である (Fig.2)。計測面および入射ビームの送信中心は Fig.7 のように設定した。入射ビーム半径 d として、キャビティの代表長さ a に比べてビーム半径が大きい場合 ($d = 2a$) と、小さいビーム半径を有する場合 ($d = 0.4a$) を想定して遠方縦波散乱振幅の解析を行った。ここで、超音波の送受信はそれぞれ O_1, O_2, O_3, O_4 と送信中心を変化させて、各々の送信中心を含む一側面上で $\Delta\phi = 10^\circ$ おきに欠陥を取り囲む全周方向 ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) から行った。また、探触子方向の散乱振幅 $A_m^L \hat{y}_m$ の解析は無次元化縦波数で表現して $0.1 \leq ak_L \leq 10.0$ の範囲で行った。

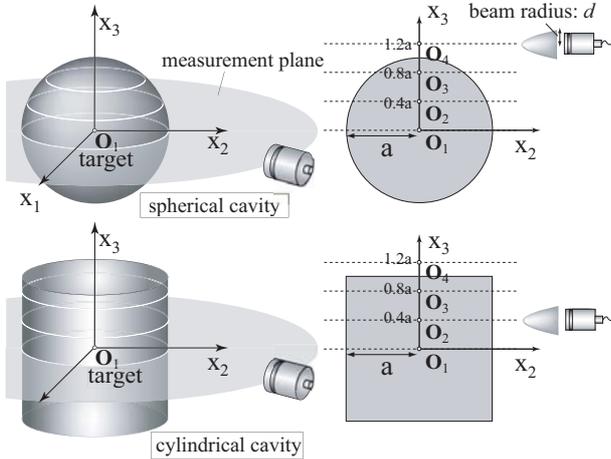


Fig.7 Ultrasonic transmitting configuration and target (O) of incident beam

(1) 球形キャビティの断面再構成

ビーム半径 $d = 2.0a$ の場合の球形キャビティの断面再構成結果を Fig.8 に示す。ここでは、 $\bar{\Gamma}(x)$ と $\bar{\gamma}(x)$ の最大値でそれぞれを正規化している。Fig.8(a) は送信中心を O_1 に設定し、球の大円を含む側面からの計測データを用いて再構成を行った結果であり、欠陥の断面形状・大きさを精度よく再構成できている。し

かし、送信中心を O_2, O_3 と x_3 軸の上方に移動していくと、各々の計測面における欠陥断面の寸法が正確には再構成できていないことがわかる (Fig.8(b),(c))。これは超音波の送受信断面をずらしても、ビーム半径が大きいことにより球の大円付近からの超音波の反射の影響を強く受け、大円付近の断面像が再構成されているためと考えられる。超音波の送受信面をさらに x_3 軸上方に移動して欠陥外部の送信中心 O_4 に向けて超音波を送信した場合の結果 (Fig.8(d)) では球の形状が現れてはいるものの、 $\bar{\Gamma}(x)$ と $\bar{\gamma}(x)$ の値は急激に小さくなっていることがわかる。以上の結果より、ビーム幅を広く送信した場合、断面毎の正確な寸法は再構成できないが、欠陥の大まかな大きさ (代表寸法) は推定可能であると言える。次に、ビーム半径を $d = 0.4a$ と小さくして超音波を送信した場合の再構成結果を Fig.9 に示す。ビーム半径を小さくしたことにより、各々の送信中心 O_1, O_2, O_3, O_4 を含む計測面の欠陥断面の形状と大きさがかなり精度よく再構成できていることがわかる。

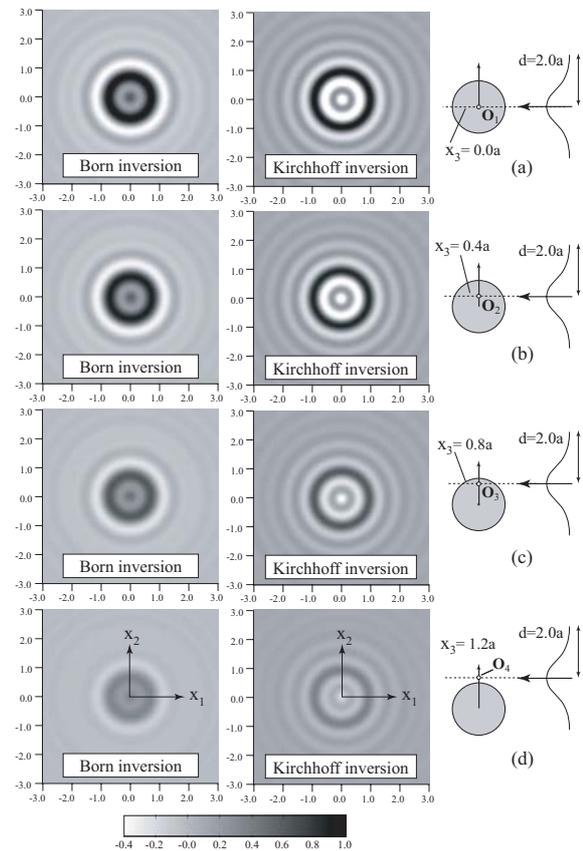


Fig.8 Cross-sectional reconstruction of spherical cavity (beam radius $d = 2.0a$)

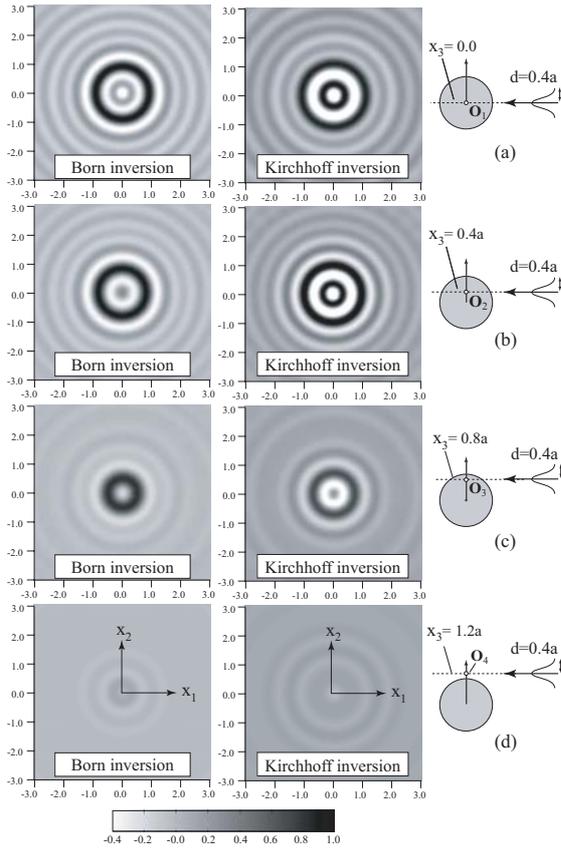


Fig.9 Cross-sectional reconstruction of spherical cavity (beam radius $d = 0.4a$)

(2) 円柱キャビティの断面再構成

ビーム半径 $d = 2.0a$ の場合の円柱キャビティの断面再構成結果を Fig.10 に示す. この図では各々の送信中心 O_1, O_2, O_3 の計測面の欠陥断面像は円柱キャビティの断面形状を再現している (Fig.10(a)–(c)). 欠陥外部の送信中心 O_4 に向けて超音波を送信した場合の結果 (Fig.10(d)) にも円柱の断面像が現れているが, これもビームの広がりによる円柱表面の反射の影響と考えられる. また, ビーム半径 $d = 0.4a$ の場合の円柱形キャビティの断面再構成結果を Fig.11 に示す. 送信中心を O_1, O_2, O_3 に設定した場合 (Fig.11(a)–(c)) は, 円柱キャビティの各断面が再構成されている. また, Fig.11(d) に示すように送信中心 O_4 が欠陥外部にある場合の再構成結果では, $\bar{\Gamma}(x)$ と $\bar{\gamma}(x)$ の値が急激に小さくなっていることがわかる.

3.5 ビーム半径の欠陥再構成への影響

Fig.8~11の断面再構成結果から, 欠陥寸法に対して十分大きなビーム半径を有する超音波が入射されている欠陥部分については, ポルン逆解析およびキルヒホフ逆解析によって欠陥の代表寸法および形状の再構成が可能であることが示された. また, 欠陥の断面形状の詳細を推定したい場合にはビーム半径の小さいビームを送る必要があることがわかった.

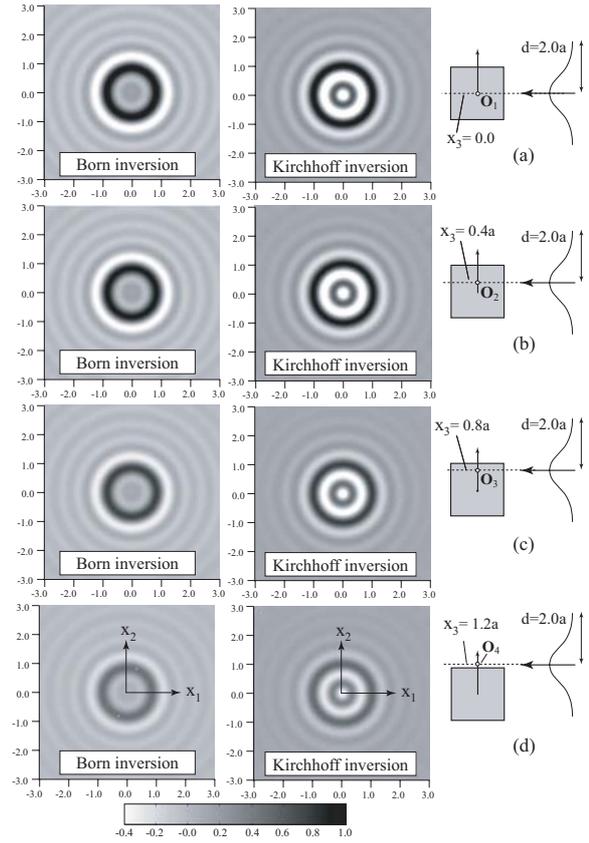


Fig.10 Cross-sectional reconstruction of cylindrical cavity (beam radius $d = 2.0a$)

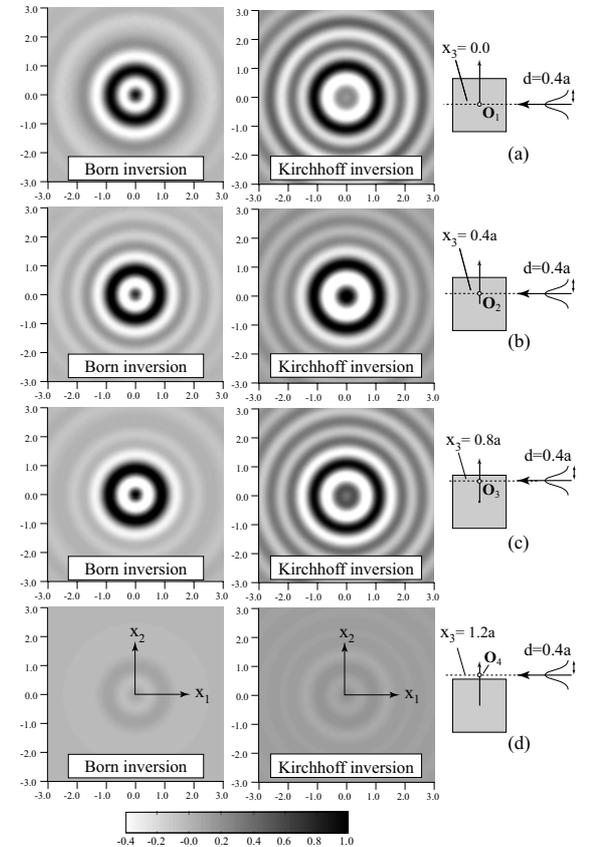


Fig.11 Cross-sectional reconstruction of cylindrical cavity (beam radius $d = 0.4a$)

Fig.9と 11に示すようにビーム半径が小さい場合、本来は欠陥領域を表すボルン逆解析の再構成結果が、欠陥境界を表すキルヒホフ逆解析の再構成結果に近い傾向になっていることがわかる。これは、ボルン断面再構成式 (9) が次式に示す 2 次元のキルヒホフ再構成式⁽¹⁰⁾ と、係数を除いて一致していることに関係があると考えられる。

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{A_m^L(k_L, \phi) \hat{y}_m}{u^0 k_L} \times e^{2ik_L(x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi)} \delta k_L dk_L d\phi \quad (14)$$

式 (9) に含まれる縦波散乱振幅 $A_m^L \hat{y}_m$ は 3 次元欠陥による散乱情報を含んでおり、式 (14) に含まれる 2 次元欠陥による散乱情報とは異なり、これらは定式化の上では単に係数倍の関係であっても基本的には欠陥の再構成結果が異なるものと考えられる。しかし、欠陥の大きさに対して入射ビーム半径を小さくすることは、入射面を局所的にみた場合に超音波ビームと欠陥形状の関係は相対的に 2 次元波動場に近づくことになる (Fig.12)。この結果、式 (9) に含まれる縦波散乱振幅 $A_m^L \hat{y}_m$ は 2 次元欠陥による散乱振幅に近い挙動を示し、3 次元のボルン逆解析結果 (Fig.9と 11) は欠陥領域内部よりも境界が際立って再構成されるようになっていると考えられる。

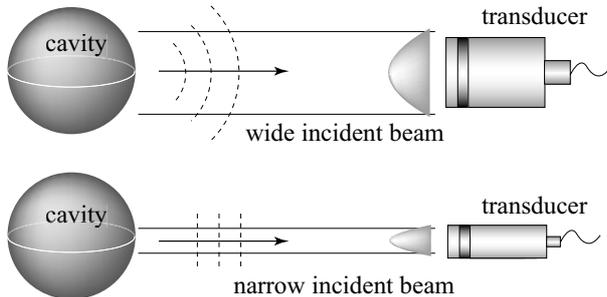


Fig.12 Three-dimensional scatterings by incident wide and narrow beams

4. まとめ

材料の一側面の計測から得られる散乱波を利用して欠陥の形状を再構成するために、3 次元線形化逆散乱解析式における散乱波の計測方向を一平面内に制限し、

境界要素法を用いた数値解析によって欠陥形状の再構成能について検討した。検討に必要な散乱波の解析において、探触子から送信される超音波ビームの広がりを考慮し、波動の進行方向に直交する断面内の振幅がガウス分布を有する入射波を送信した。欠陥寸法に対して十分大きなビーム半径を有する超音波を入射すれば、ボルン逆解析およびキルヒホフ逆解析共に、欠陥の代表寸法および形状の推定が可能であることを示した。逆にビーム半径の小さい超音波を送信すれば、送信面内の欠陥断面の形状が再構成できるとわかった。評価対象とする欠陥の大きさと形状決定の精度に応じて、超音波ビームの幅を調整することで、本解析手法をより効率的な欠陥評価に利用できる可能性がある。

参考文献

- (1) Rose, J.H. and Opsal, J.L.: Inversion of ultrasonic scattering data, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, **1**(1982), Plenum Press, pp.187–195.
- (2) Hsu, D.K., Rose, J.H. and Thompson, D.O.: Reconstruction of inclusions in solids using ultrasonic Born inversion, *J. Appl. Phys.*, **55**(1984), pp.162–168.
- (3) Rose, J.H.: Exterior reconstruction of a three dimensional scatterer, *Wave Motion*, **6**(1984), pp.149–154.
- (4) Sedov, A. and Schmerr, L.W.: The time domain elastodynamic Kirchhoff approximation for cracks: the inverse problem, *Wave Motion*, **8**(1986), pp.15–26.
- (5) Schmerr, L.W., Sedov, A. and Chiou, C.P.: A unified constrained inversion model for ultrasonic flaw sizing, *Res. Nondestr. Eval.*, **1**(1989), pp.77–97.
- (6) Kitahara, M., Nakahata, K. and Hirose, S.: Elastodynamic inversion for shape reconstruction and type classification of flaws, *Wave Motion*, **36**(2002), pp.443–455.
- (7) Karim, M.R. and Kundu, T.: Scattering of acoustic beams by cracked composites, *Journal of Engineering Mechanics*, **116**(1990), pp.1812–1827.
- (8) 小林昭一 (編): 波動解析と境界要素法, (2000), 京都大学学術出版会.
- (9) Kitahara, M. and Hirose, S.: Elastodynamic inversion of 3D cavity from backscattering data, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Elsevier, (1998), pp.163–170.
- (10) 中畑和之, 北原道弘: 計測波形による欠陥形状の再生と使用周波数帯域に関する考察, *応用力学論文集*, **3**(2000), pp.91–98.