境界要素法論文集 Vol.19 (2002 年 12 月), 論文 No.08_021030 JASCOME

# RUS 法による弾性定数同定に関する BEM シミュレーション

## BEM SIMULATION FOR IDENTIFICATION OF ELASTIC MODULI BY RESONANT ULTRASOUND SPECTROSCOPY

荒井 政大[1)], 隅田 尚寛[2)], 鈴木 春貴[3)]
Masahiro ARAI, Naohiro SUMITA, Haruki SUZUKI

1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380–8553 長野市若里 4–17–1, E-mail : arai@mech.shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学大学院工学系研究科，院生 (〒380–8553 長野市若里 4–17–1, E-mail : hiro@str1.shinshu-u.ac.jp)
3) 信州大学大学院工学系研究科，院生 (〒380–8553 長野市若里 4–17–1, E-mail : haruki@str1.shinshu-u.ac.jp)

Resonant ultrasound spectroscopy (RUS) is widely used to evaluate the characteristics of small solid specimens of single crystals or anisotropic materials. The elastic moduli of the solid body can be determined by measurement of the natural frequencies exited by a pair of piezo-electronic transducer. In this paper, a numerical technique for the determination of the elastic constants in RUS testing is discussed. An alternative evaluation function for the search algorithm of the elastic moduli is suggested, and boundary element analysis is applied to calculate the eigenvalue of the 3 dimensional vibration of the isotropic and anisotropic solid body. Some numerical simulations for steel block are conducted to demonstrate the effectiveness of the present method.

*Key Words*: Resonant Ultrasound Spectroscopy, Resonant Frequency, Elastic Moduli, Inverse Problem, Boundary Element Method, Non-destructive Testing

## 1. 緒 論

弾性定数は外力を受ける場合の材料の挙動や変形を知る上で最も基本的かつ重要なパラメータの一つである．通常，固体材料の弾性定数は JIS 規格や ASTM 等の標準規格に倣って試験片を作成し，材料試験機を用いて測定を行う方法が一般的である．他方，近年は超音波[(1)]や X 線[(2)]などを用いた弾性定数の測定法も広く試みられるようになり，従前は測定の困難であった微小な領域の弾性定数や，結晶材料など小さな試験片の弾性定数も測定できるようになった．

超音波スペクトロスコピー法 (Resonant Ultrasound Spectroscopy : RUS)[(3)(4)(5)]は，超音波を用いる材料試験法の一種であり，圧電ピックアップを用いて固体試料を振動させ，その共振周波数から材料の弾性定数を逆解析的に求める一連の手法である．この手法は測定装置および測定回路が比較的単純であり，超伝導材料に代表される小さな固体試料の測定が容易で，かつ異方性材料への適用も可能であるなど，種々の利点を有する．

しかしながら，弾性定数と共振周波数の関係が非線形であることから，逆解析に際しては極めて高い精度の数値解法が要求される．また本質的な問題として，実験により得られた共振周波数が何次の振動モードに対応するのかを正確に見積もらなければ，正しい同定結果が得られない．この問題に対し Ogi ら[(6)(7)]のグループは試料の加振に電磁力を用いることで試料の共振モードをコントロールし，SiC/Ti 複合材料の弾性定数を同定することに成功しているが，磁性体のみでなく，様々な材料における弾性定数を簡便かつ高精度に同定するためには，今だ改良の余地が残されている状況である．

そこで本研究では，RUS による固体材料の弾性定数の同定に対し，その高精度化を目的として，弾性定数の探索に関する数値解析法に関し，一連の提案を行った．固体材料の共振周波数解析には，有限要素法等に比較して精度的優位性が確認されている境界要素法を採用した．また，共振周波数の同定アルゴリズムに関し，係数マトリクスの行列式を評価関数とする新たな探索法の提案を行った．等方性材料ならびに異方性材料を対象とした数値シミュレーションによる基礎的検討を実施し，同定手法の有効性について詳細に検討した．

## 2. 境界要素法による定常振動解析

一般に RUS における共振周波数の計算には，定式化が単純なことから Ritz 法が用いられることが多い．しかしながら Ritz 法では複雑な試料形状への対応が難しいことから，近年は有限要素法の適用も試みられつつある．それに対し本研究では，さらなる解析精度の向上を図ることとし，境界要素法を適用することとした．以下に 3 次元弾性体の固有値問題に対する境界要素法の定式化[(8)(9)(10)]について概略を述べる．

均質な線形弾性体におけるつり合い方程式の一般形は次式で与えられる．

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

ここで，$\sigma_{ij}$ は連続体の任意の点における応力成分，$\rho$ は単位体積あたりの質量，$u_i$ は変位ベクトルであり，′ ¨ ′ は時間に関する 2 階微分を表す．また，添字の繰り返しについては総和規約に従うものとする．

本論文では，固有値問題の取り扱いの容易な領域−境界積分法による境界要素法の定式化を採用する．この手法では，支

配方程式の重み関数として静的な問題に対する基本解を用いるため，慣性力項を領域積分により評価しなければならない．しかしながら，係数マトリクスが振動数に依存しない形となることから，振動数が異なる場合にも係数マトリクスの再計算が不要であり，また既存の固有値解析用のサブプログラムの適用が容易となるなどの利点を有している．なお，等方性体の基本解には，通常の静弾性問題の Kelvin 解を用いた．異方性体に対する基本解の計算は，既報(10)を参照されたい．

物体の占める領域 $\Omega$ 内の点 p において，静的な単位集中荷重 $f_i$ が作用する場合の点 Q における $j$ 方向変位の解を $U_{ij}(\mathrm{p},\mathrm{Q})$ とする．$U_{ij}$ を式 (1) の両辺に乗じ，Gauss の発散定理を適用して変形すると，次式に帰着する．

$$u_i(\mathrm{p}) + \int_\Gamma \{T_{ij}(\mathrm{p},\mathrm{Q})u_j(\mathrm{Q}) - U_{ij}(\mathrm{p},\mathrm{Q})t_j(\mathrm{Q})\}\,d\Gamma = \rho\int_\Omega U_{ij}(\mathrm{p},\mathrm{q})\ddot{u}_j(\mathrm{q})d\Omega \tag{2}$$

ただし，$\Gamma$ は有限領域 $\Omega$ の境界を表し，$t_j$ は変位 $u_j$ に対応する表面力，$T_{ij}$ は $U_{ij}$ を表面力の定義に従って微分することにより得られる積分核である．

さて，以下の議論では，すべて定常振動問題を扱うものとし，変位 $u_j$ を次式のようにおく．

$$u_j = \bar{u}_j e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{3}$$

ここで, i は虚数単位, $\omega$ は角周波数, $t$ は時間である．式 (3) を積分方程式 (2) に代入し，境界 $\Gamma$ 上にて $t_j = 0$ なる境界条件を与えれば次式を得る．

$$\bar{u}_i(\mathrm{p}) + \int_\Gamma T_{ij}(\mathrm{p},\mathrm{Q})\bar{u}_j(\mathrm{Q})d\Gamma = -\rho\omega^2\int_\Omega U_{ij}(\mathrm{p},\mathrm{q})\bar{u}_j(\mathrm{q})d\Omega \tag{4}$$

さらに領域 $\Omega$ 内の点 $p$ を境界 $\Gamma$ 上の点 $P$ へと移行する極限操作を行うと以下の境界積分方程式に帰着する．

$$K_{ij}(\mathrm{P})\bar{u}_i(\mathrm{P}) + \int_\Gamma T_{ij}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\bar{u}_j(\mathrm{Q})d\Gamma = -\rho\omega^2\int_\Omega U_{ij}(P,q)\bar{u}_j(q)d\Omega \tag{5}$$

ただし $K_{ij}$ は境界の性状により決まる位置定数であり，通常は剛体変位条件により自動的に決定される．

式 (4) および式 (5) を適当な要素を用いて離散化すると, 以下のようなマトリクス方程式に帰着する．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & 0 \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^\Gamma \\ u^\Omega \end{bmatrix} = \rho\omega^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^\Gamma \\ u^\Omega \end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで $u^\Gamma$ は境界上の変位を，$u^\Omega$ は領域内部の変位を表す．最終的に式 (6) は以下のような一般固有値問題の形に帰着できるから，固有値 $\lambda$ を求めることによって共振周波数が算出できることがわかる．

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{Bx}, \quad (\lambda = \rho\omega^2) \tag{7}$$

## 3. 弾性定数の探索法

一般に RUS 法による弾性定数の同定では，予め初期値を仮定して弾性定数を変化させ，前節で述べた共振周波数に関する繰り返し計算を実行する．実験により得られた共振周波数 $\bar{\omega}_i$ に対して次式で定義される評価関数 $\bar{\Phi}$ の最小値を与える弾性定数が，求める解として判定される．

$$\bar{\Phi} = \sum_{i=1}^{N}(\bar{\omega}_i - \omega_i)^2 \tag{8}$$

ただし，上式中の $N$ は問題に応じて設定される共振次数の上限である．

上式の評価関数を用いる一般的な同定法では，実験により計測された共振周波数が何次のモードに対応するかを予め知らねばならない．さもなければ，本来の解とは全く異なる逆解析結果が同定されるからである．しかしながら一般には，実験より測定される共振周波数は極めて値が接近している場合も数多くあり，重根の存在もモードの特定を困難にする．そこで本研究ではこれらの難点を克服するため，新たに係数マトリクスの行列式を用いた探索法を提案し，モードの決定に伴う難点を回避する．

実験より得られた共振周波数 $\bar{\omega}_i$ を式 (7) に代入し，左辺と右辺の差を求めると，以下のようになる．

$$\chi_i = (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A} - \rho\bar{\omega}_i^2\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} \tag{9}$$

ここで $\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{A} - \rho\bar{\omega}_i^2\boldsymbol{B}$ とおけば，次式となる．

$$\chi_i = \boldsymbol{D}_i\boldsymbol{x} \tag{10}$$

もし仮定された弾性定数が正解に一致すれば，上式の係数マトリクス $\boldsymbol{D}_i$ の行列式は 0 となるはずである．そこで，$\boldsymbol{D}_i$ の行列式を，測定された振動数 $\bar{\omega}_i (i = 1, \ldots, N)$ に関して行列式の二乗和をとり，以下のような評価関数を新たに定義する．

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} W_i \det(\boldsymbol{D}_i)^2 \tag{11}$$

ここで，重み係数 $W_i$ を導入した．重み係数は，評価関数の計算が特定の周波数にのみ強く依存することを避けるために必要であり，次式に示されるように，探索範囲における各モードの行列式の変化幅により計算する．

$$W_i = \frac{1}{\{\det(\boldsymbol{D}_i)_{max} - \det(\boldsymbol{D}_i)_{min}\}^2} \tag{12}$$

実際の計算では，特定の範囲において弾性定数を変化させて式 (11) の評価関数の値を計算し，評価関数が最も小さい値を示す場合の弾性定数が同定結果として判定される．ただし，一般に弾性定数に対する解空間は多峰性を示す傾向にあり，共役勾配法などを用いると，正解と異なる局所解に陥り易い．そこで本論文では以下に示す 2 段階の探索法を適用した．

(1) 比較的広い探索範囲において粗い探索ステップによる全探索を行い，1 次探索解を決定する．なお，ここで求められる解空間より，2 次探索における重み係数の決定を行う．

Table 1 Specification of mild steel

| | | |
|---|---|---|
| Young's Modulus | $E = 199.6$ | [GPa] |
| Density | $\rho = 7.898 \times 10^3$ | [kg/m$^3$] |
| Poisson's Ratio | $\nu = 0.290$ | |
| Dimension | $h$=13.95 | [mm] |
| | $w$=10.005 | [mm] |
| | $d$=4.994 | [mm] |

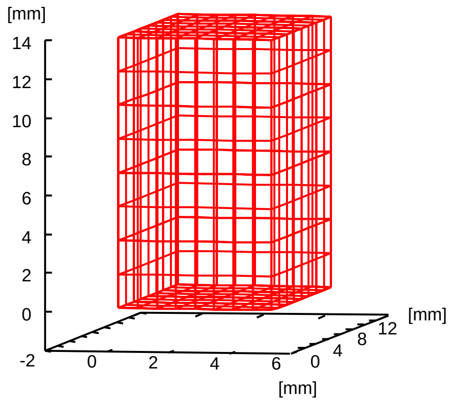


Fig.1 Analyzed Model : Mild Steel

Table 2 Resonance Frequency of Steel Block

| Mode | [kHz] | Mode | [kHz] |
|---|---|---|---|
| 1 | 80.846 | 11 | 223.08 |
| 2 | 99.103 | 12 | 238.29 |
| 3 | 136.10 | 13 | 259.75 |
| 4 | 161.13 | 14 | 260.88 |
| 5 | 167.76 | 15 | 267.80 |
| 6 | 169.82 | 16 | 268.77 |
| 7 | 174.37 | 17 | 277.70 |
| 8 | 187.82 | 18 | 281.21 |
| 9 | 212.85 | 19 | 295.52 |
| 10 | 220.04 | 20 | 300.76 |

(2) 1 次探索解近傍において，より細かい探索ステップを用いた 2 次探索を実施する．

なお，等方性材料については，2 次探索に対して 1 次探索解を初期値とした逐次探索法を適用した．逐次探索法は，初期値より出発して近傍の解と評価関数の比較を行い，近傍に評価関数の小さな点があれば初期値を更新して逐次的に探索を進める手法である．最終的に着目点の近傍において，評価関数がより小さくなる点が存在しなければ，探索計算は終了となる．ただし，異方性材料については，逐次探索法を適用すると局所解に陥る現象がしばしば現れたため，1 次探索解近傍をさらに細かな増分値の下に全探索する方法を用いた．

## 4. 基礎的な精度検討 (等方性材料)

本節では，弾性定数の同定手法に関する基礎的な検討を行うため，等方性試料 (軟鋼) に関する数値シミュレーションの結果について示す．解析モデルは図 1 に示される直方体形状の軟鋼とし，弾性定数，密度，試料形状を表 1 に示す．境界要素解析に際しては，外部境界を 96 個の 8 節点 2 次適合要素により分割し，慣性力項に関する体積積分に対しては 64 個の 20 節点直方体要素を用いた．

Table 3 Search range and increment in the first search

| Search Range [GPa] | Increment [GPa] |
|---|---|
| $190.0 \leq E \leq 210.0$ | $\Delta E = 2.0$ |
| $0.27 \leq \nu \leq 0.31$ | $\Delta\ \nu = 0.004$ |

Table 4 Search increment in the second search

| Increment |
|---|
| $\Delta E = 0.1$[GPa] $\quad \Delta\ \nu = 0.001$ |

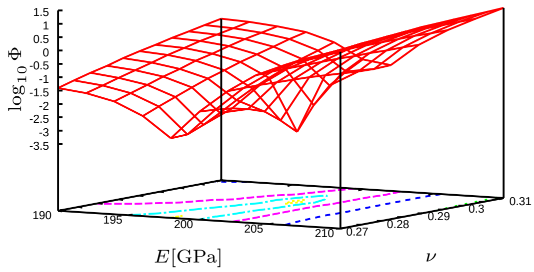


Fig.2 Solution space estimated by Eq.(8) (Conventional method, Example 1)

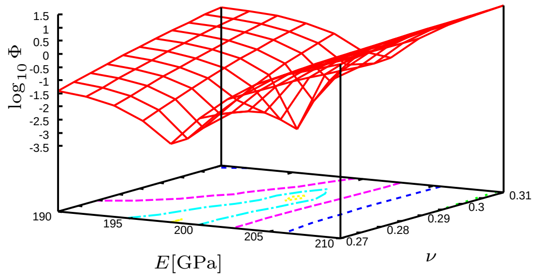


Fig.3 Solution space estimated by Eq.(11) (Present method, Example 1)

Table 5 Identified elastic moduli (Example 1)

| | First Search | | Second Search | |
|---|---|---|---|---|
| | $E$ [GPa] | $\nu$ | $E$ [GPa] | $\nu$ |
| Conventional | 200 | 0.294 | 199.6 | 0.29 |
| Present | 200 | 0.294 | 199.6 | 0.29 |

**4•1 新しい評価関数の精度検討 (Example 1)** まず，本論文で提案する行列式を用いた探索アルゴリズムの有効性について示すために，式 (8) の評価関数を用いた従来の手法との比較結果について示す．まず，境界要素法により求められた 20 次までの共振周波数を表 2 に示す．この値を仮想的な実験値とみなして，弾性定数の同定に関する逆解析を試みた結果を以下に示す．1 次の全探索におけるヤング率とポアソン比の探索範囲および変化幅を表 3 に，2 次の逐次探索における探索増分を表 4 に示す．

図 2 は，式 (8) を評価関数として用いた場合の解空間である．他方，図 3 は，本論文で提案する評価関数 (11) により計算された解空間である．若干の差異は認められるものの，両者はほぼ同様の形状を呈していることが確かめられる．

図 2, 図 3 における極小値である 1 次探索解，および引き続いて 2 次探索を行って得られた弾性定数の同定結果を表 5 に

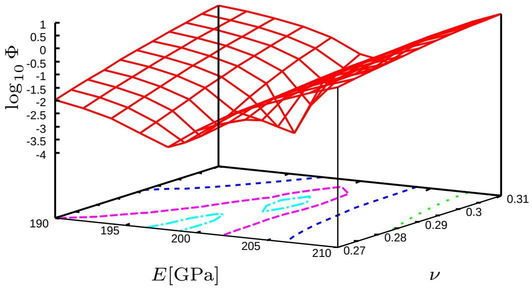

Fig.4　Solution space in the sum to the 5th order (Example 2)

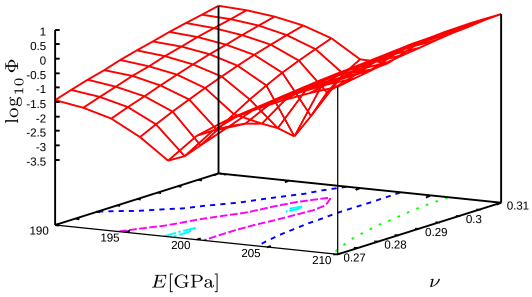

Fig.5　Solution space in the sum to the 10th order (Example 2)

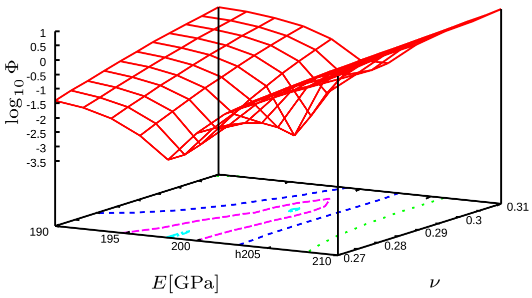

Fig.6　Solution space in the sum to the 15th order (Example 2)

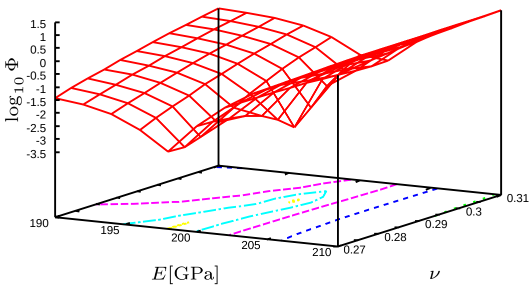

Fig.7　Solution space in the sum to the 20th order (Example 2)

示す．二つの探索手法において結果の差異は認められないことから，本研究で提案した行列式を用いる探索手法の有効性が確かめられる．

**4•2　必要な共振周波数の個数 (Example 2)**　次に，同様のモデルを用いて，逆解析を実施する際に必要とされる共振周波数の個数についての検討を行う．探索に用いる共振周波数の上限次数を 5 次, 10 次, 15 次, 20 次と変化させた場合の 1 次探索結果を図 4 から図 7 にそれぞれ示す．

これらの解空間を比較すると，軽微な差は認められるものの，すべての結果において正解の近傍に極値が存在していることが確かめられる．なお，これら 4 つの 1 次探索結果において，評価関数の極小値を与える弾性定数は $E = 200$[GPa], $\nu = 0.294$ とすべて同一であった．

これらの 1 次探索解より 2 次探索を行った結果を表 6 に示す．5 次の結果以外は若干ではあるが誤差が認められるが，その大きさは高々0.05%以内である．

解析モデルのアスペクト比等により，探索計算に用いる共振次数の最適値は異なると考えられるが，本節の結果によれば概ね 5 次程度までの共振周波数を用いれば，必要十分な精度で弾性定数を同定することが可能であると言える．

Table 6　Identified elastic moduli (Example 2)

| | Young's Modulus | Poisson's Ratio | Number of Iteration |
|---|---|---|---|
| 5th order | 199.6 | 0.29 | 5 |
| 10th order | 199.5 | 0.29 | 6 |
| 15th order | 199.5 | 0.29 | 6 |
| 20th order | 199.5 | 0.29 | 6 |

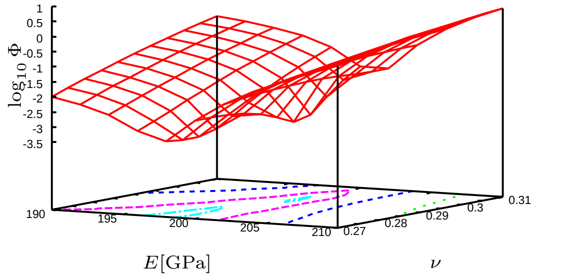

Fig.8　Solution space with 3 effective digits of input data (Example 3)

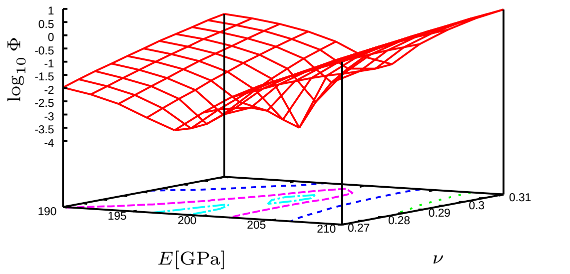

Fig.9　Solution space with 4 effective digits of input data (Example 3)

**4•3　入力データに含まれるの誤差の影響 (Example 3)**
実際の RUS 試験を考慮すれば，測定された共振周波数には少なからず誤差が混入する．そこで表 2 に示される共振周波数の有効数字を 4 桁および 3 桁に切り詰めることにより人工的な誤差を与えた上で，等方性体の軟鋼を対象とした数値実験を行った．なお 4.2 節の結果に従い，評価関数の計算には 1 次から 5 次までの共振周波数を用いた．

有効数字 3 桁の場合の 1 次探索を図 8 に，4 桁の場合の結果を図 9 に示す．グラフに示されているように，有効数字 3 桁の場合においては正解周辺の解空間の落ち込みが小さいことがわかる．

これらグラフの極小値である 1 次探索解，および引き続いて 2 次探索を行った結果を表 7 に示す．表に示されるように，

Table 7 Identified elastic moduli (Example 3)

| Effective digits | First Search $E$ [GPa] | First Search $\nu$ | Second Search $E$ [GPa] | Second Search $\nu$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 198 | 0.278 | 199.3 | 0.29 |
| 4 | 200 | 0.294 | 199.6 | 0.29 |

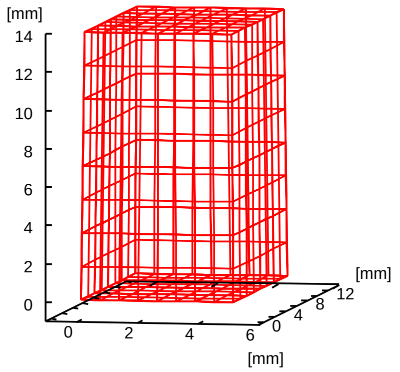


Fig.10 Analyzed model with coordinates inclination

実験で得られる共振周波数の有効桁数が 3 桁であっても弾性定数の同定は可能であるといえるが，やや精度的な落ち込みが大きくなる．高精度な同定を行うことを考えれば，共振周波数の測定精度は 4 桁以上必要となるものと考えられる．

**4•4 形状精度の影響 (Example 4)** RUS に用いられる試料は，ダイヤモンドカッター等により直方体形状に切り出されるが，平滑面が得られていなかったり，直角に切り出されていないなど，形状精度が保たれない場合がある．解析に用いるモデルでは，多くの場合これらの形状精度を無視して離散化がなされるから，形状に誤差がある場合の弾性定数の同定精度に関して議論することは重要である．

そこで，試料の形状精度の影響を明らかにするため，以下のような 2 通りの場合について数値実験を行った．

Case A 試料形状の各座標に乱数をもちいて発生させた誤差を付与した場合

Case B 対向する面の平行度が保たれていない場合

まず，上記 Case A については，各節点座標に偏差 $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5\%$ の 3 通りの正規乱数誤差を与えることとした．なお，座標の誤差は直方体の各辺の長さに正規乱数を乗じることにより求めている．数値実験においては，仮想的な実験値となる共振周波数を得る課程において，座標に誤差が付与されたモデルを用い，逆解析においてはこれら座標の誤差を無視することで実験を模擬した．

Case B については，図 10 に示されるように，高さ方向の 4 面を座標軸に対して傾かせることによって，直方体における対向 2 面の平行度が保たれない状況を模擬した．傾き角 $\theta$ は $1.0°, 0.5°, 0.1°, 0.05°$ の 4 通りとした．解析の諸条件はすべて前節までの解析と同様とし，ここでは 2 次探索を行った最終的な弾性定数の同定結果のみを示す．

表 8 は座標に誤差を与えた場合 (Case A) の結果である．解析 (A) の場合についてみると，偏差 $\sigma = 0.5\%$ でのヤング率の同定誤差は 0.15%，ポアソン比の誤差は 1.7%程度である．弾性定数の誤差はそれほど大きくはないが，誤差が大きくなる

Table 8 Identified elastic moduli (Example 4, Case A)

| $\sigma$ | $E$ [GPa] | $\nu$ |
|---|---|---|
| 0.1 % | 199.5 | 0.291 |
| 0.3 % | 199.5 | 0.294 |
| 0.5 % | 199.3 | 0.295 |

Table 9 Identified elastic moduli (Example 4, Case B)

| $\theta$ | $E$ [GPa] | $\nu$ |
|---|---|---|
| 1.0 ° | – | – |
| 0.5 ° | 197.2 | 0.272 |
| 0.1 ° | 199.1 | 0.286 |
| 0.05 ° | 199.6 | 0.290 |

に従い，ポアソン比の同定精度は大きく低下する傾向にある．

他方，表 9 に示される Case B の解析結果についてみると，傾き角 $\theta = 1.0°$ の条件では，探索範囲において解が収束せず，弾性定数の同定が不可能であった．$\theta = 0.5°$ における弾性定数の同定誤差は 1.2%，ポアソン比の誤差は 6.2%であった．また $\theta = 0.1°$ における弾性定数の同定誤差は 0.25%，ポアソン比の誤差は 1.3%であった．以上の結果より，ヤング率およびポアソン比ともに誤差 1%以内程度の同定精度を確保するためには，平行面の相対傾き角 $\theta$ を少なくとも 0.1%以内に抑えることが必要であると考えられる．

## 5. 異方性材料に関する精度検討

異方性材料に対する基礎的な検討として，Si 単結晶に関する数値シミュレーションを実施した．Si 単結晶の弾性定数，密度および解析モデル等の諸元を表 10 に示す．Si 単結晶は立方晶であるから，独立な弾性定数は，$C_{11}$, $C_{12}$, $C_{44}$ の 3 つである．境界要素解析に際し，図 11 に示されるように解析モデルの境界を 96 個の 8 節点 2 次適合要素により分割した．また慣性力項に関する体積積分を評価するため，全領域を 64 個の 20 節点直方体要素により分割を行った．

弾性定数の同定に先立ち，表 10 に示される弾性定数を用いて共振周波数解析を実施し，共振周波数を算出した．その後，得られた共振周波数を仮想的な実験値とみなして，弾性定数に関する探索計算を実施した．なお，計算には 1 次から 5 次までの 5 つの共振周波数の値を用いている．なお，探索法については，表 11 に示されるように大まかな範囲において第一段階の探索を行って評価関数が最小となる点を求め，さらにその点の近傍を細かく探索する 2 段階の探索を適用した．

図 12，図 13，および図 14 に，1 次探索により得られた解空間を示す．なお，Si 単結晶の探索においては，同定すべき弾性定数が 3 個のため，グラフにおいては各々$C_{11}$, $C_{12}$, $C_{44}$ を固定した場合について示してある．$C_{11}$ および $C_{12}$ を固定した図 12, 図 13 については，正解近傍で極値を示す解空間が得られているが，$C_{44}$ を固定した図 14 の場合については，谷状の解空間が形成されていることがわかる．

1 次探索において得られた最適解の近傍にて，2 次探索を実施した．1 次探索解および最終的に 2 次探索により同定された弾性定数の結果を表 12 に示す．3 つの弾性定数ともに正解

Table 10　Specification of 'Si' Single Crystal

| | | |
|---|---|---|
| Elastic Moduli | $c_{11}$=165.7 | [GPa] |
| | $c_{12}$=63.9 | [GPa] |
| | $c_{44}$=79.6 | [GPa] |
| Density | 2.34 $\times 10^3$ | [kg/m$^3$] |
| Dimension | $h$=5.0 | [mm] |
| | $w$=7.0 | [mm] |
| | $d$=10.0 | [mm] |

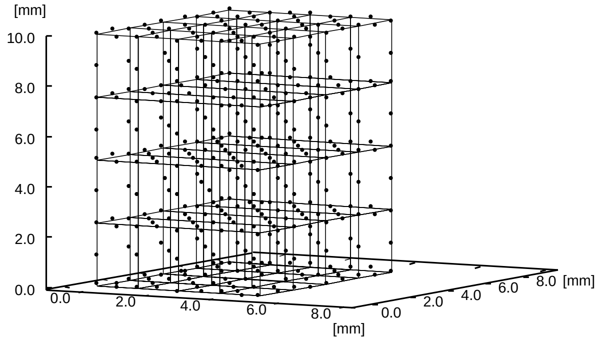


Fig.11　Analyzed model : 'Si' Single Crystal

Table 11　Scheme of Two Step Search

| | Search Range [GPa] | Increment [GPa] |
|---|---|---|
| 1st Search | $c_{11}$=160.0〜170.0 | $\Delta c_{11}$=1.0 |
| | $c_{12}$= 60.0 〜 70.0 | $\Delta c_{12}$=1.0 |
| | $c_{44}$= 75.0 〜 85.0 | $\Delta c_{44}$=1.0 |
| 2nd Search | $c_{11}$=162.0〜166.0 | $\Delta c_{11}$=0.4 |
| | $c_{12}$= 61.0 〜 65.0 | $\Delta c_{12}$=0.4 |
| | $c_{44}$= 79.0 〜 81.0 | $\Delta c_{44}$=0.2 |

値にほぼ一致した値が同定されていることが確かめられる.

## 6. 結　　論

本論文では，共鳴超音波スペクトロスコピー法 (RUS) における弾性定数の同定法に関して，新たな探索アルゴリズムを導入した一連の解析手法を提案し，数値実験により種々の考察を行った．本論文で導入された行列式による評価関数を用いれば，共振周波数の次数を既定せずとも弾性定数の探索が可能となることを明らかにし，等方性の軟鋼および異方性体である Si 単結晶に関する数値シミュレーションを実施して，本手法の有効性を確認した．また，共振周波数の測定誤差や試料の形状測定の誤差が弾性定数の同定精度に与える影響について数値実験を行い，同定解析における指針を示した．

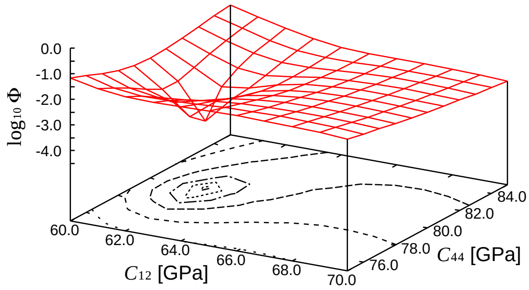


Fig.12　Solution space in the first search of Si single crystal with $C_{11}$=164.0[GPa]

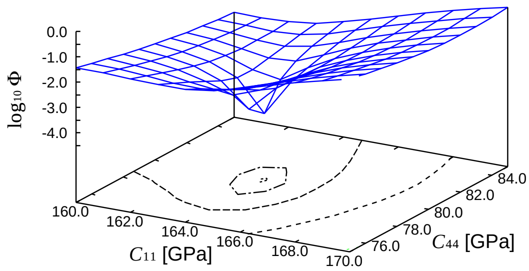


Fig.13　Solution space in the first search of Si single crystal with $C_{12}$=62.0[GPa]

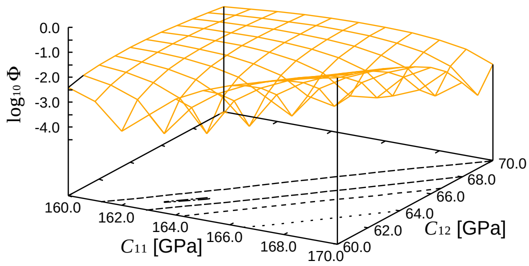


Fig.14　Solution space in the first search of Si single crystal with $C_{44}$=80.0[GPa]

Table 12　Identified elastic moduli of Si sigle crystal

| | $C_{11}$[GPa] | $C_{12}$[GPa] | $C_{44}$[GPa] |
|---|---|---|---|
| 1st Search | 164.0 | 62.0 | 80.0 |
| 2nd Search | 165.6 | 63.8 | 79.6 |
| Exact | 165.7 | 63.9 | 79.6 |

## 参 考 文 献


(1) Ohno, I., Free Vibration of a Rectangular Parallelepiped Crystal and Its Application to Determination of Elastic Constants of Orthorhombic Crystals, J. Phys. Earth, **24**, (1976), 355–379.

(2) 田中啓介・松井英治・栗村隆之・秋庭義明, 焼結アルミナの X 線的弾性定数, 材料, **36**–407, (1987), 792–798.

(3) Heyliger, P. and Ledbetter, H., Detection of Surface and Subsurface Flaws in Homogeneous and Composite Solids by Resonant Ultrasound, J. Nondestructive Evaluation, **17**–2, (1998), 79–87.

(4) Migliori, A., Sarrao, J. L., Visscher, W. M., Bell, T. M., Lei, M., Fisk, Z. and Leisure, R. G., Resonant Ultrasound Spectroscopy Techniques for Measurement of the Elastic Moduli of Solids, Physica B, **183**, (1993), 1–24.

(5) Inohara, M. and Suzuki, T., Measurement of Elastic Moduli by Rectangular Parallelepiped Resonance Method II, Jpn. J. Appl. Phys., **32**, (1993), 2238–2242.

(6) Ogi, H., Dunn, M. L., Takashima, K. and Ledbetter H., Eastic properties of unidirectional $SiC_f$/Ti composite : Acousitic-resonance measurements and micromechanics predictions, *J. Appl. Phys.*,, **87**–6, (2000), 2769–2774.

(7) 下地剛・荻博次・高島和希・平尾雅彦, 高温における $SiC_f$/Ti クロスプライ複合材料の弾性テンソルの測定, 日本金属学会誌, **64**–7, (2000), 495–501.

(8) 神谷紀生・安藤英司, 境界要素法による固有値解析 (1), 機械の研究, **44**–7, (1992), 40–44.

(9) 神谷紀生・安藤英司, 境界要素法による固有値解析 (2), 機械の研究, **44**–7, (1992), 45–50.

(10) 荒井政大・上村元祥・足立忠晴・山路昭彦, 共鳴超音波スペクトロスコピー法への境界要素法の適用, 境界要素法論文集, **17**, 29–32.