

境界要素法における計算点解析法の非定常熱伝導問題への適用 第 2 報: 不均質媒体への応用

APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO UNSTEADY THERMAL CONDUCTION PROBLEMS Second Report: Application to Inhomogeneous Materials

神谷紀生¹⁾, 橋爪智弘²⁾, 箕浦昌之³⁾

N. Kamiya, T. Hashizume and M. Minoura

¹⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)

²⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:hashi@info.human.nagoya-u.ac.jp)

³⁾名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:minoura@info.human.nagoya-u.ac.jp)

Computing Point Analysis (CPA) scheme in the Boundary Element Method, proposed earlier by one of the present authors, is applied to an unsteady thermal conduction problem in inhomogeneous medium. Derivative with respect to time in the thermal diffusion equation is approximated by finite difference of the Euler-type in small time interval. Then, the above-mentioned governing differential equation can be thought as an inhomogeneous equation governed by the Laplace differential operator as a principal differential operator. The inhomogeneous term contains derivatives of the unknown function which is approximated by an additional polynomial with respect to the space coordinates. The computing point method can solve the derived equation by boundary discretization alone. Some example computations are shown for verifying the proposed scheme.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Unsteady Thermal Conduction, Inhomogeneous Medium

1. はじめに

著者らは, 非線形あるいは非同次問題を境界だけの離散化によって解析する境界要素法の「計算点解析法(Computing Point Method)」⁽³⁾⁻⁽⁶⁾と名づける方法を提案した。この方法は, 従来このための方法として知られていた「二重相反法(DRM)」⁽¹⁾あるいは「多重相反法(MRM)」⁽²⁾とは違ったもので, 構成される方程式が特異になりにくい特徴をもっている。前報⁽¹⁾では, 計算点解析法を時間とともに変化する非定常問題の解析に応用した。時間に関する導関数を差分近似すれば, 支配微分方程式は未知関数を非同次項に含む形式になるので, これを利用して計算点解析法が適用できる。この方法は, DRMですでに用いられているものと基本的には同じである^(1,10)。均質な材料における計算例を示し, 精度の高い結果を得た。このほか, 文献⁽⁷⁻⁹⁾にも同様な報告がある。

本研究では, 不均質材料における同様の問題を考える。不均質材料における非定常熱伝導問題では, 支配微分方程式に未知関数の空間座標に関する導関数が現れる。したがって, 時間導関数を差分近似したとき, 基本となる微分作用素以外を非同次項とみなせば, そこに未知関数だけでなくその空間座標導関数が含まれ

ることになる。計算点解析法は, このような問題に対しても, 境界要素分割といくつかの計算点によって問題の解を得ることが可能であるので, その特性をここで考える問題に適用するものである。

傾斜機能材料に見られるように, 材料パラメーターが場所によって変化する場合, さらには材料パラメーターが温度とともに変化する効果を考えた場合を, ここで例題とともに考えることにする。

2. 不均質媒体における非定常熱伝導

不均質媒体における非定常熱伝導問題の支配微分方程式は次のように与えられる:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla u) + Q \quad (1)$$

ここで, u は温度, t は時間であり, ρ, c, λ はそれぞれ密度, 比熱, 熱伝導率を表す。また Q は単位時間あたりの熱発生であ

る．式(1)を変形すれば，次のようになる：

$$\nabla^2 u + \frac{\nabla \lambda \nabla u}{\lambda} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{Q}{\lambda} = 0 \quad (2)$$

上式の時間に関する導関数をつぎのように差分近似する：

$$\left(\frac{u}{t} \right)_t = \frac{u(x, y, t) - u(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (3)$$

Δt は時間増分であり，以下では 時刻 t における u の値を u^{n+1} ，時刻 $t - \Delta t$ における u を u^n のように表すものとする．2 次元問題に限定し，式(2)を具体的に表せば次のようになる：

熱伝導率が座標 (x, y) の関数 $\lambda = \lambda(x, y)$ である場合：

$$\begin{aligned} \nabla^2 u^{n+1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} \\ - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{Q}{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

熱伝導率が温度の関数 $\lambda = \lambda(u)$ である場合：

$$\begin{aligned} \nabla^2 u^{n+1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \nabla u^{n+1} \nabla u^{n+1} \\ - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{Q}{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

なお，この場合，比熱 c の温度依存性もこの式で考慮することができる．

式(4)あるいは(5)で与えられる問題を，境界だけの離散化によって解く方法は，通常用いられる DRM によるもののほか計算点解析法がある．主要微分作用素を調和作用素とし，それ以外の項を非同次項とみなす．非同次項を空間座標に関する有限項の完全多項式で表し，さらに未知関数 u を同様に多項式表示する．これらの多項式の未知係数は最小 2 乗法で決定される．ただし，式(4)は未知関数の係数が座標の関数であるし，また式(5)は非線形であるから，計算点解析法における計算プロセスは反復計算になる．なお，計算点解析法についてはすでにいくつかの論文で述べられているので，ここでは詳細は省略する．

3. 計算例とその検討

計算例として，前報で扱った問題と同様なものを考える．なお，以下の計算はすべて無次元量として実行される．Fig. 1 が考える正方形領域であり，初期温度は一律に 0 (基準温度) とする．上下の辺は断熱，左右の辺は時刻 $t = 0$ で 10 に加熱されるものとする．

境界辺はそれぞれ 10 個の線形要素によって離散化し，計算点は境界節点をひとつおきにとり，さらに内部計算点は領域幅を 4 等分する位置に合計 9 個配置する (Fig. 2)．また材料パラメータのうち熱伝導率だけが場所あるいは温度とともに変化するものとし，以下のようにおく：

$$A: \lambda = \lambda(x) = \lambda_0(ax + \beta) \quad (6)$$

$$B: \lambda = \lambda(u) = \lambda_0(1 + \gamma u) \quad (7)$$

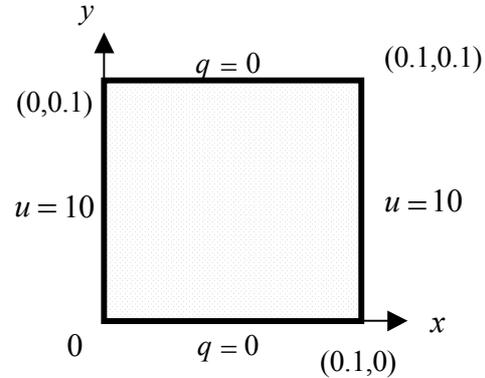


Fig. 1 Numerical example

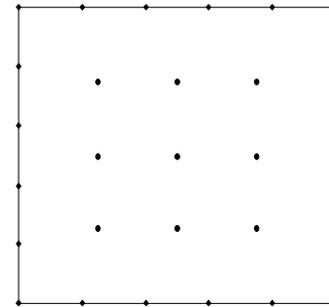


Fig. 2 Distribution of computing points

なお，材料パラメータの基本値として， $\lambda_0 / \rho c = 10^{-4}$ とし，内部発熱はない，すなわち $Q = 0$ とした．解析解を求めることは容易でないので，精度検定のためには差分法 (FDM) を用いた．時間増分 Δt は前報で検討されたように，0.1 とすれば，十分な精度が得られることがわかっている．また，計算点法では後退差分を，差分法では Crank-Nicolson の陰的スキームを採用した．

(A) が場所とともに変化する場合として，ここでは式(6)の係数パラメータを $\lambda_0 = 0, 0.1, 1, 10$ とし， $\beta = 0.1$ とした． $\lambda_0 = 0$ のときは一定値であり，その他の場合には x 方向に増大する．計算結果を Fig. 3 - 5 に示す．実線は差分法であり，種々のマークで示したものが計算点法による結果である．Fig. 3, 4 は時刻 $t = 1, 10$ における温度分布を表示したものである．まず，計算点法による結果は差分法による結果に極めてよく一致することがわかる．もちろん， $\lambda_0 = 0$ のときは熱伝導率が場所とともに変化しない場合であるから，前報ですでに解析解との一致が示されているものである． λ_0 の値を変えて求めた結果は図に示されているように，温度分布に大きな影響を与えている． λ_0 が大きくなれば， x の増大とともに

に熱伝導率が大きくなるので、温度の上昇が顕著になり、領域の右側の温度が高くなっている。

Fig. 5は時間経過とともに温度が変化の様子を、領域の中央 $x = 0.05$ の位置で示したものである。この分布の違いが温度変化に与える効果が明らかになっている。なお、この図においても差分解との比較がなされており、すべての時刻において、両者の結果はよい一致をしていることがわかる。

(B) の温度依存性を考えた場合の計算は、式(7)の α を 0.001 として行った。すなわち、温度が10上昇すると熱伝導率が10%高くなる材料に対応する。時刻 $t = 1, 10$ における温度分布の計算結果を Table 1 に示す。この表で、Temp-Ind と Temp-D はそれぞれ、熱伝導率が温度に依存しない場合と依存する場合に対応する。Computed は計算点法による結果であり、差分法による結果(FDM)と比較してあるように、両者の一致はいずれの時刻においても極めて良好である。なお、熱伝導率の温度依存性は、この計算結果にはよれば、温度依存性を考慮することによって高めの温度分布となることは明らかに示されているが、影響の度合いはあまり顕著でない。

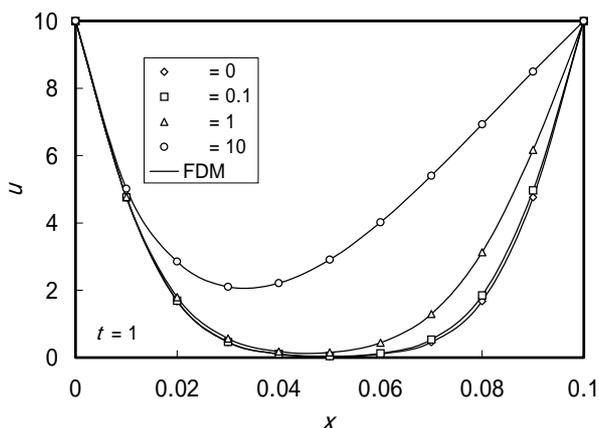


Fig. 3 Temperature distribution at $t = 1$

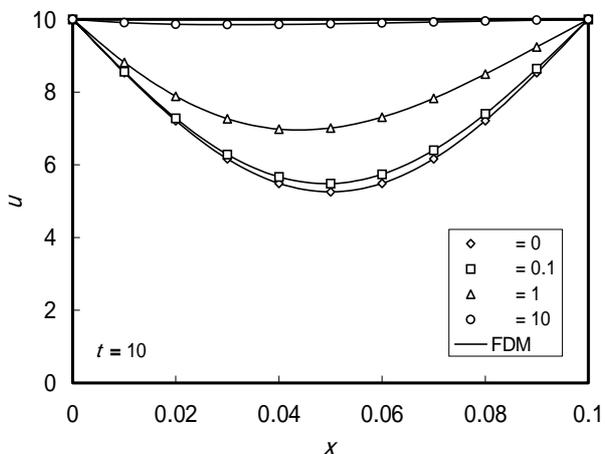


Fig. 4 Temperature distribution at $t = 10$

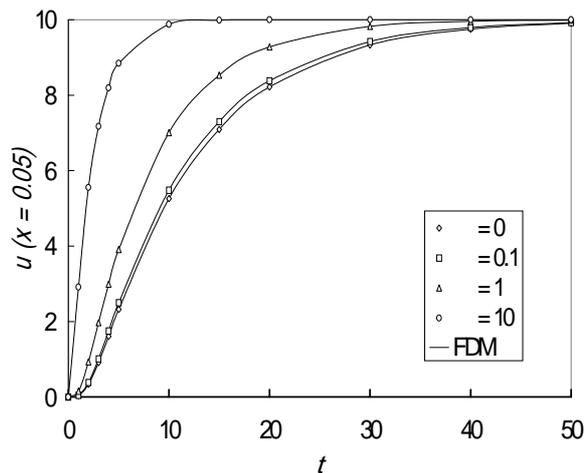


Fig. 5 Temperature variation at $x = 0.05$

4. まとめ

本研究では、計算点解析法を不均質な材料における非定常熱伝導問題に適用し、時間に関する導関数を差分によって近似して扱う方法を示した。不均質性として、熱伝導率が場所とともに変わる場合、および温度に依存して変化する場合をとりあげた。これらはいずれも、未知数とその導関数を非同次項として含む Poisson 方程式により表示されるので、このような問題を扱うためにすでに提案されている計算点解析法を適用して解を求めた。解析解を得ることが困難であるので、比較のために差分法の計算を行い、両者に極めてよい一致をみた。したがって、このような非定常問題にも、境界の離散化だけで処理できる計算点解析法が有効になることがわかった。

5. 文献

- (1) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, and LC.Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1992
- (2) A.J.Nowak and AC.Neves, eds. *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1994
- (3) 神谷・許, 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, 日本機械学会論文集 (A), **64** (1998), pp. 147-154
- (4) 許・神谷, 非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法 (続報: 未知関数の導関数を含む非同次項の場合), 日本機械学会論文集(A), **64** (1998), pp. 1341-1347
- (5) 許・神谷, 計算点解析法による境界要素法のためのアダプティブ境界要素, 日本機械学会論文集 (A), **64** (1998), pp. 1598-1595

Table 1 Temperature distribution for temperature-dependent material

		x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$t = 1$	Computed	Temp-Ind	10	4.762	1.677	0.4572	0.1031	0.0366
		Temp-D	10	4.778	1.685	0.4595	0.1036	0.0368
	FDM	Temp-Ind	10	4.762	1.677	0.4570	0.1032	0.0366
		Temp-D	10	4.778	1.685	0.4596	0.1037	0.0368
$t = 10$	Computed	Temp-Ind	10	8.533	7.210	6.161	5.488	5.256
		Temp-D	10	8.545	7.230	6.186	5.515	5.284
	FDM	Temp-Ind	10	8.533	7.210	6.161	5.488	5.256
		Temp-D	10	8.545	7.230	6.186	5.515	5.284

- (6) 神谷・許・鈴木, 境界要素法における計算点解析法の多重領域問題への応用, BEM テクノロジーコンファレンス論文集, **10** (2000), pp. 23-28
- (7) 松本・田中・徳田, 非定常熱伝導問題の時間領域境界要素法における初期条件の取り扱いに関する一考察, BTEC 論文集, **10** (2000), pp. 29-32
- (8) J. Blobner, R.A. Bialecki and G. Kuhn, Transient nonlinear heat conduction-radiation problems – a dual reciprocity formulation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **49** (1999) pp. 1865-1882
- (9) R.A. Bialecki, P. Jurgas and G. Kuhn, Dual reciprocity BEM without matrix inversion for transient heat conduction, *Eng. Anal. Boundary Elms*, **26** (2002), pp. 227-236
- (10) 田中・松本・須田・高桑, 非定常熱伝導問題に対する時間スナップ境界要素解析への二重相反法の適用, 計算数理工学論文集, **2** (2002), pp. 1-4
- (11) 神谷・橋爪・安藤, 境界要素法における計算点解析法の非定常熱伝導問題への適用, 境界要素法論文集, **19** (2002), (掲載予定)