

境界要素法における計算点解析法の非定常熱伝導問題への適用

APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO UNSTEADY THERMAL CONDUCTION PROBLEMS

神谷紀生¹⁾, 橋爪智弘²⁾, 箕浦昌之³⁾

N. Kamiya, T. Hashizume and M. Minoura

¹⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)²⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:hashi@info.human.nagoya-u.ac.jp)³⁾名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:minoura@info.human.nagoya-u.ac.jp)

Computing Point Analysis scheme in the Boundary Element Method, proposed earlier by one of the present authors, is applied to an unsteady thermal conduction problem in homogeneous medium. Derivative with respect to time in the thermal diffusion equation is approximated by finite difference of the Euler-type in small time interval. Then, the above-mentioned governing differential equation can be thought as an inhomogeneous equation governed by the Laplace differential operator as a principal differential operator. The computing point method can solve the derived equation by boundary discretization alone. Some example computations are shown for verifying the proposed scheme.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Functionally Gradient Material

1. はじめに

著者らは、非線形あるいは非同次問題を境界だけの離散化によって解析する境界要素法の「計算点解析法(Computing Point Method)」^{(3)~(6)}と名づける方法を提案した。この方法は、従来このための方法として知られていた「二重相反法(DRM)」⁽¹⁾あるいは「多重相反法(MRM)」⁽²⁾とは違ったもので構成される代数方程式が特異になりにくい特徴をもっている。すでに種々の非線形問題に適用して、その有効性が示された。

本研究では、計算点解析法を時間とともに変化する非定常問題の解析に応用する。時間に関する導関数を差分近似すれば、支配微分方程式は未知関数を非同次項に含む形式になるので、これを利用して計算点解析法が適用できる(この方法は、DRMですでに用いられている^(1,10))。したがって、従来この種の問題に境界要素法を適用するために考えられてきた、時間項を含めた基本解を用いる方法⁽⁷⁾あるいは初期時間における温度分布を境界積分に変換して扱う方法以外に、ここで述べる新しい方法を応用できることになるはずである。また DRM 定式に基づき、時間導関数の積分をより精度の高い方法で実行する試みもいくつか報告されている^(8,9)。非定常熱伝導に関する簡単な例題への適用により、方法とその有効性を明らかにする。

2. 計算点解析法のアウトライン

計算点解析法の詳細はすでに文献^{(3)~(6)}に示されているので、ここでは概要を説明する。2次元領域 Ω (その境界を Γ とする)においてつぎの非線形 Poisson 方程式を考える。

$$\nabla^2 u(x, y) + b(x, y, u, u/x, u/y, \dots) = 0 \quad (1)$$

ここで、 u は未知関数、 b は非同次項であって、未知関数とその導関数を含むものとする。Laplace 方程式の基本解を用いて、式(1)を積分方程式に変換すれば、 b と基本解の積が領域積分として現われる。この領域積分は、 b を次のように近似し、相反定理を適用することにより、境界積分に変換される。

$$b = \sum_{j=1}^{15} c_j r_j(x, y) \quad (2)$$

ここで、 r_j は x, y に関する4次までの完全多項式の各項、すなわち $1, x, y, x^2, \dots, y^4$ をとるものとする。

さらに、非同次項に未知関数の導関数が含まれる場合は、未知数自体を次のように多項式近似する：

$$u \approx \sum_{j=1}^{15} c_j' r_j(x, y) \quad (3)$$

複雑な関数のふるまいについては、領域を部分領域に分けて、これらごとにこのような近似を用いる。

式(2)の未知係数 c_j は、境界上および領域内部に取った計算点と呼ぶいくつかの位置で与えられた条件を満たすように、最小2乗法を用いて決定される。同様に、式(3)の未知係数 c_j' は、計算点での未知関数の値によって、最小2乗法で決定される。もちろん非同次項には未知関数が含まれるし、未知関数自体計算点で与えられているわけではないので、これらの計算は逐次近似的に、反復計算によらざるを得ない。

3. 均質媒体における非定常熱伝導問題

均質な媒体における非定常熱伝導問題の支配方程式は次のように与えられる（以下では2次元問題として記述する）:

$$k \nabla^2 u(x, y, t) = \frac{u(x, y, t)}{t} \quad (4)$$

ここで、 u は温度、 t は時間、 k は熱拡散率であり一定とする。時間に関する導関数を次のように差分近似する。すなわち小さい時間間隔 Δt について

$$\left(\frac{u}{t} \right)_t = \frac{u(x, y, t) - u(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (5)$$

したがって、この関係を式(4)に代入すれば、次のようになる:

$$\nabla^2 u(x, y, t) - \frac{u(x, y, t) - u(x, y, t - \Delta t)}{k \Delta t} = 0 \quad (6)$$

この式は左辺第2項を非同次項とする Poisson 方程式とみなすことができる。なお、上式で Δt 時間前の温度

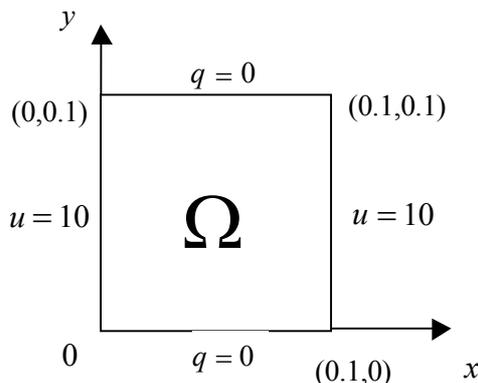


Fig. 1 Example 1

$u(x, y, t - \Delta t)$ はすでにわかっているものとして、 $u(x, y, t)$ を求める。この計算プロセスを繰り返すことによって、初期時刻から必要な時刻までの時間経過における現象を決定することができる。なお、式(6)は左辺第1項および第2項の最初の項を合わせて変形 Helmholtz 方程式となっているが、そのように考えても最後の項が非同次項として残るので、そのように扱う利点は現れない。

式(5)の導関数の差分近似はいわゆる後退差分である。差分近似には、種々の公式が知られているが、これに関する考察を行っておく。前進差分および中央差分を用いれば、式(6)に対応して、それぞれ次の式が得られる:

$$\nabla^2 u(x, y, t) - \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{k \Delta t} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla^2 u(x, y, t) - \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t - \Delta t)}{k \Delta t} = 0 \quad (8)$$

これらの式を用いて、積分方程式を導出すれば、求めるべき時刻の未知関数値を求めるのには好都合でないことがわかる。さらに、差分を用いた陰的解法である Crank-Nicolson 公式によれば、上記に対応する式は次のようになる:

$$\frac{1}{2} [\nabla^2 u(x, y, t + \Delta t) + \nabla^2 u(x, y, t)] - \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{k \Delta t} = 0 \quad (9)$$

この式では、式(6)と同じように時刻 t の値を用いて Δt だけ経過した時刻の未知量を求める形式になっている。ただし時刻 t での $\nabla^2 u$ と基本解の積の項を境界表示に変換して扱う必要がある。したがって、積分方程式を用いる境界要素法の立場から上記の種々の差分表示を比較すれば、後退差分あるいは Crank-Nicolson 公式を用いければ積分方程式による定式化（領域積分の境界積分への変換を含め）は可能である。ことにそのうちで、後退差分を用いる方法が最も単純になることがわかる。

4. 計算例

ここでは2つの計算例を取り上げ、計算法を検討する。なお以下ではすべて無次元量として扱うものとする。

<例題 1> Fig. 1 のような正方形領域 Ω の問題を考える。正方形領域の上下の辺では熱の出入りはないものとする。領域内部の初期温度は0とし、時刻 $t = 0$ において、左右の辺における温度が $u = 10$ のように与えられて、内部に向かって熱の移動が生じる状況を解析する。なお、熱拡散係数は $k = 10^{-4}$ とする。この問題は実質的に x 軸方向にだけ変化する1次元問題であるから、解析解を求めることが可能であって、温度は次のように与えられる:

$$u = 20 \sum_{s=1}^{\infty} [\exp(-10^{-2} s^2 \pi^2 t) \sin(10s\pi x)] \\ \times \int_0^{0.1} \{-10 \sin(10s\pi \lambda) d\lambda\} + 10$$

計算点解析法による計算は次のように行う。境界要素としては直線で表される線形要素を用い、各辺ごとに10個の要素によって離散化する(合計境界要素数 $n=40$)。境界計算点(BCP)は等間隔に20点($\bar{n}=20$)とし、内部計算点(ICP)は5,9点($m=5,9$)とした。Fig. 2に境界計算点および内部計算点の配置を示す(それらを配置A, Bと名づける)。なお、初期時刻から微小時間ごとに計算を繰り返すが、時間増分は $\Delta t = 0.1, 1$ の2種類にとって実施した。

上記の計算条件で、得られた結果をFig. 3-5に示す。Fig. 3では、解析領域の中央位置における温度の時間経過を、2種類の時間増分について比較している。時間増分が $\Delta t = 0.1$ の場合には解析解とよく一致するが、 $\Delta t = 1$ のように大きい時間増分では正しい解が得られないことがわかる。これは、時間積分をEuler法すなわち陽的方法によっているために、生じる状況である。Fig. 4は、 $\Delta t = 0.1$ として、時間の経過とともに変化する温度分布を示したものである。実線が解析解であり、各種のマークが計算値である。図に示されるように、両者の一致は極めて良好である。

内部計算点の位置と数を変えて(配置A, B)計算した結果を厳密解と比較した結果が、 $x = 0.01, 0.05$ についてFig. 5に示されている。この結果によれば、時間の初期の段階では幾分差がみられるが、ある程度経過すればいずれの場合にも精度の高い解が得られることがわかる。時間の初期の段階では左右の辺に近いところで温度の変化がはげしいので、計算点を辺に近い位置に配置したほうが計算精度を高める効果が期待されるが、計算結果によれば、その影響はあまり大きくないことがわかる。

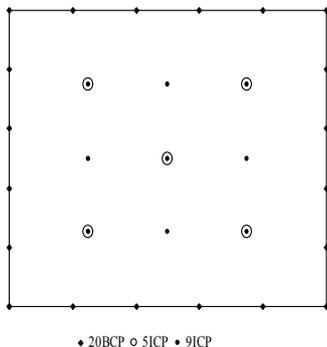


Fig. 2 Boundary computing points and internal computing points

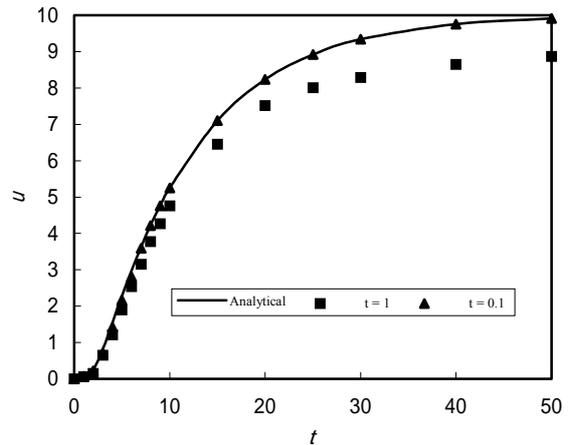


Fig. 3 Effect of time interval

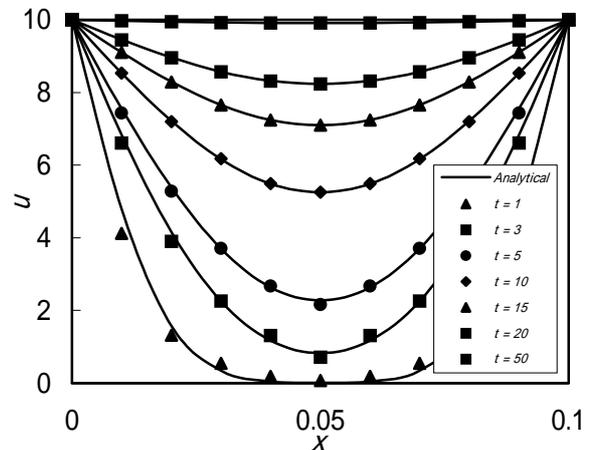


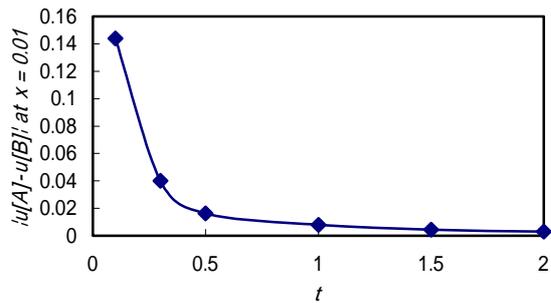
Fig. 4 Result of example 1

したがって、単純に計算点を配置したもので、十分であると言える。

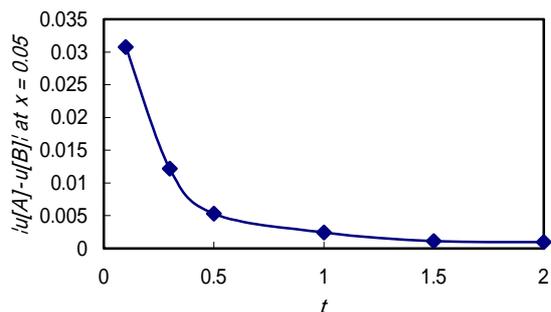
<例題2>例題2としては、上記の例題と同じ形状の領域において、あらかじめ温度が0であると、左右側面の温度が初期時刻において、-10, 10のように与えられる場合を考えた。両側面の温度差が大きいので、内部の温度勾配はより大きくなる。この問題の解析解は次のようになる：

$$u = 20 \sum_{s=1}^{\infty} [\exp(-10^{-2} s^2 \pi^2 t) \sin(10s\pi x)] \\ \times \int_0^{0.1} \{(10 - 200\lambda) \sin(10s\pi \lambda)\} d\lambda + 200x - 10$$

計算条件は前例と同じである。時間経過とともに温度が変化する様子をFig. 6に示した。この例においても計算結果は解析解と極めてよい一致を示した。



(a)



(b)

Fig. 5 Effect of internal computing points

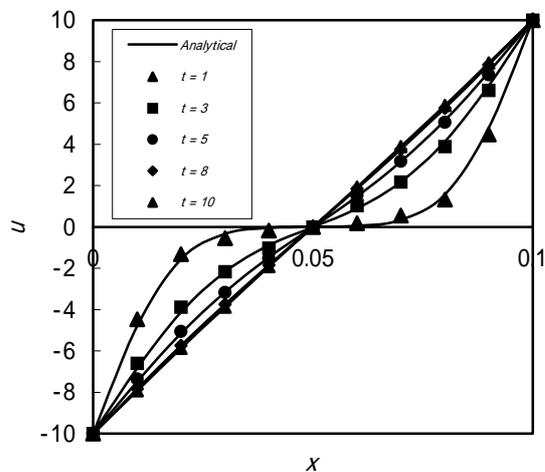


Fig. 6 Result of example 2

5. まとめ

本研究では、計算点解析法を均質な材料における非定常熱伝導問題に適用し、時間に関する導関数を差分によって近似して扱う方法を示した。未知数を含む Poisson 方程式により表示されるので、Laplace 方程式の非同次項として処理した。計算点解析法はこの問題について有効であることが示されるとともに、時間増分の取り方が解の精度に影響することがわかった。

6. 文献

- (1) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, and LC.Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1992
- (2) A.J.Nowak and AC.Neves, eds. *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1994
- (3) 神谷・許, 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, 日本機械学会論文集 (A), 64 (1998), pp. 147-154
- (4) 許・神谷, 非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法 (続報: 未知関数の導関数を含む非同次項の場合), 日本機械学会論文集(A), 64(1998), pp. 1341-1347
- (5) 許・神谷, 計算点解析法による境界要素法のためのアダプティブ境界要素, 日本機械学会論文集 (A), 64(1998), pp. 1598-1595
- (6) 神谷・許・鈴木, 境界要素法における計算点解析法の多重領域問題への応用, BEM テクノロジーコンファレンス論文集, 10(2000), pp. 23-28
- (7) 松本・田中・徳田, 非定常熱伝導問題の時間領域境界要素法における初期条件の取り扱いに関する一考察, BTEC 論文集, 10(2000), pp. 29-32
- (8) J.Blobner, R.A.Bialecki and G.Kuhn, Transient nonlinear heat conduction-radiation problems – a dual reciprocity formulation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 49(1999) pp. 1865-1882
- (9) R.A.Bialecki, P.Jurgas and G.Kuhn, Dual reciprocity BEM without matrix inversion for transient heat conduction, *Eng. Anal. Boundary Elms.*, 26(2002), pp. 227-236
- (10) 田中・松本・須田・高桑, 非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素解析への二重相反法の適用, 計算数理工学論文集, 2(2002), pp. 1-4