

Wavelet BEM におけるマルチグリッド法の 混合境界値問題への適用

IMPLEMENTATION OF MULTIGRID ALGORITHMS IN WAVELET BEM FOR MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS

阿部和久¹⁾, 林 志保²⁾, 紅露一寛³⁾

Kazuhisa ABE, Shiho HAYASHI and Kazuhiro KORO

¹⁾新潟大学工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)

²⁾新潟大学大学院自然科学研究科 (研究当時) (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050)

³⁾新潟大学大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail:f99m912c@mail.cc.niigata-u.ac.jp)

Construction of multigrid algorithms which are applicable to mixed boundary value problems is attempted for the wavelet BEM. As the multigrid algorithms, the multigrid method and the MG-GMRES method, in which the multigrid algorithm is used for preconditioning of the GMRES method, are considered. The Bi-CG and GMRES methods are employed as a smoother of the multigrid algorithms. Numerical experiments are carried out to examine the efficiency of the developed algorithms, and it is found that the combination of MG-GMRES and Bi-CG can be an effective algorithm for the mixed boundary value problems. Although the proposed method cannot outperform the GMRES method, the number of iterations can be reduced, and hence the enhancement is attained in the aspect of the memory requirement.

Key Words : Multigrid Algorithm, Mixed Boundary Value Problem, Wavelet BEM

1. はじめに

Wavelet BEM は, 境界要素方程式の関数基底に wavelet を用いる方法である. Wavelet が持つゼロモード性と局所サポート性により, 係数行列成分の距離減衰性が向上し, 値の非常に小さな行列成分の数が増える. これらの成分をゼロで置換することにより, 精度を犠牲にすることなく係数行列の圧縮が達成でき, 記憶容量と計算時間の削減が可能となる. このように, 当該手法では疎行列を扱うこととなるので, 連立方程式の求解には反復法が用いられる.

これまで著者らは, wavelet BEM における反復解の収束を加速する方法の1つとして, マルチグリッド法の適用可能性について検討を行って来た^{1),2)}. マルチグリッド法は低解像度のメッシュを用いることで, 収束の緩慢な長波長成分の収束性を向上させ, 反復法のパフォーマンスの改善を図る方法である³⁾.

本来, 本手法は解像度の異なる複数メッシュにおける方程式の作成や, 解の射影・補間などの操作のために, 付加的な記憶量やアルゴリズムを必要とする. しかし, wavelet BEM の下では, wavelet 基底が有する階層性により, 上述の操作は容易に実行でき, 付加的な負担は大幅に軽減されることとなる. そのためマルチグリッド法の wavelet BEM への適用は有望に思われる.

Jacobi 法や Gauss-Seidel 法などの古典的反復法にお

ける解は, 反復アルゴリズムの作用素の固有値が小さな値を持っている固有モードから先に収束する³⁾. そのため, マルチグリッド法は, 長波長の固有モード程大きな固有値を有するような反復法に対して有効に機能する. このような条件と関連して, 境界要素法に対するマルチグリッド法の適用は, 第2種積分方程式に対して有効であるとされてきており⁴⁾, このことは具体例によっても容易に確認することができる¹⁾. そのためマルチグリッド法の境界要素法への適用は専ら第2種積分方程式に基づくものに限定されており, それが大きな制約となっていた. また, 混合境界値問題の場合, 連立方程式の係数行列には, 一重層核と二重層核に関する成分が混在しており, 一般にマルチグリッド法の適用が難しい.

そこで本研究では, マルチグリッド法を wavelet BEM へ適用する場合を対象に, 混合境界値問題においても有効性を失わないアルゴリズムと反復法の組み合わせについて検討する. 以下では, マルチグリッド法自体を既存の反復法と組み合わせて用いる通常の方法と, 当該法を GMRES 法の非定常な前処理過程に用いる方法⁵⁾の二つの方法を対象に, 具体例を通し混合境界値問題への適用について, その可能性を検討する.

2. Wavelet BEM

2.1 Wavelet 基底

Wavelet 基底は scaling 関数と wavelet の 2 種類の関数で構成される。Scaling 関数は通常用いられる補間関数に対応する関数基底である。Scaling 関数を $\phi(x)$ とし、解像度 m の部分空間 V_m の基底 $\phi_{m,k}(x)$ を次式で定義する。

$$\phi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \phi(2^m x - k) \quad (m, k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

なお、部分空間 V_m は 2^m の自由度の下で与えられる要素分割に対応している。 V_m をそれより 1 つ解像度の低い部分空間 V_{m-1} とその直交補空間 W_{m-1} とに分解する。

$$V_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1} \quad (2)$$

W_m の基底 $\psi_{m,k}(x)$ を wavelet $\psi(x)$ に基づき次式で定義する。

$$\psi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - k) \quad (m, k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

式 (2) よりさらに次式を得る。

$$V_m = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_{m-1} \quad (4)$$

上式は、解像度 m のメッシュにおける解が wavelet を用いることで、最も粗い分割での解と、各解像度における補正関数との直和に分解できることを意味している。Wavelet 基底の特徴はこの階層性にあり、メッシュの解像度の変更は、対応する wavelet の階層数の変更で容易に実現できる。

2.2 境界要素方程式

以下では具体例として二次元ポテンシャル問題を考える。直接法に基づく境界積分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y})d\Gamma \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 u, q はポテンシャルと流束、 u^*, q^* は基本解、 Γ は境界である。また、 $c(\mathbf{x})$ は点 \mathbf{x} における境界形状に依存した係数で、境界が滑らかな点では $1/2$ となる。

u, q の近似解 \tilde{u}, \tilde{q} を次の wavelet 展開で与える。

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \hat{u}_{0,1}\phi_{0,1} + \sum_{m=0}^M \sum_{k=1}^{2^m} \tilde{u}_{m,k}\psi_{m,k} = \sum_i^N u_i w_i, \\ \tilde{q} &= \hat{q}_{0,1}\phi_{0,1} + \sum_{m=0}^M \sum_{k=1}^{2^m} \tilde{q}_{m,k}\psi_{m,k} = \sum_i^N q_i w_i \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\hat{u}_{0,1}, \tilde{u}_{m,k}, \hat{q}_{0,1}, \tilde{q}_{m,k}$ は各基底の係数、 w_i はその基底を順に並べたもの、 u_i, q_i はそれらに対応する係数である。また、 M は最高解像度、 N は全自由度である。

式 (6) を式 (5) に代入し、Galerkin 法の適用により離散化することで次の境界要素方程式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{u}, \mathbf{q} は wavelet 係数 u_i, q_i を成分に持つベクトル、 \mathbf{H}, \mathbf{G} は次の積分項をそれぞれ係数成分に持つ行列である。

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2} w_i w_j d\Gamma + \iint_{\Gamma} q^* w_i w_j d^2\Gamma, \\ g_{ij} &= \iint_{\Gamma} u^* w_i w_j d^2\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

また、境界 Γ が区間毎に滑らかな部分境界により構成されている場合、式(8)における h_{ij} の定義式の右辺第一項目の積分における係数は恒等的に $1/2$ となる。

2.3 係数行列成分の切捨て

Wavelet BEM では、絶対値の小さな係数行列成分を事前に切捨てることによって、係数行列をスパース化し、係数成分の計算と連立方程式の求解とに要する時間の短縮、および記憶容量の削減を図る。なお、wavelet が有するゼロモーメント性により、式(8)の二重積分における二つの積分要素間の距離が十分に大きな場合には、係数行列成分の距離減衰性が向上する。 $|h_{ij}|, |g_{ij}|$ の事前評価には、以降の解析例で用いる Haar wavelet の場合、次式を用いる。

$$\begin{aligned} |h_{ij}| &= \bar{h}_{ij} = \frac{C_h h_0}{\bar{r}^3} 2^{-\frac{3(m_i+m_j)+2}{2}}, \\ |g_{ij}| &= \bar{g}_{ij} = \frac{C_g h_0^2}{\bar{r}^2} 2^{-\frac{3(m_i+m_j)+2}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 C_h, C_g は定数、 \bar{r} は w_i と w_j との距離 r を scaling 関数の要素長 h_0 で割ったもの、 m_i は w_i の階層である。

式(9)の $\bar{h}_{ij}, \bar{g}_{ij}$ が次の条件をみたす場合は、 h_{ij}, g_{ij} の計算は行わず、それらを切捨てる。

$$\bar{h}_{ij} < \tau \cdot H_{max}, \quad \bar{g}_{ij} < \tau \cdot G_{max} \quad (10)$$

ここで、 H_{max}, G_{max} は w_i, w_j が共に scaling 関数で与えられている係数成分における絶対最大値である。また、切捨て基準値 τ は文献(6)に構成した方法により事前に設定しておく。

3. マルチグリッド法

Jacobi 法や Gauss-Seidel 法などの古典的な反復法は平滑化の効果が有り、長波長成分ほど反復解の収束が遅い。マルチグリッド法は、この長波長成分を粗い解像度のメッシュの下で補正することで解の収束を加速させる方法である。低解像度の解による補正方法には、2つの基本的手法がある。ここでは、それらの内、本研究で使用する手法 (coarse grid correction) を対象に、著者らが wavelet BEM の下で構成したアルゴリズム¹⁾について、その概要を述べる。

3.1 Coarse grid correction

高解像度のメッシュに対して反復法を適用し、その解の長波長成分を低解像度のメッシュの下で近似的に求め補正する過程を coarse grid correction という。

解像度 M の解ベクトル \mathbf{x}^M は最上位 wavelet の係数 \mathbf{x}_2^M と、低解像度の部分空間 V_{M-1} に対応した部分ベク

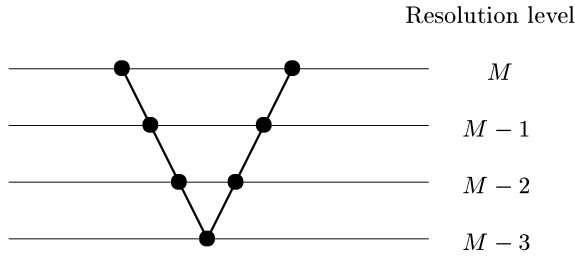


Fig. 1 V-cycle

トル \mathbf{x}^{M-1} により与えられ, 境界要素方程式もこれに対応するかたちで次式のように与えられる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{M-1} & \mathbf{A}_{12}^M \\ \mathbf{A}_{21}^M & \mathbf{A}_{22}^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{M-1} \\ \mathbf{x}_2^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1^M \\ \mathbf{b}_2^M \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで, \mathbf{A}^{M-1} は部分空間 V_{M-1} での境界要素方程式に対する係数行列, $\mathbf{b}_1^M, \mathbf{b}_2^M$ は式 (7) より与えられる既知な部分ベクトルである.

まず, 式 (11) に反復法を ν_1 回適用する. この結果得られた \mathbf{x}^M の近似解を \mathbf{v}^M とする. この段階で短波長成分に対応する最上位 wavelet 成分の反復解 \mathbf{v}_2^M は概ね正解 \mathbf{x}_2^M に収束しているものと考えられる. そこで, 式 (11) より \mathbf{x}^{M-1} の反復解 \mathbf{v}^{M-1} に関する方程式を, 次式のように近似的に作成する.

$$\mathbf{A}^{M-1} \mathbf{v}^{M-1} = \mathbf{b}^{M-1}, \quad \mathbf{b}^{M-1} = \mathbf{b}_1^M - \mathbf{A}_{12}^M \mathbf{v}_2^M \quad (12)$$

式 (12) に反復法または直接法を適用して \mathbf{v}^{M-1} を求める. 式 (11), (12) で各々求めた成分 $\mathbf{v}_2^M, \mathbf{v}^{M-1}$ より \mathbf{v}^M を再構成し, これに再度反復法を ν_2 回適用して最終的な反復解を求める.

3.2 V-サイクル

3.1 に示した coarse grid correction を多数の解像度に対して適用することで, Fig.1 に示す V-サイクルと呼ばれるマルチグリッドアルゴリズムが構成される. なお, V-サイクルを 2 つの解像度間に適用したものが coarse grid correction である.

4. MG-GMRES 法

非対称行列に有効な反復法の 1 つに GMRES 法がある. 次の連立方程式を考える.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (13)$$

GMRES 法は上に示した連立方程式に対して, 反復過程毎に異なる前処理行列 \mathbf{M}_j を適用することが可能である⁷⁾.

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_j^{-1}(\mathbf{M}_j\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (14)$$

GMRES 法では, j 回目の反復過程までに Arnoldi 原理により直交基底 $\mathbf{V}_j = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\}$ を生成する. この

段階での反復解 \mathbf{x}_j は直交基底 \mathbf{V}_j に基づき, 次式により与えられる.

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_j \mathbf{y}_j \quad (15)$$

ここで, \mathbf{x}_0 は初期解, \mathbf{y}_j は次の残差 \mathbf{r} のノルムを最小にする解である.

$$\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_j \mathbf{y}_j) \quad (16)$$

定常的な前処理行列 \mathbf{M} の下での GMRES 法では, 反復過程毎に生成される基底ベクトル \mathbf{v}_j を全て保存する必要があり, 他の反復法に比べメモリ負荷が大きい. そのため k 回の反復過程毎に直交基底 \mathbf{V}_k を更新するリスタート付き GMRES(k) 法が提案されている. しかし, リスタートの実行は一般に反復解の収束性を低下させる. 一方, 可変な前処理を伴う GMRES 法では, 第 j 反復過程に用いた前処理行列 \mathbf{M}_j に対応するかたちで, 次のベクトル \mathbf{z}_j を保存する必要がある.

$$\mathbf{z}_j := \mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{v}_j \quad (17)$$

そのため, 通常の GMRES 法の 2 倍の記憶容量を必要とする. しかし, 各反復ステップにおいて各々最適な前処理行列を使用することで大幅な収束性の改善が達成できれば, 結果的にはパフォーマンスの向上が期待できる.

式 (17) の前処理行列に係数行列 \mathbf{A} を用いた次式を考える.

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}_j = \mathbf{v}_j \quad (18)$$

式 (18) を完全に解くことは, 式 (13) を解くことに相当する. 一方, 式 (18) をある要求精度の下で近似的に解くことは, 既知ベクトル \mathbf{v}_j に対して $\hat{\mathbf{z}}_j$ の近似解 \mathbf{z}_j を解に持つ式 (17) の前処理行列 \mathbf{M}_j を陰的に与えたことに相当する. \mathbf{z}_j が $\hat{\mathbf{z}}_j$ の良い近似であることは, 行列 \mathbf{A} の適切な近似行列 \mathbf{M}_j を前処理に用いたことと, 間接的に等価である.

式 (18) の近似解法にマルチグリッド法を適用する前処理過程を組み込んだ GMRES 法 (MG-GMRES 法) の適用が FEM を対象になされており, その有効性が示されている⁵⁾.

5. 解析例に基づく検討

本研究では, 境界要素方程式の求解にマルチグリッド法を適用する場合と, MG-GMRES 法を適用する場合を対象に, その有効性について検討する. 対象とする境界要素方程式には, 2. に示した直接法に基づくものを考え, wavelet 基底には Fig.2 に示す Haar 基底を用いる. このとき, Dirichlet 問題は第 1 種の, Neumann 問題は第 2 種の積分方程式を与える. なお, 第 2 種積分方程式に対するマルチグリッド法の有効性は多くの文献において既に確認されている. ここでは混合境界値問題のみを対象に議論を進める. また, マルチグリッド法および

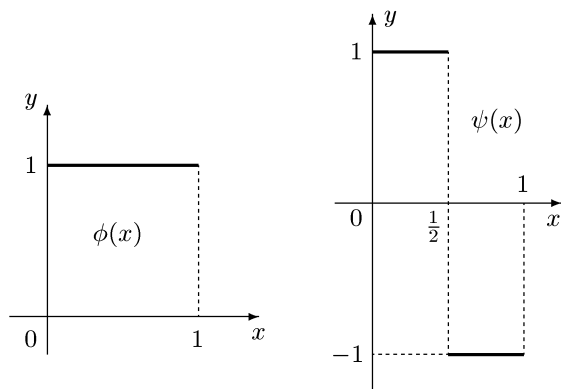


Fig. 2 Haar scaling function $\phi(x)$ and wavelet $\psi(x)$

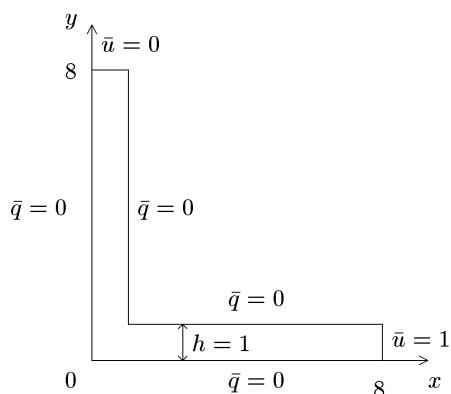


Fig. 3 Analytical conditions

MG-GMRES 法の中のマルチグリッドアルゴリズムにおける反復法には、Bi-CG 法と GMRES 法の 2 つの手法を用いた。なお、重み付き Jacobi 法、Gauss-Seidel 法の適用についても検討を行なったが、Dirichlet 問題と混合境界値問題に対して収束解を得ることができなかった。

5.1 解析条件

Fig.3 に示す混合境界値問題を対象とする。なお、マルチグリッド法適用の効果は、本例題のように領域形状が細長い場合や、複雑な場合など、従来法では解の収束が緩慢となる問題に対して顕著に現れる。離散化に当り、6 つの各部分境界において最高解像度 $M = 8$ とし、自由度 $N = 3072$ の下で解析を行った。なお、全成分の値が 0 から成るベクトルを反復法の初期解 \mathbf{x}_0 に用いた。

5.2 マルチグリッド法の有効性に関する検討

前述のように本研究ではマルチグリッド法のサイクルパターンに V-サイクルを用いた。V-サイクルを適用する階層は最上位層 ($m = 8$) から、 $m = 4$ までの間の階層とした。反復法に Bi-CG 法を用いた場合の求解時間と残差ノルムとの関係を Fig.4 に、GMRES 法を用いた場合を Fig.5 に示す。なお、検討の結果、Bi-CG 法におけるマルチグリッド法の各階層での反復回数は 30 回、GMRES 法では 15 回と設定した。また、図の縦軸は、連立方程式の残差ノルム $\|\mathbf{r}\|$ を、初期解 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ に対する残差ノルム

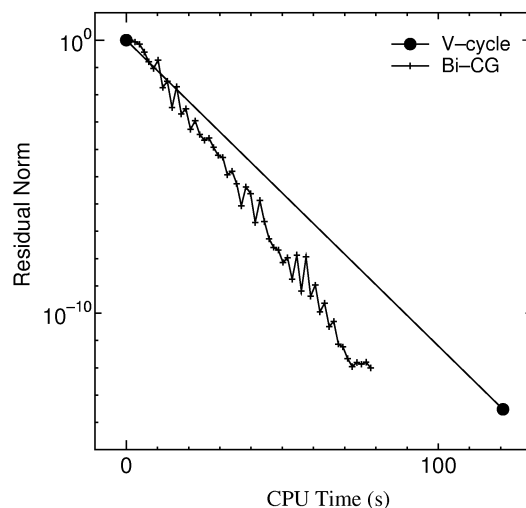


Fig. 4 Convergence of residual norm for multigrid algorithm(V-cycle) with Bi-CG method.

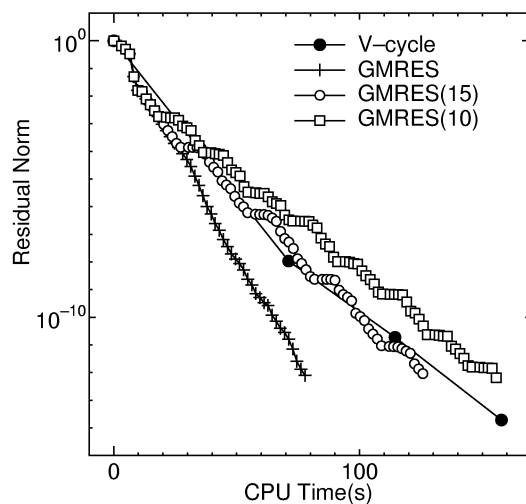


Fig. 5 Convergence of residual norm for multigrid algorithm(V-cycle) with GMRES method.

ム $\|\mathbf{r}_0\| = \|\mathbf{b}\|$ で規格化したものである。これらの図より、マルチグリッド法の反復法に Bi-CG 法と GMRES 法を用いる限り、混合境界値問題に対しても収束解が得られることがわかる。

Bi-CG 法に対しては、1 回のマルチグリッドアルゴリズムの適用で残差が大幅に減少している。しかし、Bi-CG 法単独の場合と比べ、1 回の反復計算当りに相当の時間を要しており、結局 Bi-CG 法単独の場合を上回る計算効率は得られなかった。

Fig.5 には、比較のため GMRES 法単独の場合に加え、リスタート値 $k = 10, 15$ の場合の結果も合わせて示した。マルチグリッド法での反復回数を 15 としているので、メモリの面ではリスタート値 $k = 15$ と同等の負荷となっている。Bi-CG 法の場合と同様に、マルチグリッド法の適用により 1 回の反復計算毎の残差の収束性は大

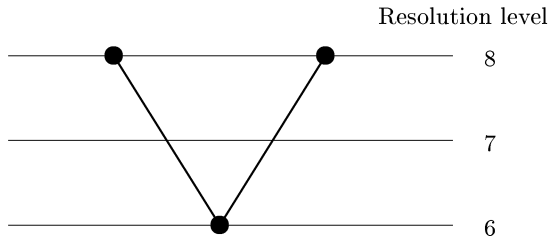


Fig. 6 Coarse grid correction

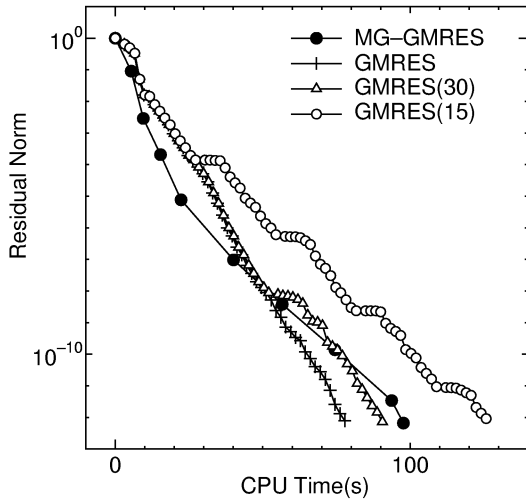


Fig. 7 Convergence of residual norm for MG-GMRES with Bi-CG method.

幅に向上しているが、計算時間に関して見ると収束性は $k = 15$ の GMRES 法に概ね等しく、マルチグリッド法適用による特段の効果は認められない。

5.3 MG-GMRES 法の有効性に関する検討

MG-GMRES 法の前処理過程に用いられるマルチグリッドアルゴリズムのサイクルパターンには、最も単純な coarse grid correction を用いた。検討の結果、coarse grid correction を適用する階層を $m = 6$ とした場合 (Fig.6) が最も良好な結果を与えたので、ここではその場合を示す。

なお、各前処理過程の効果を示す指標として、次式の reduction factor ρ_j が用いられている⁵⁾。

$$\rho_j := |\mathbf{v}_j - \mathbf{A}\mathbf{z}_j| \quad (19)$$

ρ_j はより良好な前処理の下でより小さな値をとり、結果として GMRES 法本体の反復回数を大幅に減らすことにつながる。しかし、小さな ρ_j を得るには、前処理過程でそれなりに多くの計算が必要となる。そのため、求解全体に要する時間が必ずしも減少するとは限らない。よって、前処理過程の終了判定は、全体の計算にかかる時間が最小となるように設定すべきである。本研究では、各階層での反復過程は、 ρ_j が許容値 δ 以下に達した時点で終了とし、以下の解析では $\delta = 0.1$ とした。ただし、最

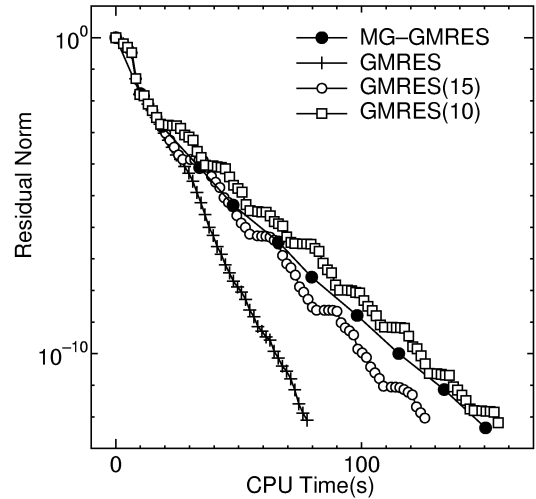


Fig. 8 Convergence of residual norm for MG-GMRES with GMRES method.

高階層 M での反復計算には、自由度が最大となるため、相対的に多大な時間がかかる。そこで、前処理の反復法に Bi-CG 法を用いた場合は最高階層での反復計算を省き、GMRES 法を用いた場合はそれを 1 回とした。

Coarse grid correction での反復法に Bi-CG 法を用いたものを Fig.7 に、GMRES 法を用いたものを Fig.8 にそれぞれ示す。前処理の反復法に Bi-CG 法を用いた Fig.7 では、リスタートなしの GMRES 法若しくは GMRES(30) 法と同程度の収束性が得られている。MG-GMRES 法の適用により GMRES 法の反復回数は大幅に削減されており、例えば残差ノルムの値が 1×10^{-10} 程度にまで収束するのに要する反復回数は 8 回となっている。MG-GMRES 法では通常の GMRES 法の 2 倍のメモリが必要となるので、これはリスタート値 16 の GMRES 法と同程度のメモリ負荷の下で、リスタート値 30 以上のパフォーマンスを得たことを意味しており、本手法適用の効果が窺える。

一方、前処理の反復法に GMRES 法を用いた Fig.8 では、GMRES(10) 法程度の収束性しか得られていない。例えば、 1×10^{-10} までの収束に要した反復回数は 9 回となっており、実質的メモリ負荷がリスタート値 18 の GMRES 法に相当することを考えると、本手法適用の難しさが認識できる。

以上より、混合境界値問題に対しては、MG-GMRES 法の前処理に Bi-CG 法を用いたものが有効な手法となり得ることがわかった。なお、ここには示さなかったが、第 1 種積分方程式に対応する Dirichlet 問題においても、やはり MG-GMRES 法と Bi-CG 法の組み合わせが良好な結果を与えた。

6. おわりに

Wavelet BEM を対象に、混合境界値問題へも適用可能なマルチグリッドアルゴリズムについて検討した。マルチグリッドアルゴリズムの適用方法としては、連立方程

式の求解法としてマルチグリッド法そのものを用いる方法と, GMRES 法の変な前処理過程にマルチグリッド法を用いる MG-GMRES 法の 2 ケースを検討対象とした。また, マルチグリッドアルゴリズム内の反復法として Bi-CG 法と GMRES 法を用いた。これらの組み合わせの下で具体例を通し比較検討を行った結果, MG-GMRES 法の前処理における反復法に Bi-CG 法を用いたものが, 検討の対象とした方法の中では唯一有効であることがわかった。なお, 当該手法によってもリスタートを行なわない GMRES 法を上回る収束性を得ることはできなかった。しかし, 非常に少ない反復回数の下でリスタート値 30 以上の収束性が得られており, メモリ負荷の面では大幅な改善がなされた。

参考文献

- 1) 阿部和久・林志保・紅露一寛：Wavelet BEM のためのマルチグリッド反復法, 応用力学論文集, **3**, 157-166, 2000.
- 2) 林志保・阿部和久・紅露一寛：マルチグリッド法を前処理に用いた GMRES 法の wavelet BEM への適用, 計算数理工学論文集, **1**, 13-18, 2001.
- 3) Briggs, W.L. : A multigrid tutorial, *SIAM*, 1987.
- 4) Mandel, J. : On multilevel iterative methods for integral equations of the second kind and related problems, *Numer. Math.*, **46**, 147-157, 1985.
- 5) Feng, Y.T., Peric, D. & Owen, D.R.J. : A multi-grid enhanced GMRES algorithm for elasto-plastic problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **42**, 1441-1462, 1998.
- 6) Koro, K. and Abe, K. : A practical determination strategy of optimal threshold parameters for matrix compression in wavelet BEM, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, to appear.
- 7) Saad, Y. : A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **14**, 461-469, 1993.