

## 等高面による三次元移動境界問題の境界要素解析

## 3-D LEVEL SET ANALYSIS BY BEM

阿部和久<sup>1)</sup>, 岩成洋平<sup>2)</sup>

Kazuhiisa ABE and Youhei IWANARI

<sup>1)</sup>新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)<sup>2)</sup>新潟大学大学院 博士前期課程 自然科学研究科環境システム科学専攻

Boundary element analysis method for motion of level sets developed by the authors is extended to 3-D problem. In the formulation, the multiple reciprocity method (MRM) is coupled with the analog equation method as for 2-D case. Improvement in the accuracy is attempted by using polyharmonic functions for volume distribution in MRM. The developed method is applied to evolution of level sets governed by mean curvature and constant speed. These numerical examples prove the validity of the method. Furthermore, it is found that the employment of polyharmonic function given by volume distribution is effective. Influence of the radius of volume distribution and the number of boundary elements are also investigated.

**Key Words :** Evolution of Level Set, 3-D Problem, Polyharmonic Function for Volume Distribution

## 1. はじめに

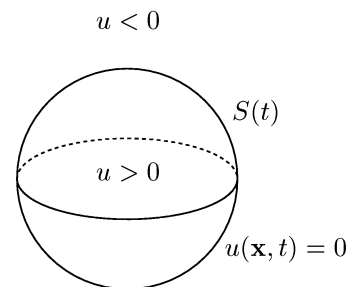
以前, 著者らは等高面の方法<sup>1)</sup>に基づく二次元移動境界問題の解析に, BEM の適用を試みた<sup>2)</sup>. 等高面の方法は, 関数のゼロ等高面により移動境界を記述するものであり, 境界の分裂・結合・消滅などの解析を可能にする. また, これにより移動境界問題は, 領域内で与えられた発展方程式の初期値・境界値問題に帰着する. ただし当該問題の支配方程式は, その主要部に非線形項を含む 2 階の準線形偏微分方程式で与えられる. 支配方程式が非線形項を含む問題に BEM を適用する際に生ずる領域積分を避ける方法として, 二重相反法や多重相反法 (MRM) が広く用いられているが, これらの方法を主要部が非線形性を有する問題に適用することは一般に難しい<sup>3)</sup>. そのため, 文献 2) では Analog Equation Method (AEM)<sup>4)</sup>の適用を試みた. 具体的解析例を通し検討を行った結果, 構成した手法により境界線の分裂や消滅が適切に解析可能であることがわかった.

本研究では, これまで著者らが構成した手法を三次元問題に拡張する. その際, 非線形項に関する領域積分は, 体分布多重調和関数<sup>5)</sup>を用いた多重相反法により処理する. 境界の運動が曲率の関数として与えられる三次元問題を例に本手法を適用し, 構成した解法の有効性について検証する.

## 2. 等高面の方法

時刻  $t$  における移動境界を  $S(t)$  とし,  $S(t)$  で囲まれた領域内部で  $u > 0$ ,  $S(t)$  上で  $u = 0$ , 外部で  $u < 0$  となるようなあるスカラー関数  $u(\mathbf{x}, t)$  を考える (Fig.1). 等高面の方法とは, 移動境界  $S(t)$  の追跡を,  $u(\mathbf{x}, t)$

のゼロ等高面の時間発展の問題として捉える手法である<sup>1)</sup>. 以下にその概要を述べる.

Fig.1 Function  $u$  and surface  $S$ 

## 2.1 平均曲率流方程式

曲面  $S$  の成長速度  $V$  が  $S$  の平均曲率  $H$  に比例する問題における運動方程式を平均曲率流方程式といい, それは次式で定義される.

$$V = -H \quad (1)$$

式 (1) を等高面方程式に書き換えると, 平均曲率流方程式は次式で与えられる.

$$u_{,t} - \Delta u + \frac{u_{,i}u_{,j}u_{,ij}}{u_{,k}u_{,k}} = 0 \quad (2)$$

ここで  $\Delta$  はラプラシアン,  $u_{,t} = \partial u / \partial t$ ,  $u_{,i} = \partial u / \partial x_i$  であり, 繰り返し指標は総和規約に従うものとする.

## 2.2 等速成長方程式

曲面  $S$  の成長速度  $V$  が一定値で与えられる問題における運動方程式を等速成長方程式という.  $S$  が速度 1

で収縮する場合の等速成長方程式は次式で与えられる.

$$u_{,t} + |\text{grad}u| = 0 \quad (3)$$

### 2.3 基礎方程式

移動境界  $S$  の運動は, 式(2) や(3) を支配方程式とし,  $S$  を含む領域で定義されたスカラー関数  $u$  の以下に示す初期値・境界値問題で与えられる.

$$\begin{aligned} \text{支配方程式:} & \quad \text{式(2) 又は (3)} \\ \text{境界条件:} & \quad u(\mathbf{x}, t) = -c \quad (\text{on } \Gamma) \quad (4) \\ \text{初期条件:} & \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad (\text{in } \Omega) \quad (5) \end{aligned}$$

ここで,  $\Omega$  は  $S$  を含む有界な領域,  $\Gamma$  はその境界,  $c$  はある正の定数である. また,  $u_0$  は  $S_0 := S(0)$  をゼロ等高面に持つ関数である. なお,  $S(t)$  は  $u_0$  のとり方によらず,  $S_0$  のみによって一意に決まることが保証されている<sup>1)</sup>.

## 3. AEM による求解方程式の構成

### 3.1 積分表現式

定式過程を簡単にするため, 未知量を  $u$  から次式で定義される  $v$  に変更する.

$$v := u + c \quad (6)$$

ここでは支配方程式として平均曲率流方程式を例に考える.  $v$  についての基礎方程式は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} v_{,t} - \Delta v + \frac{v_{,i}v_{,j}v_{,ij}}{v_{,k}v_{,k}} &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ v &= 0 \quad (\text{on } \Gamma), \\ v &= u_0 + c \quad (\text{in } \Omega \text{ at } t = 0) \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)の支配方程式は2階の偏導関数を主要部に持つが, その中(左辺第3項)に非線形項を含む. 当該問題の解析手法としてAEMを適用する.

解  $v$  のラプラシアンを  $b$  と定義し, 次の境界値問題を考える.

$$\begin{aligned} \Delta v &= b \quad (\text{in } \Omega), \\ v &= 0 \quad (\text{on } \Gamma) \end{aligned} \quad (8)$$

各時刻において, 式(8)の解  $v$  は次の積分表現式により与えられる.

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= - \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})v(\mathbf{y}, t) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y}, t) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &- \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})b(\mathbf{y}, t) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで  $u^*, q^*$  は基本解,  $q$  は流束である.

### 3.2 体分布多重調和関数を用いた MRM

式(9)の領域積分項の処理にMRMを適用する. まず, 次のように基本解  $u_n^*$  を定義する.

$$\Delta u_1^* = -\delta, \quad \Delta u_{n+1}^* = u_n^* \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

ここで,  $u_1^* = u^*$ ,  $\delta$  は Dirac のデルタ関数である.

式(10)の表記法を用いると, 式(9)は次式のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= \int_{\Gamma} [u_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y}, t) - q_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})v(\mathbf{y}, t)] d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &- \int_{\Omega} \Delta u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})b(\mathbf{y}, t) d\Omega_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで,  $q_1^* := q^*$  である.

Fig.2 に示すように基本解  $u_n^*$  を半径  $A$  の球の領域  $V_A$  内に一様に分布させた, 次式で定義される体分布多重調和関数  $u_{nA}^*$  を導入する<sup>5)</sup>.

$$u_{nA}^* = \int_{V_A} u_n^* dV \quad (12)$$

三次元問題においては, 体分布  $n$  重調和関数  $u_{nA}^*$  を用いることで, 基本解  $u_n^*$  を用いたMRMにより作成した等高面よりさらに滑らかな曲面を得ることが期待できる<sup>5)</sup>.

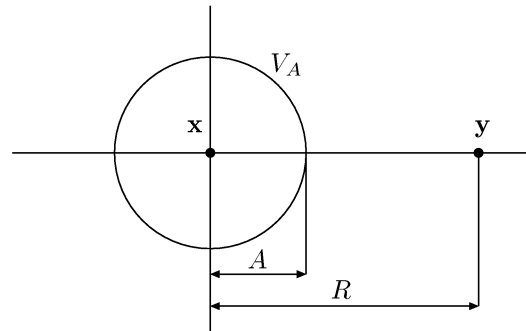


Fig.2 Polyharmonic function with volume distribution in  $V_A$ .

なお, 体分布多重調和関数  $u_{nA}^*$  も  $u_n^*$  と同様に次の関係を有する.

$$\Delta u_{1A}^* = -D_A, \quad \Delta u_{(n+1)A}^* = u_{nA}^* \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

ここで,  $D_A$  は球  $V_A$  内で1, その外部で0となる関数である.

### 3.3 AEM による諸方程式の構成

$b$  を体分布2重調和関数  $u_{2A}^*$  を用い次のように近似する.

$$b(\mathbf{y}, t) \simeq \sum_{j=1}^M \alpha_j(t)u_{2A}^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y}) \quad (\tilde{\mathbf{x}}_j \in \Omega) \quad (14)$$

ここで  $\alpha_j$  は時刻  $t$  の関数、 $\tilde{x}_j$  は  $\Omega$  内にとった  $M$  個の点である。

式(14)を(11)の体積積分項に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b(\mathbf{y}, t) d\Omega_{\mathbf{y}} \\ & \simeq \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \int_{\Omega} \Delta u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)右辺に部分積分を4回適用して次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \\ & = \int_{\Gamma} [q_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) - u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y})] d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Gamma} [q_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) - u_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y})] d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega} u_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (16)$$

$\Delta u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) = -D(\mathbf{y} - \tilde{x}_j)$  より、式(16)の右辺の最後の領域積分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} & = - \int_{V_A} u_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV \\ & = -u_{3A}^*(\mathbf{x}, \tilde{x}_j) \end{aligned} \quad (17)$$

式(15)～(17)を(11)に代入して次の積分表現式を得る。

$$\begin{aligned} & v(\mathbf{x}, t) \\ & = \int_{\Gamma} [u_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}, t) - q_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}, t)] d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ & - \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \left[ \int_{\Gamma} \{q_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) \right. \\ & - u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) + q_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) \\ & \left. - u_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y})\} d\Gamma_{\mathbf{y}} - u_{3A}^*(\mathbf{x}, \tilde{x}_j) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_i$  (on  $\Gamma$ ) の極限移行をとると次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & cv(\mathbf{x}_i, t) \\ & = \int_{\Gamma} [u_1^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}, t) - q_1^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}, t)] d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ & - \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \left[ \int_{\Gamma} \{q_2^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) \right. \\ & - u_2^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) q_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) + q_3^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) \\ & \left. - u_3^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) q_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y})\} d\Gamma_{\mathbf{y}} - u_{3A}^*(\mathbf{x}_i, \tilde{x}_j) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)より以下の境界要素方程式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{q} - \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{H}, \mathbf{G}$  は式(19)の左辺、および右辺第1項より得られるもので、通常の境界要素方程式の係数行列である。また、 $M_{ij}$  は以下で定義される行列成分である。

$$\begin{aligned} & M_{ij} \\ & = \int_{\Gamma} [q_2^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) - u_2^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) q_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) \\ & + q_3^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) - u_3^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) q_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y})] d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ & - u_{3A}^*(\mathbf{x}_i, \tilde{x}_j) \end{aligned} \quad (21)$$

なお、 $\mathbf{v}, \mathbf{q}$  は  $\Gamma$  上の  $N$  個の節点における  $v, q$  より成るベクトルである。また、 $\mathbf{M}$  は  $N \times M$  の行列で与えられる。

式(8)より  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  であるので、 $\mathbf{q}$  は  $\boldsymbol{\alpha}$  を用いて次式で与えられる。

$$\mathbf{q} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \quad (22)$$

$\Omega$  内にとった  $M$  個の点  $\tilde{x}_i, (i = 1, \dots, M)$  における  $v$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & v(\tilde{x}_i, t) \\ & = \int_{\Gamma} u_1^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}, t) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ & - \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \left[ \int_{\Gamma} \{q_2^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) \right. \\ & - u_2^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) q_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) + q_3^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) \\ & \left. - u_3^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) q_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y})\} d\Gamma_{\mathbf{y}} - u_{3A}^*(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

式(22), (23)より、 $v(\tilde{x}_i, t)$  の値からなるベクトル  $\tilde{\mathbf{v}}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} & = \mathbf{W}\boldsymbol{\alpha}, \\ \mathbf{W} & = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M} - \tilde{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{M}}$  の成分は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij} & = \int_{\Gamma_j} u_1^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}}, \\ \tilde{M}_{ij} & = \int_{\Gamma} [q_2^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) - u_2^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) q_{2A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) \\ & + q_3^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) u_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y}) - u_3^*(\tilde{x}_i, \mathbf{y}) q_{1A}^*(\tilde{x}_j, \mathbf{y})] d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ & - u_{3A}^*(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \end{aligned} \quad (25)$$

同様に  $\tilde{v}$  の導関数  $\tilde{v}_{,i}, \tilde{v}_{,ij}$  より成るベクトル  $\tilde{\mathbf{v}}_{,i}, \tilde{\mathbf{v}}_{,ij}$  も次式のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_{,i} & = \mathbf{W}_{,i}\boldsymbol{\alpha}, \\ \mathbf{W}_{,i} & = \tilde{\mathbf{G}}_{,i}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M} - \tilde{\mathbf{M}}_{,i} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_{,ij} & = \mathbf{W}_{,ij}\boldsymbol{\alpha}, \\ \mathbf{W}_{,ij} & = \tilde{\mathbf{G}}_{,ij}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M} - \tilde{\mathbf{M}}_{,ij} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{H}}_i, \tilde{\mathbf{G}}_i, \tilde{\mathbf{M}}_i$  の成分  $\tilde{H}_{i\alpha\beta}, \tilde{G}_{i\alpha\beta}, \tilde{M}_{i\alpha\beta}$  は次式で与えられ、 $\tilde{\mathbf{H}}_{ij}, \tilde{\mathbf{G}}_{ij}, \tilde{\mathbf{M}}_{ij}$  の成分も同様の定義により与えられる。

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{i\alpha\beta} &= \int_{\Gamma_\beta} \frac{\partial}{\partial x_i} u_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_y |_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}_\alpha}, \\ \tilde{M}_{i\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \int_{\Gamma} [q_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{2A}^*(\tilde{\mathbf{x}}_\beta, \mathbf{y}) \right. \\ &\quad - u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q_{2A}^*(\tilde{\mathbf{x}}_\beta, \mathbf{y}) + q_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{1A}^*(\tilde{\mathbf{x}}_\beta, \mathbf{y}) \\ &\quad - u_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q_{1A}^*(\tilde{\mathbf{x}}_\beta, \mathbf{y})] d\Gamma_y \\ &\quad \left. - u_{3A}^*(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_\beta) \right\} |_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}_\alpha}\end{aligned}\quad (28)$$

式(24), (26), (27) を(7) 第一式に代入し、時間増分  $\Delta t$  の下、 $d\alpha/dt$  を  $(\alpha^{n+1} - \alpha^n)/\Delta t$  で近似して時間積分に Euler スキームを適用すると、最終的に第  $n+1$  ステップの解  $\alpha^{n+1}$  を与える次式を得る。

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} &= \alpha^n + \Delta t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g}^n, \\ g_\beta^n &= W_{ii\beta\gamma} \alpha_\gamma^n - \frac{W_{i\beta\gamma} \alpha_\gamma^n W_{j\beta\delta} \alpha_\delta^n W_{ij\beta\epsilon} \alpha_\epsilon^n}{W_{,k\beta\gamma} \alpha_\gamma^n W_{,k\beta\delta} \alpha_\delta^n + a^2}\end{aligned}\quad (29)$$

なお、上式は  $\beta$  について和をとらないものとする。

式(3) の等速成長方程式の場合も、曲線短縮方程式の場合と同様に展開すると最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} &= \alpha^n + \Delta t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g}^n, \\ g_\beta^n &= \sqrt{W_{i\beta\gamma} \alpha_\gamma^n W_{,i\beta\gamma} \alpha_\gamma^n} + a^2 W_{ii\beta\gamma} \alpha_\gamma^n\end{aligned}\quad (30)$$

なお、式(29), (30) の  $g_\beta^n$  における  $a$  は  $\text{grad}u = 0$  となる特異点近傍における解の挙動を安定化させるために導入したパラメータである<sup>7)</sup>。

また、 $\alpha$  の初期値  $\alpha^0$  は式(7),(24) より次式で与えることができる。

$$\alpha^0 = \mathbf{W}^{-1} \{ \tilde{\mathbf{u}}_0 + c \mathbf{I} \}\quad (31)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{u}}_0$  は  $\Omega$  内にとった  $M$  個の点における  $u_0$  の値から成るベクトル、 $\mathbf{I}$  は恒等行列である。

式(29)において  $\mathbf{W}, \mathbf{W}_{,i}, \mathbf{W}_{,ij}$  は未知量  $\alpha$  を含まないので定数行列である。また、それらの作成には境界積分だけが必要となる。

## 4. 解析例

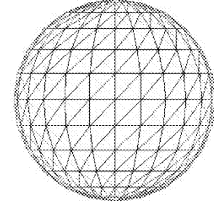
### 4.1 $S_0$ が球により与えられている場合

初期条件を次式で与え、 $S_0$  を半径 1 の球とした問題に本手法を適用する。

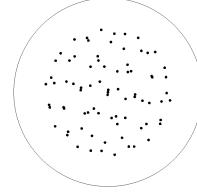
$$u_0 = 1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}\quad (32)$$

なお、 $c = 1$  とし半径 2 の球を  $\Gamma$  にとる。離散化に当り、 $\Gamma$  を 528 個の三角形一定要素で分割し、領域内に 79 個の内点をおいた。境界要素分割と内点の配置の様子を **fig.3** に示す。

$a^2$  の値を平均曲率流方程式では 0、等速成長方程式では 0.05 とし、体分布の半径  $A$  は一番近い点までの距



Boundary elements



Internal points

**Fig.3** Discretization with 528 boundary elements and 79 internal points

離の 1/2 とし、 $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  の下で平均曲率流方程式 (Case 1) と等速成長方程式 (Case 2) に対する解析を実行した。各ケースに対する結果をそれぞれ **Figs.4,5** に示す。なお、図には理論解も合わせて点線で示した。Case 1 では、曲面の消滅まで精度よく解析を行うことができた。一方、Case 2 では初期の段階では理論解より多少速く収縮する傾向がある。また、 $a^2 = 0$  として解析を行った場合では、 $\text{grad}u = 0$  となる球の中心部が特異点となり、消滅まで解析をすることはできない。しかし、本解析では  $a^2 = 0.05$  とすることにより、理論解より多少速く収縮が進行しているが、曲面の消滅まで安定に解析を進めることができた。なお、Case 2 での上述の傾向は、二次元問題でも認められており<sup>6)</sup>、安定化パラメータ  $a$  の導入に起因するものであると思われる。

次に、境界要素数  $N$  と  $A$  の値とが精度に及ぼす影響について検討する。Case1 において  $N = 120, 224, 528$  とし、 $A$  の値を一番近い点までの距離の  $d$  倍とし、 $d = 0.1, 0.5, 1.0$  について調べた結果、及び領域積分項を近似する関数として、文献 6) と同様に基本解 (F.S.)  $u_2^*$  を用いた結果を合わせ **Fig.6** に示す。なお、**Fig.6** はゼロ等高面の半径  $R(t)$  の変化を示しており、理論解を点線で示した。図より、 $N = 528$  においては、 $d = 1.0$  以外で良好な結果が得られており、境界要素数を十分多くとれば良好な結果が得られることがわかる。また、いずれの  $N$  でも  $d = 1.0$  とした場合には解の精度が低下していることより、良好な精度の解を得るためには  $d < 1.0$  とする必要があることが確認できる。また、いずれの  $N$  でも  $d < 1.0$  に対しては、近似関数として基本解を用いた場合と比べ精度の良い解が得られており、体分布調和関数の適用が有効であることがわかる。なお、境界要素数を一定とし、内点数を変えて解析を行った場合では、各々の解析結果に大きな差異が認められなかった。

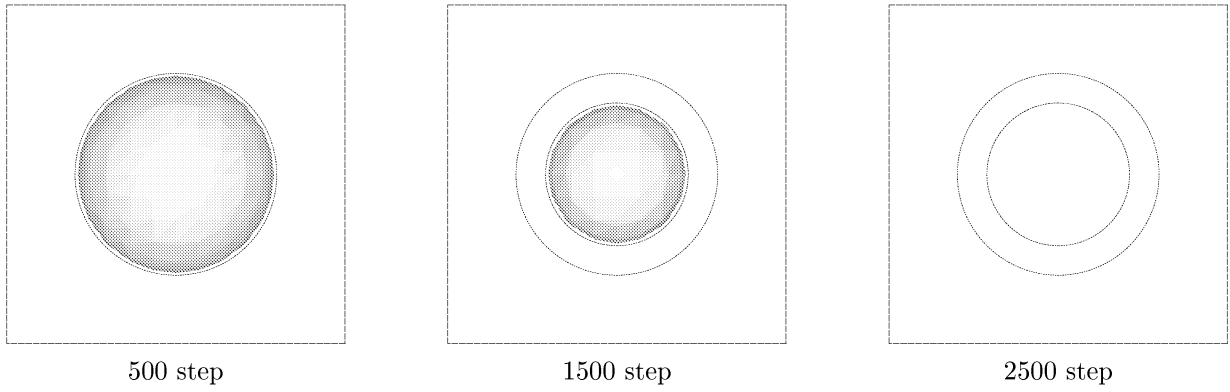


Fig.4 Motion of boundary (Case1)

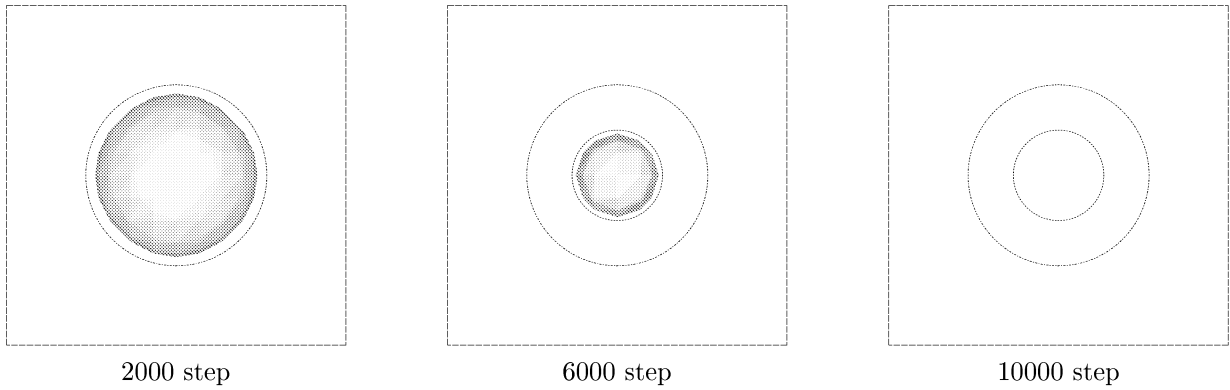


Fig.5 Motion of boundary (Case2)

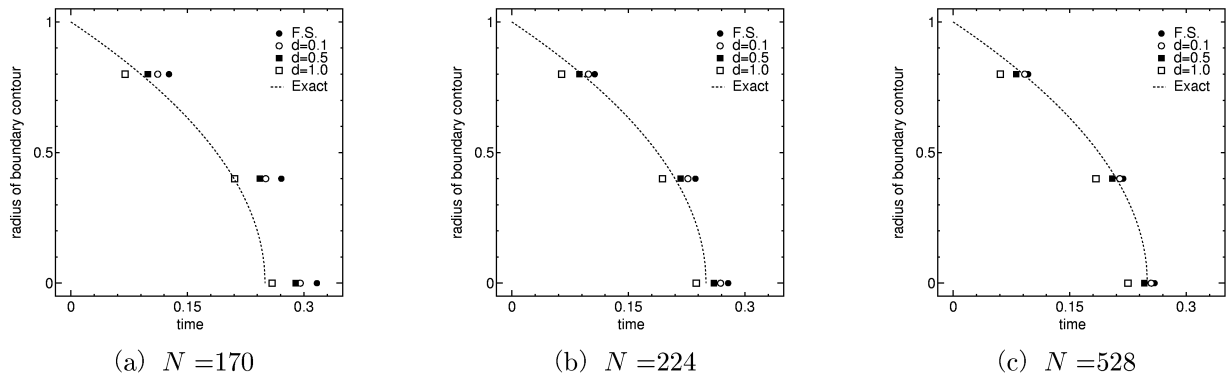


Fig.6 Influence of  $M$  and  $m$  on the accuracy

#### 4.2 $S_0$ が Cassini の楕形の回転体で与えられている場合

初期条件を次の Cassini の楕形の回転形で与える.

$$\begin{aligned}
 u_0 &= -[r^4 - 8r^2 \cos 2\theta + 16]^{1/4} + 2.1, \\
 r &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, \\
 \cos \theta &= \frac{x_1}{r}
 \end{aligned} \tag{33}$$

本解析では,  $c=0.73$ ,  $N=528$ ,  $a^2$  の値は平均曲率

流方程式では 0, 等速成長方程式では 0.05 とし, 内点数を 63,  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  としている. 離散化の様子を Fig.7 に示す. 平均曲率流方程式 (Case 1) と等速成長方程式 (Case 2) に対する解析結果をそれぞれ Figs.8,9 に示す. 二次元問題では, 平均曲率流方程式 (曲線短縮方程式) の解は分裂せずに, そのまま収縮して消滅するが, 三次元問題では, 平均曲率流方程式, 等速成長方程式共にゼロ等高面は二つに分裂し, その後消滅することとなる. Figs.8,9 より, 本手法によってこれ

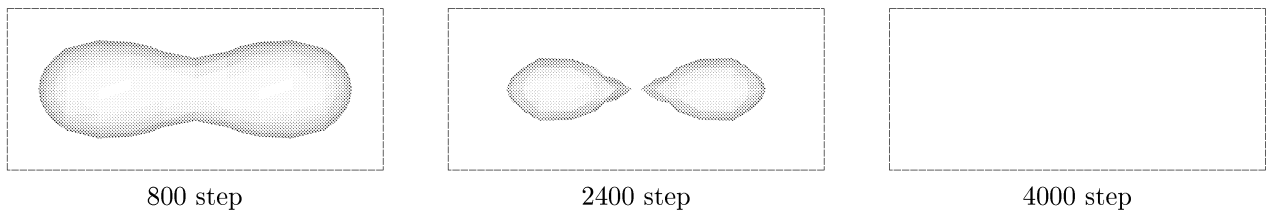


Fig.8 Motion of boundary (Case1)

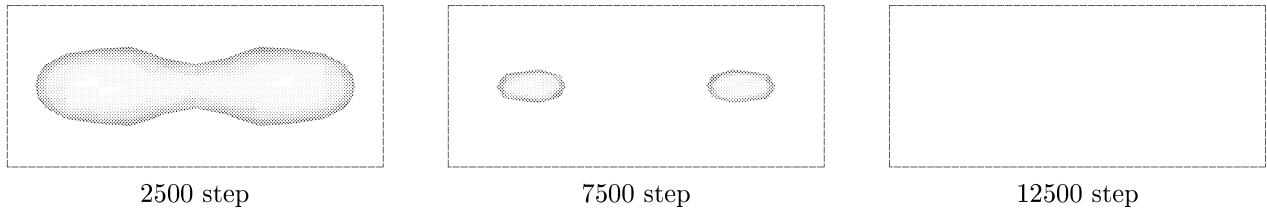
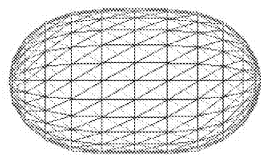
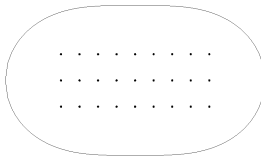


Fig.9 Motion of boundary (Case2)



Boundary elements



Internal points

Fig.7 Discretization with 528 boundary elements and 63 internal points

らの過程が定性的に適切に解析されていることが確認できる。

## 5. おわりに

以前に著者らが構成した，等高面の方法に基づく二次元移動境界問題の境界要素解析手法を，三次元問題に拡張した。その際，非線形項に関する領域積分は，体分布多重調和関数を用いた多重相反法により処理した。三次元移動境界問題として，平均曲率方程式と等速成長方程式を対象に構成した手法を適用した。具体的

解析例を通し検討を行なった結果，本手法により境界面の分裂や消滅が適切に解析可能であることがわかった。また，十分に多くの境界要素をとり，体分布の半径  $A$  の値を，一番近い点までの距離よりも小さくとることにより，概ね良好な結果が得られることがわかった。また，上述のように  $A$  の値を適切に設定すれば，近似関数に基本解を用いた場合に比べ，より良好な精度の解が得られることがわかった。

**謝辞**：本研究の実施に当り，近畿大学・落合芳博先生からは，資料提供など，貴重な情報をいただいた。ここに記して謝意を表する。

## 参考文献

- 1) 儀我美一，陳 蘊剛：動く曲面を追いかけて，日本評論社，1996.
- 2) 阿部和久，岩成洋平：等高面の方法による移動境界問題の境界要素解析，BTEC 論文集，Vol.10, 37-42, 2000.
- 3) Pertridge, P.W. : Radial basis approximation functions in the boundary element dual reciprocity method, Boundary Element Technology XIII, Chen, C.S., Brebbia, C.A. and Pepper, D.W. eds., WIT Press, 325-334, 1999.
- 4) Katsikadelis, J.T. and Nerantzaki, M.S. : The boundary element method for nonlinear problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **23**, 365-373, 1999.
- 5) 落合芳博，境界積分方程式を用いた立体形状モデリング，機論，**64**-619, C (1998), 1085-1090.
- 6) 阿部和久，岩成洋平：薄板スプラインを用いた多重相反法の AEM による等高面解析への適用，境界要素法論文集，Vol.17, 1-6, 2000.
- 7) Evans, L.C. and Spruck, J. : Motion of level sets by mean curvature. I, *J. Diff. Geom.*, **33**, 635-681, 1991.