

# 直接ブロック帯行列化アルゴリズムによる 浅海波力の境界要素解析

## BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS FOR SHALLOW-WATER WAVE FORCES ON OFFSHORE STRUCTURES BY A BLOCK-BANDED ALGORITHM

瀬戸 秀幸

Hideyuki SETO

防衛大学校システム工学群機械システム工学科

(〒239 横須賀市走水 1-10-20, E-mail: seto@nda.ac.jp)

This paper presents an alternative boundary element formulation for shallow-water wave forces on offshore structures. A block-banded coefficient matrix is directly derived and manipulated based on a degenerate Green function expression, constant boundary elements, hierarchical block-element subdivision and classification of real boundaries without resort to domain decomposition approach. Test calculations offer promising results. Its extension to other fields is straightforward.

**Key Words:** Wave Forces, Block-Banded Algorithm, Boundary Element Method.

### 1. はじめに

長さ数 km の複雑な超大型浮体(VLFS)に働く浅海波力の計算は、固有関数展開併用の領域分割型有限・無限要素法<sup>1)</sup>等の開発により、メガフロートPJに則して実用に供されつつある。一方、境界要素法(BEM)の適用は、非対称で密な係数行列を持つ連立方程式に帰着させる従来法の場合、反復法ベースの高速計算法が種々提案されつつあるとはいえ、大規模化に伴うネックは依然大きい。

本報ではそれに代わるものとして、ブロック帯行列化による直接法ベースの大規模・高速計算法、いわばFEMよりのBEMについて論じる。すなわち、低次のBEMをベースに、「境界ブロック分割」とGreen関数の分離核表示を介して、従前の「領域分割」法によらず、ブロック帯行列を直接導く定式化<sup>2)</sup>の新たな展開を示し、併せて当該方程式に対する2段階直列計算法<sup>3)</sup>の適用も図る。特に、比較的簡単な浅海波力の問題につき基本的なアプローチを明らかにするとともにその例証を試みる。

本定式化は波動以外の分野へもほぼ同様に応用できる。

### 2. 基礎理論

箱型(ポンツーン)または多脚柱型の超大型浮体が入射波中で弾性応答しているときの水波問題を考える。座標系は、静水面上にx軸、y軸、鉛直上向きにz軸の右手系、時間項は $e^{i\omega t}$ を採用する(Fig. 1)。ポテンシャル流場を仮定すれば、入射波ポテンシャルはつぎの形に表わされる。

$$\phi^w(x, y, z) = i \frac{g \zeta_a}{\omega} \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} e^{i\kappa_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (1)$$

ここに、 $h$ は一定水深、 $\zeta_a$ は波振幅、 $\beta$ は波入射角、 $\omega$ は波の円振動数、 $g$ は重力加速度、 $i$ は虚数単位、 $\kappa_0$ はつぎの分散方程式の唯一の正実根で、浅海波数を表わす。

$$\kappa \tanh \kappa h = \omega^2 / g \equiv K \quad (2)$$

さらに、式(2)には純虚根 $i\kappa_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots$ )も存在する。簡単のため各根(固有値)に対応する固有関数を

$$Z_0(z) \equiv \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h}, \quad Z_\alpha(z) \equiv \frac{\cos \kappa_\alpha(z+h)}{\cos \kappa_\alpha h}, \quad (\alpha \geq 1) \quad (3)$$

と定義すると、 $\alpha \geq 0$ に対してつぎの直交性が成り立つ。

$$\int_{-h}^0 \{Z_\alpha(z)\}^2 dz = q_\alpha, \quad \int_{-h}^0 Z_\alpha(z) Z_\gamma(z) dz = 0, \quad (\alpha \neq \gamma) \quad (4)$$

今、入射波を除く水波のポテンシャルを $\phi$ とすると、

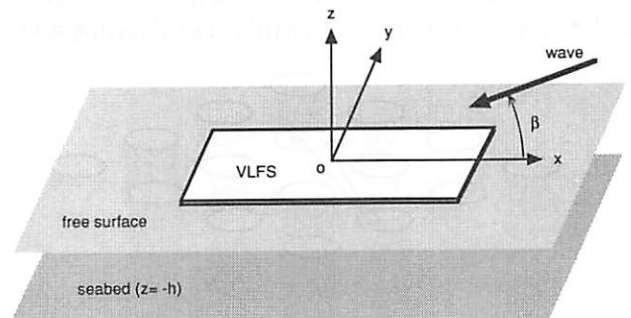


Fig. 1 Coordinate system and pontoon-type VLFS

$\phi$  はつぎの形式の境界値問題を満たさねばならない。

$$\begin{aligned} \phi_{,xx} + \phi_{,yy} + \phi_{,zz} &= 0 && \text{流体中で} \\ \phi_{,z} - K\phi &= 0 && \text{水面 } z=0 \text{ 上で} \\ \phi_{,v} &= v_{,v} && \text{浮体表面上 } S \text{ で} \\ \phi_{,z} &= 0 && \text{一定水深 } z=-h \text{ 上で} \end{aligned} \quad (5)$$

$\phi$  は無限遠で外向き進行波の挙動をする。

ここに、 $v$  は浮体表面  $S$  上の流体に外向きの単位法線、下添字「 $_{,v}$ 」は  $v$  による偏微分、 $v_{,v}$  は  $S$  上の流速の法線成分で、平水中の強制加振に当たる radiation 問題では弾性モードに対応する既知の速度を、拘束浮体での入射波の回折・散乱に当たる diffraction 問題では  $-\phi^W_{,v}$  を表わす。

このとき、対応する水波の積分関係式は

$$C(P)\phi(P) + \iint_S \phi(Q)G_{,v}(P,Q)dS_Q = \iint_S v_{,v}(Q)G(P,Q)dS_Q \quad (6)$$

となる。ただし、 $Q$  は  $S$  上の特異点  $(\xi, \eta, \zeta)$ 、 $P$  は流体中または  $S$  上の観測点  $(x, y, z)$ 、 $C(P)$  は以下の値をとる。

$C(P) = 4\pi(P: \text{流体中}), = 2\pi(P: S \text{ 上}), = 0(P: \text{その他})$  また  $G(P, Q)$  には特異点近傍で有効な主値積分表示とそれ以外で有効なつぎの固有関数展開表示が併用される。

$$\begin{aligned} G(P, Q) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} (2/q_{\alpha}) Z_{\alpha}(\zeta) Z_{\alpha}(z) K_0(\kappa_{\alpha} R_{PQ}) \\ &\quad - i(\pi/q_0) Z_0(\zeta) Z_0(z) H_0^{(2)}(\kappa_0 R_{PQ}) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、

$$R_{PQ} = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}, \quad r_{PQ} = [R^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2} \quad (8)$$

境界要素方程式は、通常、観測点  $P$  を浮体表面  $S$  上に取った上記の積分方程式(6)において、 $S$  のパネル (境界要素) 分割と未知量の離散化を通して導かれてきた。しかし、 $R_{PQ}$  (または  $r_{PQ}$ ) を含む表示に沿う離散化では、影響係数行列は不可避的に密行列に帰着され、それ故、超大型浮体実機で想定される  $O(10^3) \sim O(10^5)$  自由度規模

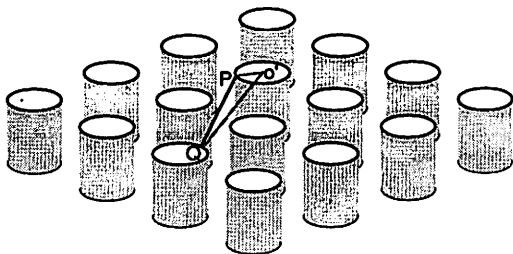


Fig. 2 Multi-column-type VLFS

の計算への適用はそのままでは実用上難しい場合が多い。

その改善のため、近年、反復法ベースの高速計算法が種々検討されている。しかし、実機の複雑形状に対する収束性への一抹の懸念もあって、本研究では直接法に基づく新たなアプローチを試みる。すなわち、ポンツーン型浮体と並ぶ超大型浮体の形式である多列円柱型浮体 (Fig. 2) では、要素浮体が単独である場合の radiation と diffraction 問題の流体力と遠場の波動特性を  $O(10^1) \sim O(10^2)$  の境界要素法計算等によりまず求め、多数本の要素浮体の相互干渉影響は遠場の波動の多重散乱特性を利用する 2 段階のアルゴリズム (広義に「多重散乱法」と呼ぶ) が活用<sup>4, 5)</sup> され、要素浮体の増加に伴う計算量の急増の抑制が可能となっており、既に  $O(10^4)$ <sup>6)</sup> 規模の計算実績が報告されている。そこで本研究では、理論面に不備のあったポンツーン型連続浮体に対する多重散乱法に整合的な定式化を与え、多列柱体と併せて統合的な適用ができる形に拡張して取り込み、境界要素法の新たな定式化を導くことにより、大規模・高速計算のための一つの筋道を提案する。

### 3. ヘルムホルツ方程式への応用

理論展開のポイントの把握を容易にするため、表示が煩雑になり過ぎない 2 次元ヘルムホルツ波動場をまず取りあげる。これは超大型物体が着底している柱状体である場合の周囲の水波問題に対応する。

速度ポテンシャルを  $\phi = \varphi(x, y)Z_0(z)$  と仮定すると、 $\varphi(x, y)$  はつぎのヘルムホルツ方程式を満たす必要がある。

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} + \kappa_0^2 \varphi = 0 \quad \text{流体中で} \quad (9)$$

このとき、対応する積分方程式は境界上の点  $P$  において、

$$\pi\varphi(P) + \int_S \varphi(Q)\Gamma_{,v}(P,Q)ds_Q = \int_S v_{,v}(Q)\Gamma(P,Q)ds_Q \quad (10)$$

の形となる、 $\Gamma(P, Q)$  はつぎの形の Green 関数である。

$$\Gamma(P, Q) = -i(\pi/2)H_0^{(2)}(\kappa_0 R_{PQ}) \quad (11)$$

今、Fig. 2 のような合同な  $N$  個の柱体の列 ( $k=1, \dots, N$ ) を考え、観測点  $P$  を含む柱体に当該ブロックフラグ  $\hat{O}$  を付し、その中心点を  $o'$  とする。当該柱体に外接する仮想円筒を考え、それと抵触する柱体には近接ブロックフラグ  $\hat{N}$ 、それ以外の柱体には遠隔ブロックフラグ  $\hat{F}$  を付すことにする。当然ながら、多列円柱は  $\hat{F}$  のみで  $\hat{N}$  はないが、一般の多列柱では間隔が詰まると  $\hat{N}$  も生じる。その場合は連続浮体と併せて論じることとし、ここでは円柱列の場合と同様  $\hat{N}$  がなく、特異点  $Q$  が  $\hat{O}$  内にくる場合以外は  $R_{o'P} < R_{o'Q}$  が恒に成り立つ場合を考えよう。ただし、線分  $o'P$ 、 $o'Q$  の間の距離を  $R_{o'P}$ 、 $R_{o'Q}$ 、それらが  $x$  軸となす角を  $\theta_{o'P}$ 、 $\theta_{o'Q}$ 、両線分のなす角を  $\theta_{P'o'Q}$  としておく。

今, Fig. 2 の配置に対して, ハンケル関数の加法定理

$$H_0^{(2)}(\kappa_0 R_{PQ}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_l^{(2)}(\kappa_0 R_{o'Q}) J_l(\kappa_0 R_{o'P}) \cos l\theta_{P'o'Q}$$

$$\theta_{P'o'Q} = \theta_{o'Q} - \theta_{o'P}, \quad R_{o'P} < R_{o'Q}$$

を用い, 式(11)に代入すれば, 当該ブロック中心  $o'$  に関するつぎの分離核表示が得られる.

$$\begin{aligned} \Gamma(P, Q) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Gamma_{>}^{(\lambda)}(\kappa_0 R_{o'Q}) \Gamma_{<}^{(\lambda)}(\kappa_0 R_{o'P}) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Gamma_{>}^{(\lambda)}(Q) \Gamma_{<}^{(\lambda)}(P) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{>}^{(2l)} \\ \Gamma_{>}^{(2l+1)} \end{array} \right\} = -i \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^c \\ \mathbf{H}_0^b \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{<}^{(2l)} \\ \Gamma_{<}^{(2l+1)} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} J_l(\kappa_0 R_{o'P}) \cos l\theta_{o'P} \\ J_l(\kappa_0 R_{o'P}) \sin l\theta_{o'P} \end{bmatrix} \quad (l \geq 0) \quad (13)$$

$\mathbf{H}_0^c, \mathbf{H}_0^b$  :  $H_l^{(2)}(\kappa_0 R_{o'Q}), \cos l\theta_{o'Q}, \sin l\theta_{o'Q}$  の関数.

式(12)を式(10)に代入すると, 2つに分離された当該ブロックに関する積分方程式表示が導かれる.

$$\begin{aligned} \pi\varphi(P) + \int_{s_1 \in \partial} \varphi(Q) \Gamma_{>,v}(P, Q) ds_Q + \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_k^{(\lambda)} \Gamma_{<}^{(\lambda)}(P) \\ = \sum_{k=1}^N \int_{s_k} v_v(Q) \Gamma(P, Q) ds_Q \end{aligned} \quad (14)$$

$$c_k^{(\lambda)} = \sum_{k \in \bar{P}} \int_{s_k} \varphi(Q) \Gamma_{>,v}^{(\lambda)}(Q) ds_Q \quad (15)$$

式(14), (15)は式(10)を書き換えたただけであり, 数学的に等価であることは自明であるが, 数値計算面からは決定的な優劣が生ずる.

今, 一定要素の境界要素法を適用した場合を考えよう. 全部の柱体(ブロック)について以上の処理を実施し, 未知量の数に対応する離散化方程式を作ると式(14), (15)はつぎのブロック帯行列表示に帰着できる.

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & & & & & \\ & [A_{22}] & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & [A_{NN}] & & \\ [0] & [F_{12}^{(d)}] & \dots & [F_{1N}^{(d)}] & [I_{11}] & \\ [F_{21}^{(d)}] & [0] & \dots & \dots & [I_{22}] & \\ \vdots & \vdots & \ddots & [F_{N-1N}^{(d)}] & \dots & \\ [F_{N1}^{(d)}] & \dots & [F_{N,N-1}^{(d)}] & [0] & \dots & [I_{Ll}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_1^{(d)}] \\ [B_2^{(d)}] \\ \vdots \\ [B_L^{(d)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varphi_1\} \\ \{\varphi_2\} \\ \vdots \\ \{\varphi_N\} \\ \{c_1^{(d)}\} \\ \{c_2^{(d)}\} \\ \vdots \\ \{c_L^{(d)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{v_{v1}\} \\ \{v_{v2}\} \\ \vdots \\ \{v_{vN}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{0_N\} \end{bmatrix} \quad (16a)$$

または,

$$\begin{bmatrix} [A^{(d)}] & [B^{(d)}] \\ [F^{(d)}] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varphi\} \\ \{c^{(d)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{v\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (16b)$$

各ブロックのパネル数を  $M_k$ , その周りの級数展開係数

$c_k^{(\lambda)}$  の打ち切り項数を  $L_k$ , 各々の総和を  $M = \sum_{k=1}^N M_k$ ,  $L = \sum_{k=1}^N L_k$  とすると, 連立方程式は  $(M+L)$  元に拡張されているが, 実用上は  $L \ll M$  で十分なため, 未知量の増加は微増といつてよい. 一方, 係数行列としては  $(M+L) [= M]$  元のブロック対角行列が得られたわけで, 数値計算特性の大幅改善が期待できる. 特に, 近接ブロック  $\hat{N}$  が生じないこのケースでは, 主要部の  $M \times M$  行列  $[A^{(d)}]$  がブロック対角となり, 極めて有利となる. なお, 新規に導入した係数  $\{c^{(d)}\}$  を逆に式(16b)より消去して  $\{\varphi\}$  のみの  $M$  元の方程式に戻すと, その係数行列は

$$[A^{(f)}] = [A^{(d)}] - [F^{(d)}][B^{(d)}]$$

となるが, これが式(10)を直接離散化して求まる密行列の影響係数行列と原理的に同一のものであることは自明である. すなわち, 新しく求めた離散化方程式は従来の離散化方程式と同等であるだけでなく, 内的に一段踏み込んだ形式になっていることがわかる. しかも式(16)はブロック対角に近く, FEM における「並列消去法」がそのまま適用できるだけでなく, 大規模になっても計算量の負担を抑制できる形式である点にメリットがある.

式(16)の計算に多重散乱法の取扱いを併用すれば, さらに一段の計算量の節約が可能である.

式(16)の第 1 式はつぎのように書くことができる.

$$[A^{(d)}]\{\varphi\} = \{v_v\} - [B^{(d)}]\{c^{(d)}\} \quad (17)$$

ここで,  $\{\varphi\}$  を素波に分解して

$$\{\varphi\} = \{\psi\}_0 - \sum_{\lambda=1}^L c_{(d)}^{(\lambda)} \{\psi\}_\lambda \quad (18)$$

とおくと,  $\{\psi\}_0, \{\psi\}_\lambda (\lambda \geq 1)$  はつぎの式より決定できる.

$$[A^{(d)}](\{\psi\}_0, \{\psi\}_1, \dots, \{\psi\}_L) = (\{v_v\}, [B^{(d)}]) \quad (19)$$

この場合,  $[A^{(d)}]$  はブロック対角行列であるため, 逆行列  $[A^{(d)}]^{-1}$  が容易に計算できて,

$$(\{\psi\}_0, \{\psi\}_1, \dots, \{\psi\}_L) = [A^{(d)}]^{-1} (\{v_v\}, [B^{(d)}]) \quad (20)$$

このとき,  $\{\psi\}_0$  は要素柱体が各々単独で存在するときの radiation ポテンシヤルに, また  $\{\psi\}_\lambda (\lambda = 1, L)$  は要素柱体が各々単独で存在する場合の第  $\lambda$  次の diffraction ポテンシヤルに相当する. これは式(16a)に基づき要素柱体毎の関係で示せば一段と明らかになる.

$$\{\varphi_k\} = \{\psi_k\}_0 - \sum_{\lambda=1}^L c_k^{(d)(\lambda)} \{\psi_k\}_\lambda, \quad (\lambda = 1, L) \quad (21)$$

$$\{\psi_k\}_0, \{\psi_k\}_1, \dots, \{\psi_k\}_L = [A_{kk}]^{-1} \{v_v, [B_k^{(d)}]\} \quad (22)$$

残る  $\{c^{(d)}\}$  は式(16b)の第2式に式(17)を代入して得られるつぎの連立方程式

$$([I] - [F^{(d)}]) \{c^{(d)}\} = -[F^{(d)}] \{\psi\}_0 \quad (23)$$

を直接法または反復法で解くことにより決定できる。この計算には、多重散乱法の数値計算上のしわ寄せが集約されることになるが、 $\{\phi\}$  と異なり  $\{c\}$  は多くの場合  $O(10^3)$  におさまるので対処可能である。

以上が本アプローチの視点からまとめ直した多重散乱法である。多列円柱の場合のように、この方法を併用できれば、従来の境界要素法におけるような柱体の増加に伴う急激な計算の大規模化は回避できることがわかる。

さらに、実構造として想定される合同な柱体が並ぶような場合には、N 回の並列消去を1回に節約できるだけでなく、複数個の柱体を1組として並列消去をすることにより、数値処理の効率化も可能である。

一方、連続物体では  $R_{o,p} > R_{o,q}$  となる点  $Q$  が  $\hat{O}$  外にも一般には存在するため、上述の形式に直ちに帰着されることはないが、Fig. 3 のような前後左右対称な箱型柱体で、形状対称性を考慮したその境界線に関する 1/4 解析に帰着できる場合は、2次元ではブロック間が点でつながり、かつ  $R_{o,p} > R_{o,q}$  となる点  $Q$  が  $\hat{O}$  以外にこないの、上述と同様な取扱いが可能となる。現実によくある連続物体が離散的な多列円柱の場合と同じブロック対角型の多重散乱法の適用が可能であるということは、実用計算が大幅に効率改善できる可能性があることを示している。

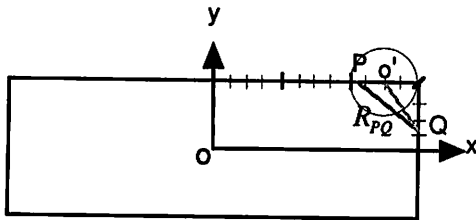


Fig. 3 Schematic Block-element subdivision of a rectangular cross-section

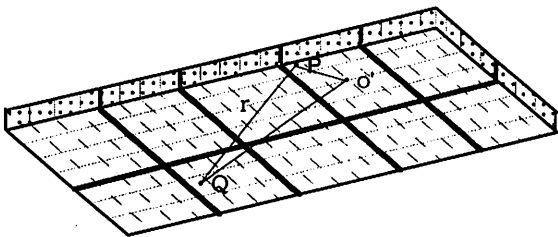


Fig. 4 Schematic Block-element subdivision of a pontoon-type VLFS

#### 4. 3次元水波問題への応用

Fig. 4 のように連続した超大型浮体の境界をブロック分割すると、観測点  $P$  を含む当該ブロック  $\hat{O}$  に隣接して複数の近接ブロック  $\hat{N}$  が存在し、その境界よりの点  $Q$  では必ずしも  $R_{o,p} < R_{o,q}$  が満足されなくなる。因みに、多列円柱の場合の優れた計算効率もあって、その前提に抵触してもそのまま多重散乱法を適用し、その結果の補正により実用上有用な値が得られるとした報告もある。<sup>5)</sup>

本研究ではその不具合の解消を試み、連続物体に対しても理論的に整合する多重散乱法を定式化した。すなわち、遠隔ブロック  $\hat{F}$  に対して  $R_{o,p} < R_{o,q}$  が恒に満足されるようなブロック分割に基づき、近接ブロックは元の形で取扱う一方、遠隔ブロック  $\hat{F}$  に対して前節と同様な処理を施すことにより、影響係数行列のブロックバンド化を図るようにした。

特異点  $Q$  が遠隔ブロック内にくる場合、 $R_{o,p} < R_{o,q}$  であるから、変形 Bessel 関数の加法定理も併せて適用することにより、対応する Green 関数は当該ブロックの中心  $o'$  の周りにつぎの形の分離核表示ができる。

$$G(P, Q) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} G_{>}^{(\alpha, l)*}(R_{o'q}, \theta_{o'q}, \zeta) G_{<}^{(\alpha, l)*}(R_{o'p}, \theta_{o'p}, \zeta) \\ \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} G_{>}^{(\lambda)}(Q) G_{<}^{(\lambda)}(P) \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{<}^{(0, 2l)*} \\ G_{<}^{(0, 2l+1)*} \end{array} \right\} = Z_0(z) \left\{ \begin{array}{l} J_l(\kappa_0 R_{o'p}) \cos l\theta_{o'p} \\ J_l(\kappa_0 R_{o'p}) \sin l\theta_{o'p} \end{array} \right\}, \quad (l \geq 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{<}^{(\alpha, 2l)*} \\ G_{<}^{(\alpha, 2l+1)*} \end{array} \right\} = Z_{\alpha}(z) \left\{ \begin{array}{l} I_l(\kappa_0 R_{o'p}) \cos l\theta_{o'p} \\ I_l(\kappa_0 R_{o'p}) \sin l\theta_{o'p} \end{array} \right\}, \quad (\alpha \geq 1) \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{>}^{(0, 2l)*} \\ G_{>}^{(0, 2l+1)*} \end{array} \right\} = -i \frac{\pi}{q_0} Z_0(\zeta) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_0^{lc} \\ \mathbf{H}_0^{ls} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} G_{>}^{(\alpha, 2l)*} \\ G_{>}^{(\alpha, 2l+1)*} \end{array} \right\} = \frac{2}{q_{\alpha}} Z_{\alpha}(\zeta) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_0^{lc} \\ \mathbf{K}_0^{ls} \end{array} \right\}$$

$\mathbf{K}_0^{lc}, \mathbf{K}_0^{ls}$  :  $K_l(\kappa_{\alpha} R_{o'q}), \cos l\theta_{o'q}, \sin l\theta_{o'q}$  の関数。

式(24)を代入すると積分方程式(6)は、当該ブロックに関する2つの部分に分割した表示が可能となる。

$$2\pi\phi(P) + \sum_{k \in \hat{O} + \hat{N}} \iint_{S_k} \phi(Q) G_{,v}(P, Q) dS_Q + \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_k^{(\lambda)} G_{<}^{(\lambda)}(P) \\ = \sum_{k=1}^N \iint_{S_k} v_v(Q) G(P, Q) dS_Q \quad (26)$$

$$c_k^{(\lambda)} = \sum_{k \in \hat{F}} \iint_{S_k} \phi(Q) G_{>,v}^{(\lambda)}(Q) dS_Q \quad (27)$$

前節同様に、一定要素の境界要素法を適用した場合、全ブロックについて以上の処理を実施すれば、未知量の数に対応するつぎの形の離散化方程式を導出できる。

$$[A^{(b)}]\{\phi\} + [B^{(b)}]\{c\} = \{v_v\} \quad (28)$$

$$[F]\{\phi\} + [I]\{c\} = \{0\} \quad (29)$$

具体的には,

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & & & & & & \\ [A_{21}] & [A_{22}] & [A_{23}] & & & & & \\ & [A_{32}] & [A_{33}] & [A_{34}] & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & [A_{N-1N}] & & \\ & & & & & [A_{NN}] & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_1\} \\ \{\phi_2\} \\ \{\phi_3\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\phi_N\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_{11}] & & & & & & & \\ & [B_{22}] & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & [B_{NL}] & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{c_1\} \\ \{c_2\} \\ \vdots \\ \{c_L\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{v_{v1}\} \\ \{v_{v2}\} \\ \{v_{v3}\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{v_{vN}\} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} [0_{11}] & [0_{12}] & [F_{13}] & \dots & \dots & [F_{1N}] \\ [0_{21}] & [0_{22}] & [0_{23}] & \ddots & & \vdots \\ [F_{31}] & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & [F_{L-2N}] \\ [F_{L1}] & \dots & \dots & [F_{LN-2}] & [0_{LN-1}] & [0_{LN}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_1\} \\ \{\phi_2\} \\ \{\phi_3\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\phi_N\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [I_{11}] & & & & & & & \\ & [I_{22}] & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & [I_{NN}] & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{c_1\} \\ \{c_2\} \\ \vdots \\ \{c_L\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0_1\} \\ \{0_2\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \{0_L\} \end{bmatrix} \quad (31)$$

すなわち, 各ブロックのパネル数を  $M_k$ , その周りの級数展開係数  $c_k^{(\lambda)}$  の打ち切り項数を  $L_k$ , 各々の総和を  $M = \sum_{k=1}^N M_k$ ,  $L = \sum_{k=1}^N L_k$  とすると, 実用上  $L \ll M$  であることより, 係数行列として  $(M+L) \approx M$  元 (二重) ブロックバンド行列が得られた。ただし, ブロック, 要素ともユニット分割と同じ片側からのシステムティックな付番を前提としている。主要部の  $M \times M$  行列  $[A^{(b)}]$  は連続物体に対しては一般にはブロックバンドとなる。一方, 多列円柱浮体では,  $[A^{(b)}]$  は  $\hat{N}$  が現れないため, ブロック対角となり, 前節の取扱いに帰着される。

式(26), (27)は式(6)を書き換えただけであり数学的に等価であることは自明であり, 新規に導入した係数  $\{c^{(b)}\}$  を逆に式(30), (31)より消去すると積分方程式(6)を直接離散化した  $\{\phi\}$  のみに関する式に帰着される。

この変形が数値計算面からは決定的な違いを生むことは既に述べた通りであり, それは検証計算でも確認できた。

得られた離散化方程式は, FEM における「直並列消去法」がそのまま適用できる大規模計算に向く形になっている。しかし, 以下の手順に従えば多重散乱法と符合した計算が可能となり, 一段の計算の効率化が図れる。

式(30)の第1式をつぎの形に書く。

$$[A^{(b)}]\{\phi\} = \{v_v\} - [B^{(b)}]\{c^{(b)}\} \quad (32)$$

$[A^{(b)}]$  のブロックバンド特性を考慮してLDU分解すると,

$$[A^{(b)}] = [L][D][U] \quad (33)$$

一方,  $\{\phi\}$  も素波分解して

$$\{\phi\} = \{\psi\}_0 - \sum_{\lambda=1}^L c^{(\lambda)}_{(b)} \{\psi\}_\lambda \quad (34)$$

とおくと, 素波  $\{\psi\}_0, \{\psi\}_\lambda, (\lambda \geq 1)$  は今度はつぎの式を解いて決定できる。

$$[L][D][U](\{\psi\}_0, \{\psi\}_1, \dots, \{\psi\}_L) = (\{v_v\}, [B^{(b)}]) \quad (35)$$

係数行列はブロックバンド行列であり, FEM の大次元連立方程式のソルバーを利用すれば比較的容易に素波  $\{\psi\}_0, \{\psi\}_\lambda, (\lambda \geq 1)$  を決定できる。ついでながら, LDU 分解は最初に1回実施するのみでよい。

また, 残る展開係数  $\{c^{(b)}\}$  の決定は前節と全く同じ手順に従えばよい。すなわち,

$$([I] - [F^{(b)}])(\{\psi\}_1, \dots, \{\psi\}_L) \{c^{(b)}\} = -[F^{(b)}]\{\psi\}_0 \quad (36)$$

$\{c^{(b)}\}$  は多くの場合  $O(10^3)$  程度におさまるので, 問題なく決定できる。

すなわち,  $\{c^{(b)}\}$  が決まれば  $\{\phi\}$  が確定したことになる。以上が, 連続した超大型浮体のための多重散乱法を取り込んだ境界要素法の定式化である。ブロックバンド型係数行列を有する大次元連立方程式の求解部がもっとも計算労力を要求される場所であるが, その部分も FEM のパッケージが利用できる形になっており, 本計算法が従来の境界要素法に比して数値計算上大幅に優れた特性を有することが見て取れる。

なお, もう一段の工夫により,  $\{\phi\}$  の係数行列部のブロックバンドをブロック対角に解析的に変形でき, 数値計算上の一段の改善が期待できるが, それは別報に譲る。

## 5. 数値計算例

直接ブロック帯行列化境界要素法の有効性を検証するため, 水域に全長 1200m, 幅 240m, 喫水 1.04m の超大型浮体に働く水深 20m での上下方向の波強制力につき, 密行列になる従来の境界要素法との比較計算を実施した。

その波強制力の heave 成分は、計算された diffraction ポテンシャルを  $\phi^D$  とするとき、つぎの式より計算される。

$$E_z = -i\omega\rho \iint_S (\phi^W + \phi^D) (\partial z / \partial n) dS$$

要素サイズは 10m と 5m 刻みを、境界ブロック分割は前者では直列 5 分割、後者では直並列 10 分割を採用した (Fig. 5)。要素総数は側面も含め、1/4 領域解析で各々 3024 と 792 である。Fig. 6 に向波(波入射角  $\beta = 0^\circ$ )で波長/浮体長  $\lambda/L$  を振った計算結果の比較を示す。10m メッシュの 2 つの方法による計算結果はよく一致し、また本法が妥当な結果を与えることを確認した。1 波周期  $\times$  4 入射角方向についての計算時間は Pentium III 933MHz の CPU (メモリ 2GB) で、従来法の約 360 秒に対し、本法約 100 秒で約 1/4 である。本法による 5m メッシュの計算も当然ながらほぼ一致する結果を与え、計算時間は約 1800 秒であった。 $O(10^3)$  規模の計算でも問題なく本法を適用できる目処がたった。

## 6. 結言

積分方程式法の大規模化・高速化を図るため、Green 関数の分離核表示と境界ブロック化を介し、離散化方程式を直接ブロックバンド(または対角)化し、それを 2 段階で直列計算するアルゴリズムを新たに示した。

本法は、水波解析の場合、境界要素法+多重散乱法の一般化に相当する。多列柱型、ポンツーン型の浮体に対する離散化の形式を明示して、ブロックバンド化が後者への多重散乱法の合理的な拡張でもあることを示した。後者に対する直接ブロック対角化の道筋もつけた。

検証計算により、本法の大規模・高速計算への有効性を確信できた。

### 参考文献

- (1) 瀬戸秀幸: 超大型浮体式構造物における規則波中弾性応答の理論解析 (第一報), 日本造船学会論文集, 184 (1998), pp.231-241, (第二報), 187(2000), pp.265-241.
- (2) 瀬戸秀幸: 超大型任意形状浮体の波力評価のための直接ブロック帯行列化積分方程式法, 日本造船学会第 6 回運動性能部会資料 SKP6-1(2000).
- (3) 瀬戸秀幸: 有限要素法による波動問題の基礎的研究, 東学位論文(1975).
- (4) 村井基彦, 影本浩, 藤野正隆: 超大型浮体の波浪中弾性挙動の推定法について (第 3 報), 日本造船学会論文集, 183(1998), pp.199-210.
- (5) 吉田宏一郎, 鈴木英之, 岡徳昭, 飯島一博, 志村拓也, 有馬俊明: 大規模浮体における波強制力の相互干渉効果, 日本造船学会論文集, 174(1993), pp.243-251
- (6) 柏木正: セミサブ型大型浮体に働く波力の階層型相互干渉計算法, 第 14 回海洋工学シンポジウム, (1998), pp. 425-431.

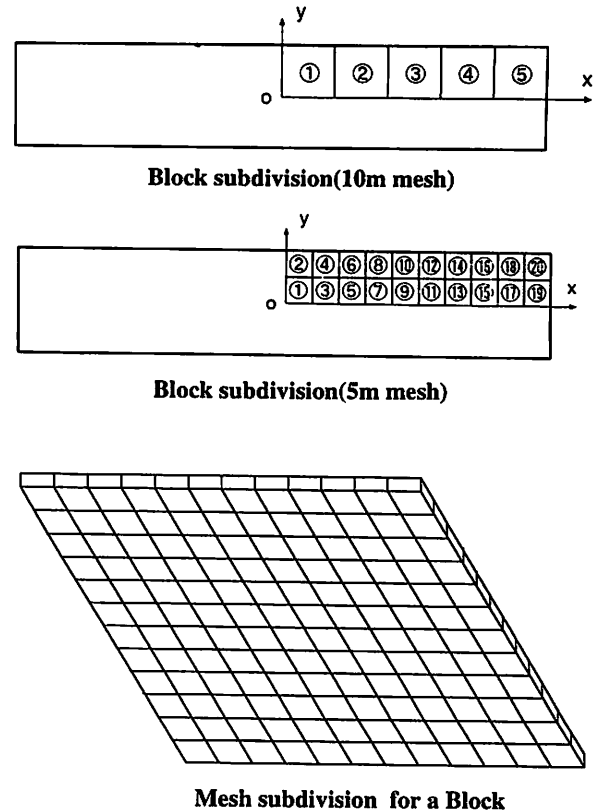


Fig. 5 Block-element subdivision of 1200m x 240m x 1.04m VLFS

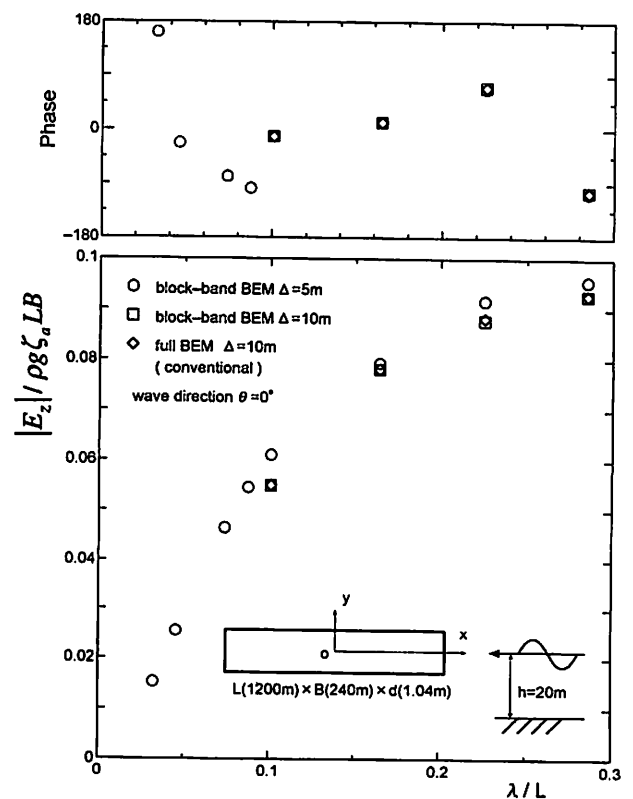


Fig. 6 Vertical wave exciting force