

2次元無限領域における完全ポテンシャル方程式の D-N 交代法

THE DIRICHLET-NEUMANN ALTERNATING METHOD FOR THE FULL
POTENTIAL EQUATION
IN AN UNBOUNDED TWO-DIMENSIONAL DOMAIN

林 圭佐

Keisuke HAYASHI

1) 茨城大学大学院理工学研究科 (〒310-8512 水戸市文京 2-1-1, E-mail: ghayashi@mcs.ibaraki.ac.jp)

The purpose of this paper is to consider a numerical method for the solution of an external Neumann problem of the full potential equation in compressible irrotational fluid flow. An artificial boundary decomposes the external domain Ω into a bounded subdomain Ω_1 and the external subdomain Ω_2 outside Ω_1 . We approximate the equation in Ω_2 by the 'small perturbed equation'. The finite element and the boundary element methods are applied to the equations on the domains Ω_1 and Ω_2 respectively, and the methods are indirectly combined by the boundary data along the artificial boundary. We apply the GMRES method to solve the system of linear equations arising from the problem in Ω_1 .

Key Words: Dirichlet-Neumann alternating method, Domain decomposition, Full potential equation, GMRES.

1 はじめに

本報は、平面 R^2 上の区分的に滑らかな閉曲線 Γ を境界にもつ物体の外部領域 Ω における、粘性の無い圧縮性流体の定常流れの問題を対象とする。特に流体の速度が音速を超えず、渦が無い場合を考える。

既に前報⁽¹⁾で、完全ポテンシャル方程式に対する D-N 交代法を構成しているが、高い主流マッハ数の問題に対しては、計算の途中で発散してしまい、数値解が得られなかった。そこで、非対称な係数行列をもつ方程式の解法として、反復法の一つである GMRES 法⁽²⁾を利用した計算手法を試み、数値例を示す。

2 問題

粘性の無い圧縮性流体の速度ポテンシャル Φ は、直交座標系 (x_1, x_2) で次の完全ポテンシャル方程式を満たす。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

ここで、 c は音速を表し、 $i, j = 1, 2$ について Einstein の総和規約を用いる。

物体の外部領域 Ω の境界 Γ 上の単位法線ベクトル \mathbf{n} を Ω に対して外向きにとる。無限遠方での速度が x_1 軸方向へ一定速度 U に漸近するような流れの速度ポテンシャル Φ を、 Ω において求める問題を考える。

問題 1 与えられた U に対して、以下を満たす Φ を求

めよ:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j} \quad \text{in } \Omega,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma,$$

$$\Phi(x_1, x_2) = Ux_1 + O(r^{-1}) \quad \text{as } r \rightarrow +\infty.$$

ここに、 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ である。この方程式は、流体の速度が音速を超えない条件のもとで楕円型の偏微分方程式である。

3 領域分割

問題 1 は無限領域問題である、その無限領域問題を次のように領域を分割して解く。

境界 Γ を内側に囲むように、十分大きい滑らかな閉曲線 Γ_0 を与える (Fig.1)。 Γ_0 により、領域 Ω は内部の有界領域 Ω_1 とその外部の非有界領域 Ω_2 に分割される。与えた Γ_0 は人工境界と呼ばれる。領域 Ω_1, Ω_2 に対する人工境界 Γ_0 上の外向き単位法線ベクトルをそれぞれ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ とする。

分割後の領域に D-N 交代法⁽³⁾を用いた手法を考える。D-N 交代法は、有界な領域と非有界な領域に分割し、人工境界上に Dirichlet データの推定値を与え、境界値が一致するまでそれぞれの領域における境界値問題を交互に解く手法である。

しかし、問題 1 では Γ 上に Neumann データが与えられているので、人工境界上に Neumann データ $\nu := \partial \varphi / \partial n_2$

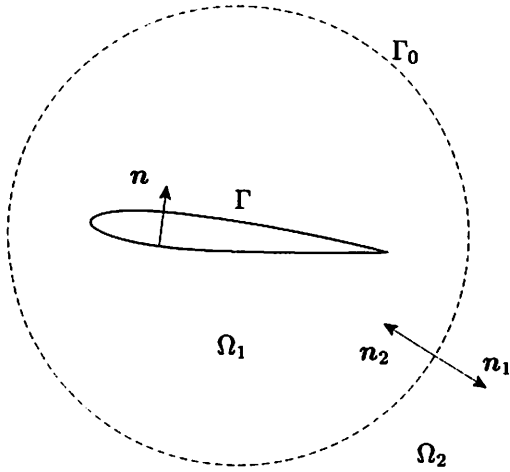


Fig. 1 Domain decomposition

の推定値を与える 次の N-D 交代法 (4) を用いる。

Step 1. 初期推定境界値 $\nu^{(0)}$ を与え, $k := 0$ とする。

Step 2. 外部領域 Ω_2 における 完全ポテンシャル方程式の Neumann 問題を解く:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_2^{(k)}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_2^{(k)}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi_2^{(k)}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_2^{(k)}}{\partial x_i \partial x_j} & \text{in } \Omega_2, \\ \frac{\partial \Phi_2^{(k)}}{\partial n_2} &= \nu^{(k)} & \text{on } \Gamma_0, \\ \Phi_2^{(k)}(x_1, x_2) &= Ux_1 + O(r^{-1}) & \text{as } r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Step 3. 内部領域 Ω_1 における完全ポテンシャル方程式の混合境界値問題を解く:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(k)}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_1^{(k)}}{\partial x_i \partial x_j} & \text{in } \Omega_1, \\ \Phi_1^{(k)} &= \Phi_2^{(k)} & \text{on } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial n} &= 0 & \text{on } \Gamma. \end{aligned}$$

Step 4. 小さい数 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\text{もし } \left\| \nu^{(k)} - \left(-\frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial n_1} \right) \right\| < \varepsilon \text{ ならば計算を停止} \\ \text{する. ここに } \|\cdot\| \text{ は } L^2 \text{ ノルムである.}$$

Step 5. 境界値を更新する:

$$\nu^{(k+1)} = \alpha_k \left(-\frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial n_1} \right) + (1 - \alpha_k) \nu^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_0.$$

ここで, パラメータ α_k は適切に選ばれた実数である。

Step 6. $k := k + 1$ とし, Step 2 へ戻る。

3.1 節と 3.2 節で, Ω_1, Ω_2 それぞれの領域における境界値問題をいかにして解くか述べる。

3.1 外部領域 Ω_2 上の境界値問題

外部領域 Ω_2 上の点 (x_1, x_2) における流れの速度を考えると, 物体の表面 Γ と閉曲線 Γ_0 の距離が十分遠ければ, 物体が流れに及ぼす変動は主流速度に比べ微小であ

ると考えられる。また, Step 2 で解くべき完全ポテンシャル方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2)$$

は

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{2}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ + \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

と整理できる。ただし, 上付き添え字 (k), 下付き添え字 1 は省く。

ここで, 主流からの変動速度ポテンシャルを $\varphi(x_1, x_2) := \Phi(x_1, x_2) - Ux_1$ とおくと,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + U \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2$) は U と比較して十分小さいので $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ の 1 次以上の項を無視でき, 次式の微小擾乱ポテンシャル方程式を得る。

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0. \quad (4)$$

ここに, $M_\infty := U/c$ は主流マッハ数である。

外部領域 Ω_2 において式 (2) を近似した微小擾乱方程式 (4) の境界値問題を考える。Prandtl-Glauert 変換 $\xi = x_1, \eta = \beta x_2$ を用いて, 式 (4) を Laplace 方程式の外部境界値問題に次のように帰着する (5)。

まず, 変動速度ポテンシャル φ を座標 (ξ, η) を用いて次のように書く。

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta) = \varphi(x_1, x_2).$$

このとき, $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ とおけば, 変数変換後の座標 (ξ, η) で方程式 (4) は,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta^2} = 0$$

と書かれる。以下, 変換座標 (ξ, η) で考えるときは, 記号 \sim を付けて変換前の座標 (x_1, x_2) と区別する。

変換座標における人工境界 $\tilde{\Gamma}_0$ 上の $\tilde{\Omega}_2$ に対する外向き単位法線ベクトル \tilde{n}_2 は, $\mathbf{n}_2 = (n_1, n_2)^T$ を用いて,

$$\tilde{\mathbf{n}}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 n_1^2 + n_2^2}} \begin{pmatrix} \beta n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

で表される。また,

$$\nabla_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

に注意すると, 人工境界 $\tilde{\Gamma}_0$ 上の Neumann データ $\tilde{\nu} := \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}_2}$ は,

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}_2} = \tilde{\mathbf{n}}_2 \cdot \nabla_{\xi\eta} \tilde{\varphi}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 n_1^2 + n_2^2}} (\beta n_1, n_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \varphi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 n_1^2 + n_2^2}} \left(\beta n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\beta} n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \varphi \end{aligned}$$

で求められる。

以上から、外部領域 Ω_2 の境界値問題は次の Laplace 方程式の外部 Neumann 問題に帰着される。

問題 2 座標系 (ξ, η) において、以下を満たす $\tilde{\varphi}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} -\nabla_{\xi\eta} \cdot \nabla_{\xi\eta} \tilde{\varphi} &= 0 && \text{in } \tilde{\Omega}_2, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}_2} &= \tilde{\nu} && \text{on } \tilde{\Gamma}_0, \\ \tilde{\varphi} &= O(\tilde{r}^{-1}) && \text{as } \tilde{r} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Step 1 で与えた ν に対応する $\tilde{\nu}$ を求めるのは特別な場合を除き困難である。しかし、Laplace 方程式の外部 Neumann 問題の可解性 $\int_{\tilde{\Gamma}_0} \tilde{\nu} d\Gamma = 0$ を満たす任意の初期値を与えて良い。数値計算においては、この問題 2 を境界要素法を用いて近似解を求める。

3.2 内部領域 Ω_1 上の境界値問題

内部領域 Ω_1 の境界値問題は有限要素法を用いて解く。Step 3 における完全ポテンシャル方程式は

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{2}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ + \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

のように整理できる。ただし、上付き添え字 (k)、下付き添え字 1 は省く。

$$\begin{aligned} a &:= 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2, & b &:= 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2, \\ h &:= -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

と置くと、式 (5) は、 $a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + 2h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = 0$ と書ける。

内部領域 Ω_1 を有限要素 $\{e\}$ で分割する。十分小さな有限要素内において a, b, h を一定とみなすと、この方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Phi = 0$$

または、

$$\nabla \cdot D \nabla \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi + \nabla \cdot \hat{D} \nabla \Phi = 0 \quad (6)$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 & -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) & -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \end{pmatrix} \\ &= E_2 + \hat{D} \end{aligned}$$

とおいた。

式 (6) の弱形式は、次のように求まる。人工境界 Γ_0 上に Dirichlet 条件が与えられるので、 Γ_0 上で $\delta \Phi = 0$ となる任意の変分 $\delta \Phi$ に対し、

$$\int_{\Omega_1} (\nabla \cdot D \nabla \Phi) \delta \Phi d\Omega = 0$$

が成り立つ。左辺を部分積分すると、弱形式

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot D \nabla \Phi) \delta \Phi d\Gamma - \int_{\Omega_1} D \nabla \Phi \cdot \nabla \delta \Phi d\Omega = 0$$

が得られる。一つの要素 e を取り出して弱形式を考えると

$$\int_e D \nabla \Phi \cdot \nabla \delta \Phi d\Omega (=) \int_{\partial e} (D \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}) \delta \Phi d\Gamma \quad (7)$$

となる。Fig.2 で示される三角形 1 次要素を用いた場合、

$$\Phi(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2)\Phi_1 + N_2(x_1, x_2)\Phi_2 + N_3(x_1, x_2)\Phi_3$$

で Φ は線形近似される。ここで、

$$N_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2),$$

$$N_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2),$$

$$N_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_3 + b_3 x_1 + c_3 x_2).$$

ただし、

$$\Delta^e = \text{要素 } e \text{ の面積} = \frac{b_2 c_3 - b_3 c_2}{2},$$

$$a_1 = x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)},$$

$$a_2 = x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)},$$

$$a_3 = x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)},$$

$$b_1 = x_2^{(2)} - x_2^{(3)}, \quad c_1 = x_1^{(3)} - x_1^{(2)},$$

$$b_2 = x_2^{(3)} - x_2^{(1)}, \quad c_2 = x_1^{(1)} - x_1^{(3)},$$

$$b_3 = x_2^{(1)} - x_2^{(2)}, \quad c_3 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}$$

である。

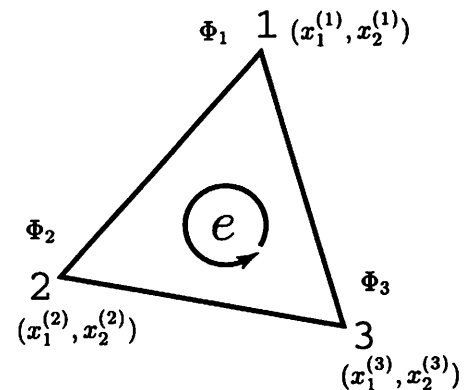


Fig. 2 Triangular linear element

行列を用いて議論をすすめると、

$$\begin{aligned}\Phi &= [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = [N]\{\Phi\}, \\ \delta\Phi &= [N]\{\delta\Phi\}, \\ \nabla\Phi &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} [N_1 N_2 N_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} \{\Phi\} \\ &= \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \{\Phi\} = [S]\{\Phi\}, \\ \nabla\delta\Phi &= [S]\{\delta\Phi\}.\end{aligned}$$

弱形式 (7) の左辺は、1 つの要素 e 上で

$$\begin{aligned}\int_e D\nabla\Phi \cdot \nabla\delta\Phi \, d\Omega &= \int_e (\nabla\delta\Phi)^T D\nabla\Phi \, d\Omega \\ &= \int_e \{\delta\Phi\}^T [S]^T [D][S]\{\Phi\} \, d\Omega \\ &= \{\delta\Phi\}^T \Delta^e [S]^T [D][S]\{\Phi\} = \{\delta\Phi\} [K^e]\{\Phi\}\end{aligned}$$

となる。

一方、弱形式 (7) の右辺は Γ 上の境界条件 $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ に注意して、

$$\begin{aligned}\int_{\partial e} (D\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}) \delta\Phi \, d\Gamma &= \int_{\partial e} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}) \delta\Phi \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\partial e} (\hat{D}\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}) \delta\Phi \, d\Gamma \\ &= \int_{\partial e} \delta\Phi (\hat{D}\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \\ &= \{\delta\Phi\}^T \int_{\partial e} [N]^T (\mathbf{n} \cdot [\hat{D}][S]) \, d\Gamma \{\Phi\} \\ &= \{\delta\Phi\}^T [Q^e]\{\Phi\}.\end{aligned}$$

$\{\delta\Phi\}$ は任意にとれるから、各要素毎に

$$[K^e]\{\Phi\} (=) [Q^e]\{\Phi\}$$

が成り立つ。これを領域 Ω_1 を構成する全ての要素 e について考え、重ね合せれば、

$$[K(\Phi_{\Omega_1})]\{\Phi_{\Omega_1}\} = [Q(\Phi_{\Omega_1})]\{\Phi_{\Omega_1}\} \quad (8)$$

を得る。ここで $\{\Phi_{\Omega_1}\}$ は境界 Γ, Γ_0 と Ω_1 全体の節点値を並べた列ベクトルである。

式 (8) 右辺の行列 $[Q]$ は対称でない。移項して

$$([K(\Phi_{\Omega_1})] - [Q(\Phi_{\Omega_1})])\{\Phi_{\Omega_1}\} = 0$$

となる。この非線型方程式を

$$[A(\Phi_{\Omega_1})]\{\Phi_{\Omega_1}\} = 0$$

と書く。本報では、リスタート版 GMRES(m) 法⁽⁶⁾ に工夫を施し、次のように解く。

Step 3.1. $\{\Phi_{\Omega_1}^{(0)}\}$ の各成分に、対応する節点値 U_{x_1} を与え、 $j=0$ とする。

Step 3.2. $A(\Phi_{\Omega_1}^{(j)})\mathbf{x} = 0$ に Γ_0 上の基本境界条件を課した方程式 $A^{(j)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(j)}$ を作る。GMRES 法の初期推定値として $\mathbf{x}_0 := \Phi_{\Omega_1}^{(j)}$ とする。

Step 3.3. 残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b}^{(j)} - A^{(j)}\mathbf{x}_0$ を計算し、

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &:= \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|}, \\ \mathbf{e} &:= (\|\mathbf{r}_0\|, 0, \dots, 0)^T, \\ n &:= 1\end{aligned}$$

とする。

Step 3.4. $\hat{\mathbf{v}}_{n+1} = A^{(j)}\mathbf{v}_n$ とし、 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned}h_{i,n} &= (\hat{\mathbf{v}}_{n+1}, \mathbf{v}_i), \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \hat{\mathbf{v}}_{n+1} - h_{i,n}\mathbf{v}_i\end{aligned}$$

を計算し、

$$\begin{aligned}h_{n+1,n} &= \|\hat{\mathbf{v}}_{n+1}\|, \\ \mathbf{v}_{j+1} &= \frac{\hat{\mathbf{v}}_{n+1}}{h_{n+1,n}}\end{aligned}$$

とする。

Step 3.5. もし $n=1$ ならば、Step 3.6 へ進む。
 $n \geq 2$ ならば、
 $i = 1, 2, \dots, n-1$ に対して

$$\begin{pmatrix} h_{i,n} \\ h_{i+1,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_i & -s_i \\ s_i & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{i,n} \\ h_{i+1,n} \end{pmatrix}$$

とする。

Step 3.6. c_n, s_n を計算し、 e_n, e_{n+1} をアップデートする

$$\begin{aligned}c_n &= \sqrt{\frac{h_{n,n}^2}{h_{n,n}^2 + h_{n+1,n}^2}}, \\ s_n &= -\frac{h_{n+1,n}}{h_{n,n}} \sqrt{\frac{h_{n,n}^2}{h_{n,n}^2 + h_{n+1,n}^2}}, \\ \begin{pmatrix} e_n \\ e_{n+1} \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} c_n & -s_n \\ s_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n \\ e_{n+1} \end{pmatrix}, \\ h_{n,n} &:= -\frac{h_{n+1,n}}{h_{n,n}} \sqrt{\frac{h_{n,n}^2}{h_{n,n}^2 + h_{n+1,n}^2}}, \\ h_{n+1,n} &= 0.\end{aligned}$$

Step 3.7. 小さい正数 ω, μ に対し、
もし、ベクトル \mathbf{e} の n 番目の成分について

$$|e_n| < \mu \|\mathbf{b}^{(j)}\|$$

ならば、 \mathbf{H}_n を上三角行列 $(h_{i,j})_{n \times n}$ として

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{H}_n^{-1} \|\mathbf{r}_0\| \mathbf{e}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{v}_i.\end{aligned}$$

を計算する。さらに、連立 1 次方程式を組み立てるのに使った節点値 $\Phi_{\Omega_1}^{(j)}$ と \mathbf{x} の差のノルムが

$$\|\Phi_{\Omega_1}^{(j)} - \mathbf{x}\|_2 < \omega \|\Phi_{\Omega_1}^{(j)}\|_2$$

ならば、 \mathbf{x} を非線型方程式 $[A(\Phi_{\Omega_1})]\{\Phi_{\Omega_1}\} = 0$ の解として計算を停止する。

Step 3.8. もし、 $n < m$ ならば、 $n := n+1$ として Step 3.4 へ戻る。

Step 3.9. リスタート時の初期値を計算する:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_m^{-1} \|r_0\| \mathbf{e},$$

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{y}_i \mathbf{v}_i.$$

Step 3.10. 小さい正数 ω, μ' に対し, もし, 連立 1 次方程式の残差が

$$\|\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{x}_m\|_2 > \mu' \|\mathbf{b}^{(j)}\|_2$$

かつ, 連立 1 次方程式を作るのに使った $\Phi_{\Omega_1}^{(j)}$ と現在の近似解の差のノルムが

$$\|\Phi_{\Omega_1}^{(j)} - \mathbf{x}_m\|_2 < \omega \|\Phi_{\Omega_1}^{(j)}\|_2$$

ならば, $\Phi_{\Omega_1}^{(j)}$ は解に十分近くないので, 現在の近似解を用いて連立 1 次方程式を更新をする:

$$\Phi_{\Omega_1}^{(j+1)} := \mathbf{x}_m, \quad j := j + 1$$

とし, Step 3.2 に行く.

Step 3.11. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_m$ として, Step 3.3 に行く.

3.3 N-D 交代法

3.1 節と 3.2 節より, 完全ポテンシャル方程式に対する N-D 交代法は次のように構成される.

Step I. 初期推定境界値 $\tilde{v}^{(0)} = 0$ を与え, $k := 0$ とする.

Step II. $\tilde{\Omega}_2$ における Laplace 方程式の Neumann 問題を境界要素法で解く:

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi\eta} \cdot \nabla_{\xi\eta} \tilde{\varphi}_2 &= 0 && \text{in } \tilde{\Omega}_2, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_2^{(k)}}{\partial \tilde{n}_2} &= \tilde{v}^{(k)} && \text{on } \tilde{\Gamma}_0, \\ \tilde{\varphi}_2^{(k)} &= O(\tilde{r}^{-1}) && \text{as } \tilde{r} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Step III. 内部領域 Ω_1 における完全ポテンシャル方程式の混合境界値問題を解く:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(k)}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_1^{(k)}}{\partial x_j \partial x_j} && \text{in } \Omega_1, \\ \Phi_1^{(k)}(x_1, x_2) &= \tilde{\varphi}_2^{(k)}(x_1, \beta x_2) + U x_1 && \text{on } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial n} &= 0 && \text{on } \Gamma. \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_1^{(k)}(x_1, \beta x_2) = \Phi_1^{(k)}(x_1, x_2) - U x_1 \text{ を計算する.}$$

Step IV. 小さい数 $\varepsilon > 0$ に対して, もし $\|\tilde{v}^{(k)} - (\tilde{\mathbf{n}}_2 \cdot \nabla_{\xi\eta} \tilde{\varphi}_1^{(k)})\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_0)} < \varepsilon$ ならば計算を停止する.

Step V. 境界値を更新する:

$$\tilde{v}^{(k+1)} = \alpha_k (\tilde{\mathbf{n}}_2 \cdot \nabla_{\xi\eta} \tilde{\varphi}_1^{(k)}) + (1 - \alpha_k) \tilde{v}^{(k)} \text{ on } \tilde{\Gamma}_0.$$

ここで, パラメータ α_k は適切に選ばれた実数である.

Step VI. $k := k + 1$ とし, Step 2 へ戻る.

4 計算例

3.3 節で構成した N-D 交代法の完全ポテンシャル方程式への適用性を確認するために, 翼まわりの流れを考える. 境界 Γ として 翼弦長 1[m] の NACA0012 の断面を構成する閉曲線を与え, その外部領域を問題領域 Ω とする. 迎え角 α を $\tan \alpha = 0.1$ となるように与えた.

無限遠方での流速が $U := 205[\text{m/s}]$ に漸近するような, 流れの速度ポテンシャル Φ を Ω_1 において求める. 音速を $c := 340[\text{m/s}]$ とする. この問題は主流マッハ数にして $M_\infty = 205/340 \simeq 0.60$ に相当する.

人工境界 Γ_0 を Fig.3 のように与える.

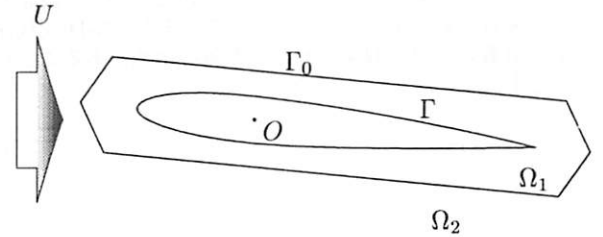


Fig. 3 A wing profile (NACA0012) and Γ_0

Step V における境界値更新のパラメータとして $\alpha_k = 0.5$ を採用し, Step IV において $\varepsilon = 10^{-2}$ とする. ω, μ, μ' にはそれぞれ, $10^{-2}, 10^{-12}, 10^{-6}$ を与え, GMRES 法がリスタートするまでの回数 m を 50 とした.



Fig. 4 Triangular element (8,192 elements)

Ω_1 を Fig.4 に示すように 8,192 個の三角形 1 次要素で分割し, 初期推定境界値として, Γ_0 に沿って $v^{(0)} = 0$ を与えたとき, N-D 交代法は 21 回の反復で停止した. 得られた数値解の等ポテンシャル線を Fig.5 に示す.

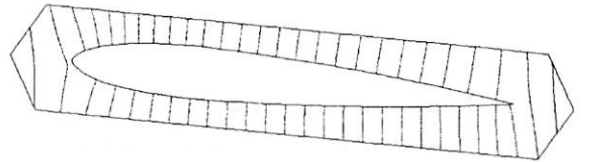


Fig. 5 Numerical solution $\Phi_1^{(21)}$
 $(-9.89 \times 10 < \Phi_1^{(21)} < 1.78 \times 10^2)$

これより高い主流マッハ数で計算を行うと, Step III における GMRES 法が発散した.

メッシュを細かくして Ω_1 を Fig.6 に示すように 24,576 個の三角形 1 次要素で分割して再度計算を行った.

その他のパラメータは 8,192 個の三角形 1 次要素を使ったときと同じ設定である. N-D 交代法が 50 回の反復まで停止しなかったため, $k = 50$ 回で計算を打ち切った.

Fig.7 に, 横軸に反復回数, 縦軸に N-D 交代法の Step IV で評価している L^2 ノルムの値の対数を取ったものを示す. グラフの傾きに注意すると N-D 交代法は 26 回目

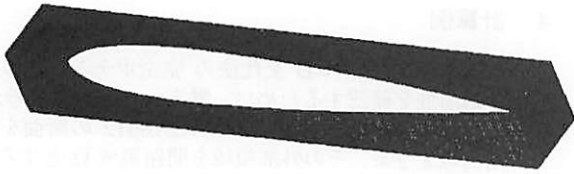


Fig. 6 Triangular element (24,576 elements)

の反復で収束しており、それ以降の数値解は解に近いところで振動していると考えられる。このことから、設定した停止条件が厳しすぎたことが分かる。また、N-D 交代法の数値計算における収束の判定に改善の余地があることが示唆される。

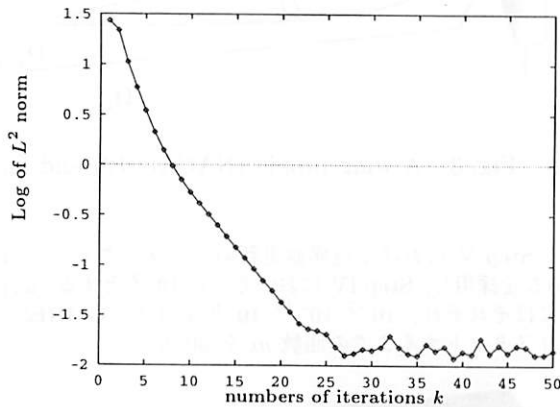


Fig. 7 $\text{Log} \left\| \tilde{v}^{(k)} - \left(\tilde{n}_2 \cdot \nabla_{\xi\eta} \tilde{\varphi}_1^{(k)} \right) \right\|$ for each iterations k

Fig.8 に、 $k = 50$ で反復を打ち切った時に得られた数値解の等ポテンシャル線を示す。メッシュの細かさの違う二つの計算結果ではほぼ同一の等ポテンシャル線が得られている。

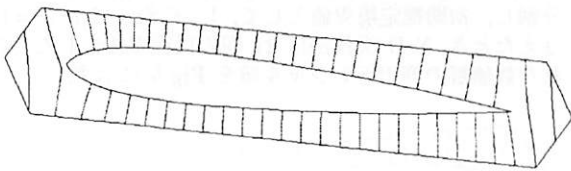


Fig. 8 Numerical solution $\Phi_1^{(50)}$
 $(-9.89 \times 10 < \Phi_1^{(50)} < 1.78 \times 10^2)$

5 おわりに

本報では、完全ポテンシャル方程式の外部問題に対する N-D 交代法の数値計算を行った。

前報で、内部領域 Ω_1 における混合境界値問題が高いマッハ数のため、単純反復法が発散し解けなかった。本報では、非線型の方程式を、リスタート版 GMRES(m) 法のリスタートの際に係数行列を更新して解くことを試みた。

翼 NACA0012 の外部問題に対し、主流マッハ数 $M_\infty \approx 0.60$ に対しては N-D 交代法で解けることが確認された。前報で用いた単純反復法に比べて若干高い主流マッハ数で計算することができた。更に高い主流マッハ数では、内部領域 Ω_1 における混合境界値問題の解を求める過程で GMRES 法が発散し、数値解を得ることができなかった。

数値例からは N-D 交代法の収束判定に改善の余地があることが示唆された。

今後は、Step 3 の混合境界値問題に対して、2 次要素を用いた有限要素法の適用を検討すると共に、収束判定の改善を試みる。

参考文献

- (1) 林 圭佐: 2次元無限領域における完全ポテンシャル方程式の領域分割法, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **10**, (2000), pp. 5-9.
- (2) Saad, Y. and M. H. Schultz, GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, (1986), pp. 856-869.
- (3) Yu, D.: Discretization of non-overlapping domain decomposition method for unbounded domains and its convergence, *Chinese J. Num. Math. & Appl.*, **18**, 4 (1996), pp. 93-102.
- (4) 林 圭佐: Poisson 方程式の二次元無限領域に対する D-N 交代法, 日本計算工学会論文集, **2**, (2000), pp. 205-212.
- (5) 数値流体力学編集委員会 (編): 圧縮性流体解析 数値流体力学シリーズ 2, (1995), 東京大学出版会.
- (6) 藤野清次, 張 紹良: 反復法の数理, (1996), 朝倉書店.