

# 場の変数とその導関数を境界の近くで高精度に 計算する BEM の一般的なアルゴリズム

馬 杭\*, 神谷紀生\*\*

## A GENERAL ALGORITHM FOR ACCURATE COMPUTATION OF FIELD VARIABLES AND THEIR DERIVATIVES NEAR THE BOUNDARY IN BEM

H. Ma\* and N. Kamiya\*\*

\* 上海大学理系力学部, 2000127 上海, 中国

\*\*名古屋大学情報文化学部, 464-8601 名古屋市千種区 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp

A general algorithm is proposed in the paper for accurate computation of the field variables and their derivatives at points in the domain near the boundary in an attempt to solve the so-called the boundary layer effect in the boundary element method. With the aid of a distance function introduced here, the formulations, independent of the kind of boundary elements, are presented explicitly for accurate computation of the integrals with the logarithmic, Cauchy and Hadamard singularities in the two-dimensional case. Numerical examples of the potential problem are given, showing feasibility and effectiveness of the proposed algorithm by using the cubic boundary elements.

*Key words:* BEM, Boundary layer effect, Singularity, Field variable

### 1. はじめに

よく知られているように, 境界要素法によって変数およびその導関数を境界のごく近くで計算するとき, 通常の Gauss 積分公式を用いると, 積分核の特異性によって正しく計算できない。これは境界要素法における境界層効果と呼ばれることがある。これを避けるための種々の方法が研究されてきたが, そのうちで直接的な方法として, 要素をさらに小さく分割する方法[1], 特異性を下げるための定式[2]などがある。また間接的な方法として, 一様ポテンシャルあるいは剛体変位を用いる方法[2], 追加領域を設ける方法[3], 外挿による方法[4]等を挙げることができる。しかしながら, 現在のところ, これらは境界層効果を完全に解消できるようにはなっていない。たとえば, 剛体変位法は

亀裂の問題には適さないし, また導関数の正確な計算には不十分である。細かいサブ要素を用いるときは, 精度を高めるために, 極めて多くの要素が個々の位置で必要になるし, この結果境界要素の大きさの分布が広がる結果を生じることになる。追加領域を設ける方法は一般性があるが, それには自由度がありすぎるのがやっかいである。

この研究では, 計算される位置が境界近くにあるとき, 積分核の特異性を除くために, 新たに距離関数(distance function)を定義する。この関数は, 境界要素がどのようにとられようとも, それに無関係な一般的アルゴリズムを構成するものとなる。2次元ポテンシャル問題を例に取って, 定式化およびそれに基づく解析例によって方法の有効性を確認する。

## 2. アルゴリズム

### 2. 1 ポテンシャル問題の積分方程式

考える領域 $\Omega$ の境界を $\Gamma$ として、ポテンシャル問題の場の変数  $u$  とその導関数は次の積分方程式によって表される ( $p \in \Omega$ ) :

$$u(p) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(q) u^*(p, q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} u(q) \frac{\partial u^*}{\partial n}(p, q) d\Gamma(q) \quad (1)$$

$$u_{,k}(p) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(q) u^*_{,k}(p, q) d\Gamma(q) + \int_{\Gamma} u(q) \left( \frac{\partial u^*(p, q)}{\partial n} \right)_{,k} d\Gamma(q) \quad (2)$$

ここで

- $u$ : 場の変数 (ポテンシャル)
- $n$ : 境界での外向き法線
- $p$ : ソース点
- $q$ : 場の点

なお  $u^*$  は基本解であり、2次元ポテンシャル問題においてはつぎのように与えられる :

$$u^*(p, q) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3)$$

ここで、 $r$  は2点  $p$  と  $q$  の距離である。ソース点が境界に近付くと、積分核の特異性のために、式(1)あるいは(2)によって  $u$  あるいはその導関数  $u_{,k}$  を Gauss 積分を用いて正確に計算することは不可能である。これは境界要素法における境界層効果と呼ばれることがある。式(1)あるいは(2)に現れる項の特異性はそれぞれ異なり、式(1)の右辺第1項は対数特異性、式(1)の右辺第2項および式(2)の右辺第1項は Cauchy 特異性、式(2)の右辺第2項は Hadamard 特異性である。

### 2. 2 距離関数の導入

特異積分の正確な計算を実現するための要点は、個々の特異部分を適切に分離することである[5]。

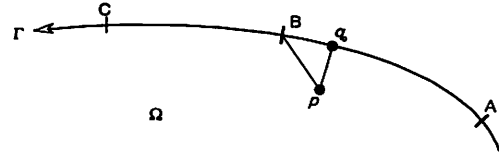


Fig.1. The boundary elements adjacent to the point  $p$

境界がいくつかの境界要素に分割され、その形状関数を  $\Phi$ 、ヤコビアンを  $G(\xi)$  と表せば、式(1)あるいは(2)に現れる個々の積分核の境界要素上の積分は一般につぎのように表される :

$$I_s = \int_{-1}^{+1} \Phi(\xi) G(\xi) K_s[p, q(\xi)] d\xi \quad (4)$$

ここで  $K_s(p, q)$  は積分核の一つに対応し、添字  $S$  は特異性の種類をつぎのように示している :

- $S = L$  : 対数特異性
- $S = C$  : Cauchy 特異性
- $S = H$  : Hadamard 特異性

計算を行う内点  $p$  から境界要素に至る最小距離を  $r_0$  とし、それに対応する境界要素上の点の座標を  $\xi_0$  とする。これに関連して、図1に示すように、2つのケースに分けて考える必要がある、すなわち、要素  $AB$  については点  $p$  から垂線を立てた  $q_0$  までの距離  $pq_0$  が最小距離となる。しかしながら、要素  $BC$  については最小距離は  $pB$  となる。後者では要素の端点  $B$  が対応する。最小距離を用いて、距離関数をつぎのように定義する :

$$g(\xi) = G(\xi) \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + \left( \frac{r_0}{G(\xi)} \right)^2} \quad (5)$$

### 2. 3 特異部分の分離

上に導入した距離関数を用いれば、積分核から特異部分は容易に分離され、つぎのように表すことができる :

$$I_s = \int_{-1}^{+1} \left\{ \Phi(\xi)G(\xi)K_s[p, q(\xi)] - \Phi(\xi_0)G(\xi_0)F_s[g(\xi)] \right\} d\xi + \Phi(\xi_0)G(\xi_0) \int_{-1}^{+1} F_s[g(\xi)] d\xi \quad (6)$$

ここで、上式の  $F_s$  はそれぞれつぎのようになる：

$$F_L[g(\xi)] = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \frac{1}{g(\xi)} \right] \quad (7)$$

$$F_C[g(\xi)] = \frac{1}{2\pi g(\xi)} \quad (8)$$

$$F_H[g(\xi)] = \frac{1}{2\pi [g(\xi)]^2} \quad (9)$$

これらは、それぞれ、対数特異性、Cauchy 特異性および Hadamard 特異性に対応している。

式(6)の右辺第1項は通常の積分であるから、Gauss 積分が適用できる。また式(6)の第2項の積分は、それぞれ、つぎのように表すことができる：

$$2\pi \int_{-1}^{+1} F_L[g(\xi)] d\xi = (1-\xi_0) \ln \left[ G_0 \sqrt{(1-\xi_0)^2 + \left(\frac{r_0}{G_0}\right)^2} \right] + (1+\xi_0) \ln \left[ G_0 \sqrt{(1+\xi_0)^2 + \left(\frac{r_0}{G_0}\right)^2} \right] + \frac{r_0}{G_0} \left[ \arctan(1-\xi_0) \frac{G_0}{r_0} + \arctan(1+\xi_0) \frac{G_0}{r_0} \right] - 2 \quad (10)$$

$$2\pi \int_{-1}^{+1} F_C[g(\xi)] d\xi = \frac{1}{G_0} \left[ \ln \left| (1-\xi_0) + \sqrt{(1-\xi_0)^2 + \left(\frac{r_0}{G_0}\right)^2} \right| - \ln \left| (1+\xi_0) - \sqrt{(1+\xi_0)^2 + \left(\frac{r_0}{G_0}\right)^2} \right| \right] \quad (11)$$

$$2\pi \int_{-1}^{+1} F_H[g(\xi)] d\xi = \frac{1}{G_0 r_0} \left[ \arctan(1-\xi_0) \frac{G_0}{r_0} + \arctan(1+\xi_0) \frac{G_0}{r_0} \right] \quad (12)$$

なおここでつぎのようにおいた：

$$G_0 = G(\xi_0) \quad (13)$$

したがって、以上の積分はすべて Gauss 積分を用いて精度よく計算することが可能になる。

### 3. 例題とその検討

解析の例として、楕円領域における2次元ポテンシャル問題を考える。境界要素には3次の Hermite スプライン要素を用いることにする。楕円のパラメータ表示は

$$x_1 = a \sin \theta, \quad x_2 = b \cos \theta \quad (14)$$

となり、長軸  $2a$ 、短軸  $2b$  をとし、以下の計算では

$$a = 2, \quad b = 1.5$$

とおいた。解のポテンシャルは

$$u = \ln(R) \quad (15)$$

のように与えられるものとし、ここで

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} \quad (16)$$

なお、

$$x_1^0 = -2, \quad x_2^0 = 2$$

とした。

(11) 境界要素数 16, Gauss 積分は、点の近い要素

では 8 点, その他の要素では 4 点を用いて, 計算を行った結果を表 1 に示す. なお,  $p(x_1^p, x_2^p)$  は点  $p$  の座標,  $r_0$  は点から境界への最小距離,  $r_0/l$  は要素の長さ  $l$  に対する境界までの最小距離の相対値である.

これらの結果からわかるように, 極めて精度の高い解を得ている. したがって, ここで示した方法が有効な手段として用い得ることがわかった. しかしながら, 表 1 から同時に示されることは, 変数自体の精度に比べて導関数の精度は相対的に低いこと (おおむね 1 桁くらい) である. これは超特異である Hadamard 特異性の故である.

#### 4. 結論

距離関数と名付けた新しい関数を定義して, 境界に近い内部点における場の変数とその導関数を精度良く計算するための, 境界要素法の一般的なアルゴリズムを提案した. 2次元ポテンシャル問題を例にとり, 計算結果を示した. 高い精度が得られ, これによって, いわゆる境界層効果を緩和することができた.

#### 文献

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F. and Wrobel L.C., *Boundary Element Techniques — Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, 1984.
2. Zhang G.H. and Lou Z.W., Formulations for stress calculation of boundary layer point in BEM. In: Tanaka M. and Du Q.H. editors. *Proceedings of the Third Japan-China Symposium on Boundary Element Methods*, Pergamon Press, 1990: 73-82.
3. Ma H. and Kamiya N., Domain supplemental approach to avoid boundary layer effect of BEM in elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999: 23(3), 281-284.
4. Wang D. A, method for calculating stresses at the boundary and internal points close to boundary, *Journal of Mechanical Strength (in Chinese)*, 1992: 14(2), 23-26.
5. Guiggiani M. and Gigante A., A general algorithm for multi-dimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method, *Journal of Applied Mechanics*, 1990: 59, 906-915.
6. Partridge P.W., Brebbia C.A. and Wrobel L.C., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, 1992.

Table 1. Comparison of the field variables between the computed and the theoretical values

Computation conditions	Variables	Computed values	Theoretical values	Absolute errors	Relative errors
$p(1.940, 0.000)$ $r_0=0.060$ $r_0/l=0.100$	$u$	1.486227	1.485812	0.0004	0.0003
	$u_{,1}$	0.204534	0.201807	0.0027	0.0135
	$u_{,2}$	-0.102555	-0.102440	-0.0001	0.0011
$p(-1.014, 1.241)$ $r_0=0.048$ $r_0/l=0.066$	$u$	0.219117	0.218996	0.0001	0.0006
	$u_{,1}$	0.633687	0.636524	-0.0028	0.0045
	$u_{,2}$	-0.490244	-0.490070	-0.0002	0.0004
$p(-0.453, -1.415)$ $r_0=0.046$ $r_0/l=0.059$	$u$	1.321858	1.321468	0.0004	0.0003
	$u_{,1}$	0.112142	0.110080	0.0021	0.0187
	$u_{,2}$	-0.245326	-0.242970	-0.0024	0.0097
$p(1.916, -0.228)$ $r_0=0.059$ $r_0/l=0.098$	$u$	1.505668	1.505266	0.0004	0.0003
	$u_{,1}$	0.193173	0.192929	0.0002	0.0013
	$u_{,2}$	-0.110318	-0.109744	-0.0006	0.0052