

境界要素法による偏心補強板の静的弾性曲げ解析

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF ELASTOSTATIC BENDING OF
ECCENTRICALLY STIFFENED PLATES老田 昇司¹⁾, 田中 正隆²⁾, 松本 敏郎³⁾

Shoji OIDA, Masataka TANAKA and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 信州大学大学院工学系研究科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: oida@artist.shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 3) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

The present paper proposes an integral equation formulation for static bending and its implementation of stiffened elastic plates using boundary element method. For an eccentrically stiffened plate where the neutral axis of rib is not involved in the neutral plane of elastic plate, in-plane deformation and out-of-plane deformation will be coupled. It implies that the bending and plane-stress deformation of the elastic plate should be considered together with tensile, bending and twisting deformation of the rib. In this paper, three components of interactive force and two components of interactive moment between the plate and stiffener are treated as line distributed unknown loads. For implementation of the resulting integral equations, quartic isoparametric elements are used for the boundary elements of the plate, and constant elements for the interactive loads. The numerical results obtained by the computer code developed in this study are discussed, whereby the versatility of the proposed analysis method is demonstrated.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Elastic Plate, Plate Bending, Stiffened Plate, Interaction Problems

1. 緒言

本研究では、弾性板に真直梁を接合した補強板の静的曲げ問題を境界要素法により解析する。有限要素法による補強板の解析においては、リブを含む要素に対し特殊要素を用いることで解析を行っている^{(1)~(4)}。境界要素法や境界積分方程式法による解析では、弾性板とリブとの接合面に作用する荷重をどのように評価するかで2つの手法に区別できる。すなわち弾性板のたわみを用いてそれらの荷重を表す方法、およびそれらの荷重を直接未知量として扱う方法とに分けることができる。Hu-Hartley⁽⁵⁾やTanaka-Bercin⁽⁶⁾は前者の手法に従い、補強線上での弾性板のたわみに対し、6次要素を用いて解析を行っている。Sapountzakis-Katsikadelis⁽⁷⁾や著者ら⁽⁸⁾は後者の手法に従い、精度の良い解析が可能であることを確認している。特に著者らの提案する手法によれば、積分方程式の離散化に境界要素法を用いることで、要素分割を行うのは弾性板境界とリブ接合線のみですみ、また任意の位置および向きにリブが取り付けられた補強板を扱うことが可能であり、効率的に解析を行うことができる。

Timoshenkoの弾性支持平板の理論⁽⁹⁾では、接合線に沿つ

た弾性板横断面に生じる相当せん断力と曲げモーメントが、リブに対してそれぞれ分布力および分布モーメントとして作用するものとし、面外変形に対する定式化を行っている。しかしながら、面外変形のみで解析を行うということは、弾性板の中立面とリブの中立軸が一致しているという仮定のもとで可能である。一般的にこれらは一致せず、弾性板およびリブの中立軸に対し、偏心を伴う荷重が作用するものとして考えるべきである。この場合、接合線において生じる線分布荷重を介して面外変形と面内変形が連成する問題となる。

そこで本報では、この面外変形と面内変形が連成する補強板の静的曲げ変形問題を取り上げ、境界要素法を用いた定式化を示す。

2. 理論

本研究では、Fig. 1に示されるような補強板を考える。ただし X_1X_2 平面が弾性板中央面に一致するよう、またリブ横断面の図心軸に一致するよう x_1 軸を、 X_3 軸と x_3 軸が平行になるよう、右手系に従って座標系を決定する。本研究では、以下の仮定に基づいて定式化を行う。

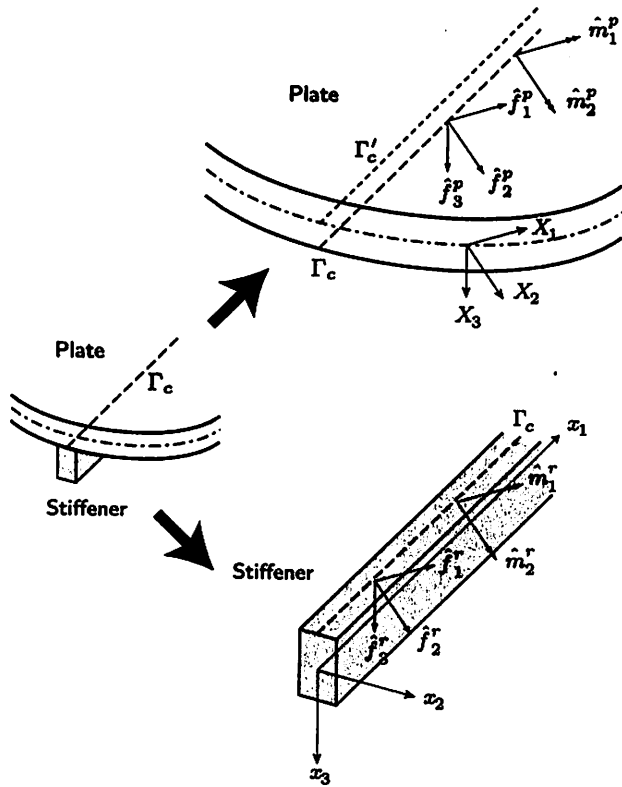


Fig. 1 A model of an eccentrically stiffened plate

- (i) 弾性板とリブは、ある一つの直線（接合線）において接合する。
- (ii) 弾性板は一様な等方弾性体であり、Kirchhoff-Love の仮定に基づいた変形を生じる。
- (iii) リブは一様な二軸対称断面を持ち、リブの引張り変形、曲げ変形、およびねじり変形はそれぞれ独立に扱うことができる。
- (iv) 接合線における弾性板中立面に垂直な軸周りに作用するモーメントの効果は無視できる。すなわち、接合線で生じる各座標軸方向の線分布力 f_i ($i = 1, 2, 3$) および線分布モーメント m_i ($i = 1, 2$) を考慮する。

Timoshenko の理論⁽⁹⁾ のような偏心しない補強板の場合、面外変形と面内変形は独立に解析を行うことができる。ただしここで述べる面外変形とは、弾性板の曲げ変形、リブの x_3 軸方向への曲げ変形および x_1 軸まわりのねじり変形が連成する問題であり、面内変形とは弾性板の面内変形（平面応力状態）、リブの x_2 軸方向への曲げ変形および x_1 軸方向への引張り変形が連成する問題である。偏心を持つ補強板の解析においては、それぞれで連成問題となっている面内変形と面外変形がさらに連成する問題となる。

弾性板およびリブそれぞれの中立面に対して偏心荷重として作用するため、これらの荷重を中立面に作用する荷重へと変換する必要がある。まず弾性板に対し、接合線 Γ_c 上で作用する荷重は、接合線 Γ_c の中立面 (X_1X_2 平面) への垂

直射影 Γ'_c において、次のように表すことができる。

$$f_1^p = \hat{f}_1^p \quad (1)$$

$$f_2^p = \hat{f}_2^p \quad (2)$$

$$f_3^p = \hat{f}_3^p \quad (3)$$

$$m_1^p = \hat{m}_1^p - \alpha_3^p \hat{f}_2^p \quad (4)$$

$$m_2^p = \hat{m}_2^p + \alpha_3^p \hat{f}_1^p \quad (5)$$

ただし、 α_3^p は接合線の X_3 座標であり、通常は $\alpha_3^p = \pm h^p/2$ である。ただし h^p は弾性板の板厚である。一方リブに作用する荷重は、 x_1 軸において作用する荷重として、次のように表される。

$$f_1^r = l_1 \hat{f}_1^r + l_2 \hat{f}_2^r \quad (6)$$

$$f_2^r = -l_2 \hat{f}_1^r + l_1 \hat{f}_2^r \quad (7)$$

$$f_3^r = \hat{f}_3^r \quad (8)$$

$$m_1^r = l_1 \hat{m}_1^r + l_2 \hat{m}_2^r + \alpha_3^r l_2 \hat{f}_1^r - \alpha_3^r l_1 \hat{f}_2^r \quad (9)$$

$$m_2^r = -l_2 \hat{m}_1^r + l_1 \hat{m}_2^r + \alpha_3^r l_1 \hat{f}_1^r + \alpha_3^r l_2 \hat{f}_2^r \quad (10)$$

ただし、 (l_1, l_2) は接合線の単位方向ベクトルの X_1, X_2 成分、 α_3^r は接合線の x_3 座標であり、通常は $\alpha_3^r = \pm h^r/2$ である。ただし h^r はリブの高さである。以上のように表される線分布荷重の作用する弾性板およびリブを解析することとなる。

2.1. 弾性板の曲げ変形に対する積分方程式

弾性板に作用する荷重は、既知の分布圧力や分布モーメント、そしてリブとの接合線で生じる線分布力および線分布モーメントである。一様分布力に対しては、その領域積分は弾性板境界積分へと変換でき^{(10),(11)}、また線分布荷重に対しては、接合線上のみの線積分で評価できるため、離散化を行うのは弾性板境界と接合線のみで良い。

弾性板の曲げ変形に対し、分布力 F および X_i 軸まわりの分布モーメント M_i ($i = 1, 2$) を受ける弾性板を考える。この弾性板中央面のたわみ W に関する支配微分方程式は次式で与えられる。

$$D \nabla^4 W - F + \epsilon_{ij} M_{i,j} = 0, \quad x \in \Omega \quad (11)$$

ただし ∇^4 は重調和作用素である。下付き添え字 $i, j = 1, 2$ は総和規約に従い、コンマの後の添え字はその座標での微分を表す。 D は曲げ剛性、 ϵ_{ij} は交代記号であり、それぞれ以下の式で表される。

$$D = \frac{E^p (h^p)^3}{12 \{1 - (\nu^p)^2\}} \quad (12)$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ただし、 E^p, h^p, ν^p はそれぞれ弾性板の Young 率、板厚、Pois-

son 比である。

直接法に基づく境界要素法により平板の古典理論を解析するためには、次の正則化された積分方程式を用いることができる^{(12)~(16)}。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[W^* V_n - \Theta_n^* M_n + M_n^* \Theta_n - V_n^* \{ W - W(y) \} \right] ds \\ & + \sum_{k_c=1}^{N_c} \left[M_{nt}^* \{ W - W(y) \} - W^* M_{nt} \right]_{k_c} \\ & + \int_{\Omega} W^* F d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \frac{\partial W^*}{\partial x_j} M_i d\Omega = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

ただし、 n_i は弾性板境界における外向き単位法線ベクトルの成分、 k_c はかど点をカウントする自然数、 $\sum []$ は、括弧内のかど点における不連続量の全かど点数 N_c に関する総和を意味する。また、 $\Theta_n, M_n, M_{nt}, V_n$ はそれぞれ法線方向たわみ勾配、曲げモーメント、ねじりモーメント、相当せん断力である。また、 W^* は式 (11) の基本解であり、 $\Theta_n^*, M_n^*, M_{nt}^*$ は基本解 W^* から定義される関数である。

また、通常の境界要素法による弾性板の解析と同様に、たわみおよびたわみ勾配に関する積分方程式を用いることにする。たわみ勾配に関する正則化された積分方程式は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial W^*}{\partial y_k} V_n - \frac{\partial \Theta_n^*}{\partial y_k} M_n + \frac{\partial M_n^*}{\partial y_k} \{ \Theta_n - W_{,i}(y) n_i \} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial V_n^*}{\partial y_k} \{ W - W(y) - r_i W_{,i}(y) \} \right] ds \\ & + \sum_{k_c=1}^{N_c} \left[\frac{\partial M_{nt}^*}{\partial y_k} \{ W - W(y) - r_i W_{,i}(y) \} - \frac{\partial W^*}{\partial y_k} M_{nt} \right]_{k_c} \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial W^*}{\partial y_k} F d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \frac{\partial^2 W^*}{\partial y_k \partial x_j} M_i d\Omega = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

弾性板における積分方程式を立てる際には、上式によって計算されるたわみ勾配 $W_{,i}(y)$ を法線方向たわみ勾配 $\Theta_n(y)$ と関連づけた境界積分方程式を用いる。以上の積分方程式に関する詳細は文献を参照されたい^{(8),(12)~(16)}。

2.2. 弾性板の面内変形に対する積分方程式

面内変形すなわち平面応力状態における変位場に対し、境界上の変位と表面力を関係づける境界積分方程式は Somigliana の公式を元に導出される⁽¹⁷⁾。

$$\begin{aligned} c_{ij} U_i(y) + \int_{\Gamma} T_{ij}^* U_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^* T_i d\Gamma + \int_{\Gamma_c} U_{ij}^* \frac{f_i^p}{h^p} d\Gamma_c, \\ i, j = 1, 2 \quad (16) \end{aligned}$$

ただし、 U_i, T_i ($i = 1, 2$) はそれぞれ変位、表面力であり、上付きアスタリスク (*) はそれらに対する基本解であることを示す。これらの具体形は参考文献を参照されたい⁽¹⁷⁾。 c_{ij} はソース点 y の置かれる境界形状に依存する定数であり、ソース点 y が領域内部に位置するとき δ_{ij} である。

2.3. リブの引張り変形に対する積分方程式

リブに対して分布力として作用する f_1^r により、リブの引張り変形が生じる。この変形に対し、支配微分方程式は次式で与えられる⁽¹⁷⁾。

$$E^r A \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + f_1^r = 0, \quad x_1 \in [0, L] \quad (17)$$

ただし、 E^r はリブのヤング率、 A はリブの断面積、 u_1 はリブの局所座標系における x_1 方向の変位、 L はリブの長さである。内点 y における x_1 方向変位 u_1 に対する積分方程式は次のように与えられる。

$$u_1(y) = [u_1^* v_1]_0^L - [v_1^* u_1]_0^L + \int_0^L u_1^* f_1^r dx, \quad y \in (0, L) \quad (18)$$

ただし、 $u_1^*(x_1, y)$ は支配微分方程式 (17) の基本解、 v_1 はリブ横断面に生じる引張り力、 v_1^* は引張り力に関する基本解である。上式においてソース点 y を境界へ移動することにより、境界上の変位 u_1 とその他の諸量を関係づける積分方程式が得られる。

2.4. リブの曲げ変形に対する積分方程式

リブに作用する分布荷重 f_3^r および m_2^r により $x_1 x_3$ 平面内の曲げが、また f_2^r により $x_1 x_2$ 平面内での曲げが生じる。一般的に、分布力 \bar{f} および分布モーメント \bar{m} が作用するリブの曲げに関する支配微分方程式は次式で与えられる⁽¹⁸⁾。

$$E^r I \frac{d^4 u}{dx_1^4} - \bar{f} - \frac{d\bar{m}}{dx_1} = 0, \quad x_1 \in [0, L] \quad (19)$$

ただし、 E^r はリブの Young 率、 I はリブ断面の断面二次モーメント、 u はリブのたわみである。

このようなリブの内部の点 y におけるたわみに関する積分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(y) = [u^* v]_0^L - [\vartheta^* m]_0^L + [m^* \vartheta]_0^L - [v^* u]_0^L \\ + \int_0^L (u^* \bar{f} - \vartheta^* \bar{m}) dx_1, \quad y \in (0, L) \quad (20) \end{aligned}$$

ただし、 ϑ はたわみ勾配、 m は曲げモーメント、 v はせん断力であり、 u^* は式 (19) の基本解であり、 ϑ^*, m^*, v^* は、変位に関する基本解 u^* により定義される関数である。

弾性板の静的曲げにおける定式化と同様、たわみ勾配に関する積分方程式は、式 (20) をソース点の座標 y で微分することで得られる。

$$\begin{aligned} \frac{du(y)}{dy} = \left[\frac{\partial u^*}{\partial y} v \right]_0^L - \left[\frac{\partial \vartheta^*}{\partial y} m \right]_0^L + \left[\frac{\partial m^*}{\partial y} \vartheta \right]_0^L - \left[\frac{\partial v^*}{\partial y} u \right]_0^L \\ + \int_0^L \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \bar{f} - \frac{\partial \vartheta^*}{\partial y} \bar{m} \right) dx_1, \quad y \in (0, L) \quad (21) \end{aligned}$$

これらの積分方程式を元に必要となる積分方程式を導出する。

2.5. リブのねじり変形に対する積分方程式

リブに対して作用する分布ねじりモーメント m_1^r により、リブのねじり変形が生じる。この変形に対し、支配微分方程式は次式で与えられる⁽¹⁷⁾。

$$G^r I_1 \frac{d^2 \varphi}{dx_1^2} + m_1^r = 0, \quad x_1 \in [0, L] \quad (22)$$

ただし、 G^r はリブの横弾性係数、 I_1 はリブの x_1 軸周りの断面二次極モーメント、 φ はリブの局所座標系における x_1 軸まわりの回転角である。

リブのねじり変形に対しては、引張り変形と同様の定式化を行うため、ここでは省略する。

2.6. 接合線における力の釣り合い式

これまでの積分方程式には、すべて線分布荷重の線積分が含まれる。接合線上のある一点を考えた場合、弾性板に作用する線分布荷重成分5つ、リブに作用する線分布荷重成分5つの計10個の未知数が余計に含まれているが、作用反作用の関係から、接合線上で独立な線分布荷重成分は5つである。

$$\hat{f}_i^p + \hat{f}_i^r = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

$$\hat{m}_i^p + \hat{m}_i^r = 0, \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

2.7. 接合線における変位および回転角の連続の式

接合線で独立な荷重成分を5つ考慮していることから、5つの式を準備する必要がある。本研究では接合線上での変位3成分および X_1, X_2 軸まわりの回転角を用いることにする。

弾性板において、接合線上の全体座標系での変位 \hat{U}_i ($i = 1, 2, 3$) は Kirchhoff の仮定^{(9),(19)}に基づき、次のように与えられる。

$$\hat{U}_1 = U_1 - \alpha_3^p \frac{\partial W}{\partial X_1} \quad (25)$$

$$\hat{U}_2 = U_2 - \alpha_3^p \frac{\partial W}{\partial X_2} \quad (26)$$

$$\hat{U}_3 = W \quad (27)$$

ただし、 (U_1, U_2, W) は弾性板中立面での変位成分である。これらの変位成分は式(16)および(14)により、またたわみ勾配成分は式(15)により、境界上の諸量および線分布荷重と関係づけることができる。同様に、全体座標系での接合線上の回転角成分 $\hat{\Theta}_i$ ($i = 1, 2$) は次式で表される。

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{\partial W}{\partial X_2} \quad (28)$$

$$\hat{\Theta}_2 = -\frac{\partial W}{\partial X_1} \quad (29)$$

上式に含まれるたわみ勾配成分に対しては、式(15)を用いることができる。

一方、リブの諸量は局所座標系で表されるため、局所座標系での変位成分を全体座標系へと変換する必要がある。接合

線上の全体座標系での変位成分 \hat{u}_i ($i = 1, 2, 3$) は次のように与えられる。

$$\hat{u}_1 = l_1 u_1 - \alpha_3^r l_1 \frac{du_3}{dx_1} - l_2 u_2 + \alpha_3^r l_2 \varphi \quad (30)$$

$$\hat{u}_2 = l_2 u_1 - \alpha_3^r l_2 \frac{du_3}{dx_1} + l_1 u_2 - \alpha_3^r l_1 \varphi \quad (31)$$

$$\hat{u}_3 = u_3 \quad (32)$$

ただし、 u_i ($i = 1, 2, 3$) は局所座標系でのリブ中立面の変位成分、 φ は x_1 軸周りの回転角である。これらの諸量はすべて境界積分方程式により、リブの境界量および線分布荷重と関係づけることができる。また、リブの接合線上での回転角は次のように表される。

$$\hat{\theta}_1 = l_1 \varphi + l_2 \frac{du_3}{dx_1} \quad (33)$$

$$\hat{\theta}_2 = l_2 \varphi - l_1 \frac{du_3}{dx_1} \quad (34)$$

以上の式を用いて、たわみおよびたわみ勾配の連続の式は次のように表される。

$$\hat{U}_i - \hat{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (35)$$

$$\hat{\Theta}_i - \hat{\theta}_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (36)$$

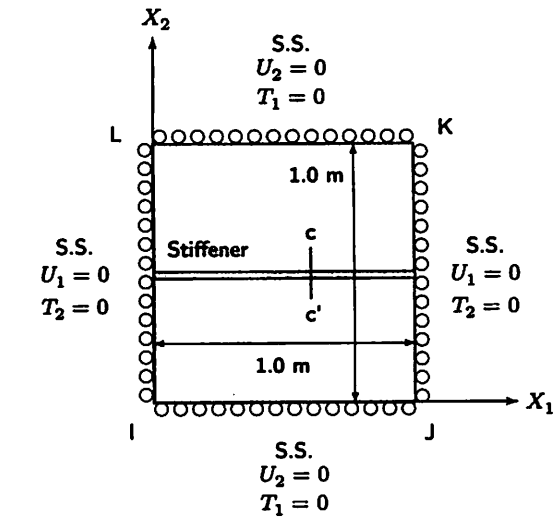
以上のように、接合線上で5つの未知数を設定し、これらを補うための5つの式を準備することができる。面内変形および面外変形に対する境界積分方程式に加え、上記のたわみおよびたわみ勾配の連続の式を連立して解くことで、対象とする補強板の解析を行うことができる。

3. 数値解析例

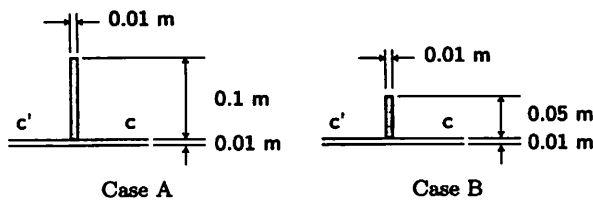
Fig. 2(i) に示すような全周単純支持され、一様分布荷重 1.0 Pa が作用する補強板を考える。なお、弾性板およびリブとも Young 率 $E = 17 \times 10^6$ Pa, Poisson 比 $\nu = 0.3$ を用いた。弾性板部分の境界条件は図中に示す通りであり、リブは両端自由支持された状態で取り付けてある。接合線における線分布荷重を精度良く解析するため、弾性板部分の境界要素は4次要素を用いて一辺5要素に分割し、各線分布荷重は一定要素により10要素に分割した⁽⁸⁾。適合条件式(35)および(36)をこの一定要素の中心で取っているため、これらの適合条件式はすべて、弾性板およびリブそれぞれの内点における変位や回転角に関して関係づける式となる。また、今回は Fig. 2(ii) に示すような二通りのリブを考える。

Fig. 3 に補強板のたわみ形状を、Fig. 4, 5 に補強板中心線でのたわみを示す。また Table 1 に補強板中央でのたわみを示す。McBean の結果と比べ、およそ良い結果が得られているものと思われる。なお McBean は要素内の面内変形と面外変形の変位成分に対し完全多項式に基づいた有限要素を用いた解析を行っている。

Fig. 6~8 に、未知数として直接計算される線分布荷重成



(i) Simply supported square plate with one stiffener



(ii) Two types of cross section of stiffener

Fig. 2 A square plate with all edges simply supported and stiffened along $X_2 = 0.5$ m

Table 1 Deflection W (in meters $\times 10^3$) at the center of the stiffened plate with a stiffener of case A

	McBean ⁽¹⁾	Present
Eccentric	0.1367	0.1403
Concentric	0.4557	0.4553

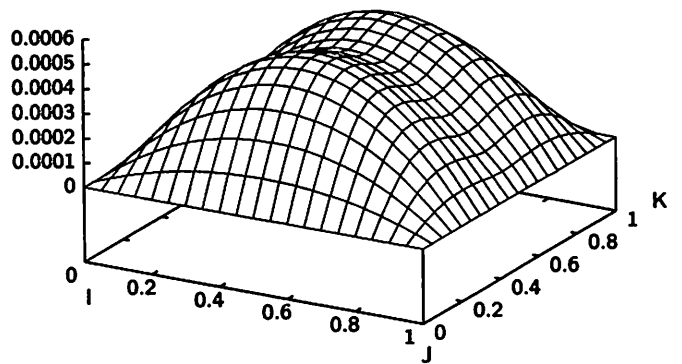
分を示す。ただし、これらの図は解析結果を直線で結んだに過ぎない点に注意していただきたい。

4. 結言

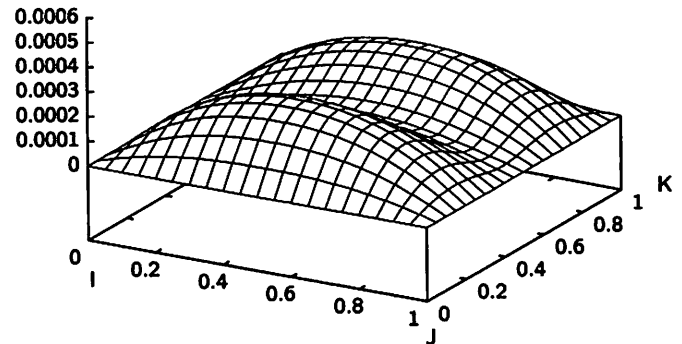
本研究では、弾性板の中立面とリブの中立軸が一致しない偏心補強板の静的曲げ解析に対し、境界要素法および境界積分方程式法に基づいた定式化を行い、開発した解析コードを用いて例題を解析した。弾性板とリブの接合線上で線分布力3成分と線分布モーメント2成分を考慮することで、面内変形と面外変形が連成する問題を解析した。要素分割を行うのは弾性板境界と補強線のみであるため、非常に効率的な解析手法となる。

参考文献

(1) McBean, R. P.: Analysis of stiffened plates by the finite element method, Ph.D. Thesis presented to Stanford University, (1968).



(i) Concentrically stiffened plate



(ii) Eccentrically stiffened plate

Fig. 3 Deflection surface of each stiffened plate with a stiffener of case A

(2) Rossow, M. P., Ibrahimkhail, A. K.: *Computers and Structures*, 8 (1978), pp. 51-60.

(3) Mukhopadhyay, M., Satsangi, S. K.: *The Royal Institution of Naval Architects*, (1983), pp. 141-151.

(4) Harik, I. E., Guo, M.: *Computers and Structures*, 49-6(1993), pp. 1007-1015.

(5) Hu, C., Hartley, G. A.: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13 (1994), pp. 229-238.

(6) Tanaka, M., Bercin, A. N.: *Boundary Elements XIX*, Brebbia, C. A. and Aliabdi, M. H. (eds.), (1997), pp. 203-212, Computational Mechanics Publications.

(7) Sapountzakis, E. J., Katsikadelis, J. T.: *Computational Mechanics*, 23 (1999), pp. 430-439.

(8) 田中正隆, 松本敏郎, 老田昇司: *機論*, 66-649, A(2000-9), pp. 1649-1656.

(9) Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S.: *Theory of plates and shells*, 2nd Ed., (1959), McGraw-Hill.

(10) Costa, J. A., Brebbia C. A.: *Boundary Elements VI*, Brebbia, C. A. (ed.), (1984), pp. 3-43-63, Computational Mechanics Publications / Springer-Verlag.

(11) Hartmann, F.: *Engineering Analysis*, 2-2 (1985), pp. 111-112.

(12) Bézine, G., Gamby, D.: *Recent Advances in Boundary Element Methods*, Brebbia, C. A. (ed.), (1978), pp. 327-342, Pentech Press.

(13) Stern, M.: *International Journal of Solids and Structures*, 15 (1979), pp. 769-782.

(14) Hartmann, F.: *Elastostatic, Progress in Boundary Element Methods*, 1, Brebbia, C. A. (ed.), (1981), pp. 84-167, Pentech Press.

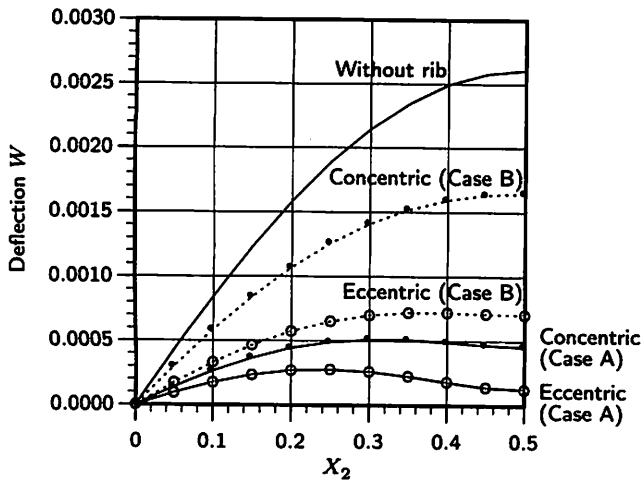


Fig. 4 Deflections along the center line $X_1 = 0.5$

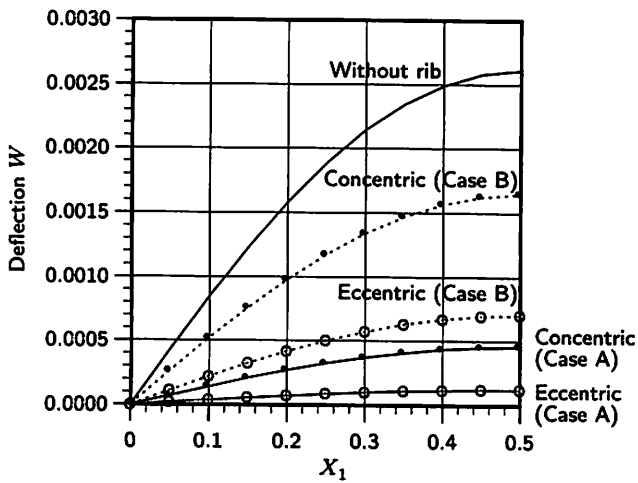


Fig. 5 Deflections along the center line $X_2 = 0.5$

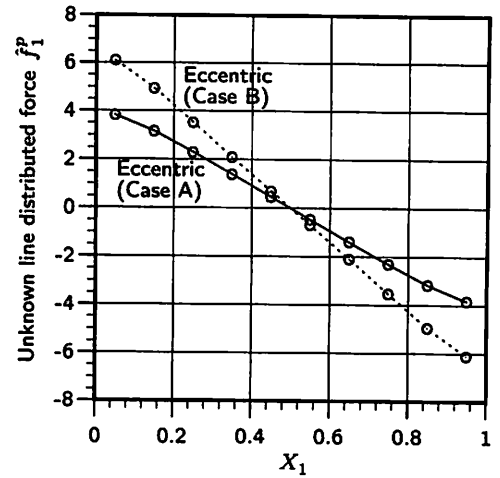


Fig. 6 Variations of f_1^P along the contacting line

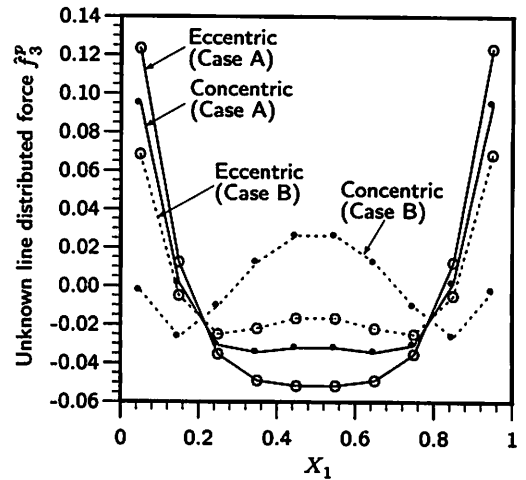


Fig. 7 Variations of f_3^P along the contacting line

- (15) Matsumoto, T., Tanaka, M.: *Singular Integrals in Boundary Element Methods*, Sladek, V. and Sladek J. (eds.), (1998), pp. 263-297, Computational Mechanics Publications.
- (16) 松本敏郎, 田中正隆, 岡山瞬: 機論, 64-628, A (1998), pp. 2906-2913.
- (17) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 1991, 培風館.
- (18) Stern, M.: *Boundary Element Methods in Structural Analysis*, Beskos, D. E. (ed.), (1989), pp. 41-64, American Society of Civil Engineers.
- (19) C. L. Dym, I. H. Shames (著): 砂川恵 (監訳), 材料力学と変分法, 1977, ブレイン図書.

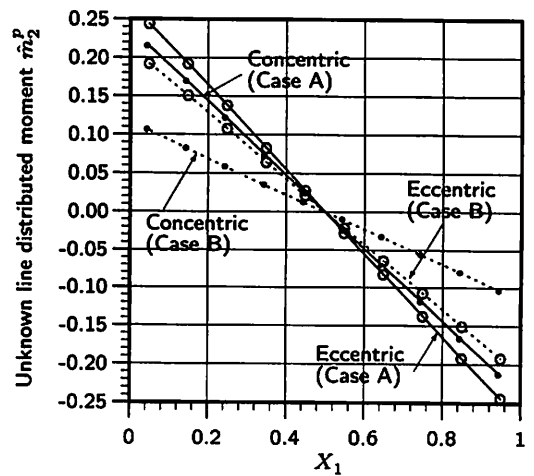


Fig. 8 Variations of m_2^P along the contacting line