

傾斜機能材料の定常熱伝導問題に対する DRM 境界要素法

A DUAL RECIPROCITY BOUNDARY ELEMENT METHOD
APPLIED TO THE STEADY-STATE HEAT CONDUCTION PROBLEM
OF FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS田中 正隆¹⁾, 松本 敏郎²⁾, 須田 裕輔³⁾

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Yusuke SUDA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: yusuke@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper presents a dual reciprocity boundary element method (DRBEM) for solving the steady-state heat conduction problems of functionally gradient materials. The functionally gradient material is modeled as an inhomogeneous one where the heat conduction coefficient is a continuous function of coordinates. The fundamental solution of Laplace differential equation for a homogeneous material is used in the formulation, and hence a domain integral arises. This domain integral is transformed into a boundary integral by using a new set of radial basis functions. The details of the proposed DRBEM are presented, and a computer code is developed for two-dimensional problems. Through numerical demonstration for several examples compared with exact solutions, the usefulness of present approach based on DRBEM is illustrated.

Key Words: Boundary Element Method, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Dual Reciprocity Method, Heat Conduction Problem, Functionally Gradient Material

1. 緒言

傾斜機能材料に代表される非均質材料は、熱伝導率が場所ごとに連続的に変化する特性を持つ非均質媒体としてモデル化することができる^{(1)~(3)}。

境界要素法は、均質な媒体からなる場の問題に対して有効な解析手法であるが、媒体の特性値が場所ごとに変化するような非均質媒体に対しては基本解が求められる場合は限られており、均質媒体の基本解を用いて定式化をしなければならない。このとき、境界積分方程式に非均質性に起因する領域積分項が現れる。そのため、境界だけを要素分割するだけで問題を解決できず、領域内部も要素分割して対象領域全体での温度や熱流束を未知数として含む代数方程式を解かなければならなくなる。あるいは、反復計算による解析を行う必要がある⁽⁴⁾。

本研究では、二重相反法 (DRM)^{(5),(6)} を適用し、非均質性に由来する領域積分項の境界積分への変換を試る。すなわち、DRM を用いると領域積分項を比較的簡単な近似関数と線形微分作用素の特解を用いて境界積分に変換する。近似関数を距離の関数で与えるため、定式化の際、その取り扱い

容易となる。この手法に基づいて定式化をすることによって非均質性を示す項に現れる領域積分を境界積分に置き換え、最終的に境界のみの離散化と領域内に選点を置くことにより効率的な解析が可能となる。本研究においては、この DRM を用いた熱伝導問題の定式化を詳細に示すとともに、熱伝導率が場の関数で表されるようにモデル化した 2 次元問題の例題について数値シミュレーションを行い、本手法の有効性を示す。

2. 理論

2.1. 支配微分方程式

本研究では、場所ごとに熱伝導率が連続的に滑らかに変化する定常熱伝導問題について定式化を行う。支配微分方程式は次式で表される⁽⁷⁾。

$$\nabla \left\{ \lambda(x) \nabla u(x) \right\} = 0 \quad (1)$$

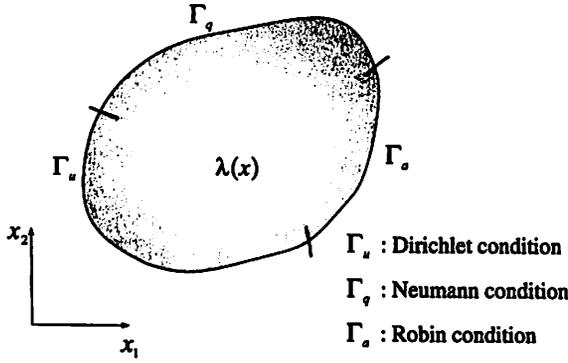


Fig. 1 Heat conduction problem

式(1)において、境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \bar{u}, & x \in \Gamma_u \\ q(x) &= -\lambda(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \bar{q}, & x \in \Gamma_q \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} + h\{u(x) - u_a\} &= 0, & x \in \Gamma_a \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $u(x)$ は温度、 n は境界 Γ 上の単位外向き法線ベクトルであり、 $\partial u(x)/\partial n$ は $u(x)$ の法線方向勾配を意味する。第1式は境界上で温度が与えられている場合、第2式は熱流束が与えられている場合、また第3式は u_a を外部雰囲気温度として熱伝達により熱の授受が行われる場合の境界条件に対応する。また、 \bar{u} 、 \bar{q} はそれぞれ境界において与えられる既知の境界値であり、 h は熱伝達率を表す。式(1)は次式のように展開することができる。

$$\nabla^2 u(x) = -\frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \nabla \lambda(x) \nabla u(x) \right\} \quad (3)$$

式(3)の右辺は非均質性に由来する項である。

2.2. 境界積分方程式の導出

境界積分方程式の導出において、定式化には Laplace 方程式の基本解を用いる。非均質性までも考慮した基本解は一般に求めることが困難であり、表示が簡単な Laplace 方程式の基本解を用いることにより、その取り扱いを容易にすることができる。Laplace 方程式に対する基本解を $u^*(x, y)$ とすると、 $u^*(x, y)$ は次の微分方程式を満足する。

$$\nabla^2 u^*(x, y) + \delta(x - y) = 0 \quad (4)$$

ただし、 $\delta(x - y)$ は2次元の Dirac のデルタ関数、 x 、 y はそれぞれ空間内の1点であり、以降 y をソース点、 x を観測点と呼ぶことにする。上式から得られる基本解 $u^*(x, y)$ は次式で与えられる(4)。

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5)$$

ただし、 r はソース点 y と観測点 x との距離を表す。

支配微分方程式(3)の両辺に基本解 $u^*(x, y)$ を掛け、考察領域全体で積分すると次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \nabla^2 u(x) \right\} u^*(x, y) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left\{ -\frac{1}{\lambda(x)} \nabla \lambda(x) \nabla u(x) \right\} u^*(x, y) d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

上式の左辺を2回部分積分することにより次式を得る。

$$\begin{aligned} c(y)u(y) + \int_{\Gamma} u(x)q^*(x, y)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(x)u^*(x, y)d\Gamma \\ = - \int_{\Omega} \left\{ -\frac{1}{\lambda(x)} \nabla \lambda(x) \nabla u(x) \right\} u^*(x, y) d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $c(y)$ はソース点 y が置かれている境界のなす角度によって決まる係数である。また、 $q^*(x, y)$ は基本解 $u^*(x, y)$ の法線方向勾配を意味し、次式で与えられる。

$$q^*(x, y) = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (8)$$

式(7)右辺に現れる領域積分項を境界積分に変換するために DRM を適用する。

2.3. DRM の適用

式(7)右辺に現れる領域積分項を評価する際、領域内部をセルまたは要素に分割することにより領域積分の評価をする手法(4)が用いられることがあるが、この作業には手間がかかる。そこで、この領域積分項に対して DRM を適用し、境界積分に変換して評価する手法が提案されている(5)。

DRM の定式化では、式(3)の支配微分方程式の右辺を以下のように近似する。

$$-\frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \nabla \lambda(x) \nabla u(x) \right\} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j(x, z^j) \quad (9)$$

ただし、 N は境界節点数、 L は内点数、 α_j は未知係数、 $f_j(x, z^j)$ は近似関数、 z^j は DRM の選点を表す。ここで、近似関数 $f_j(x, z^j)$ は観測点 x と DRM 選点 z^j との距離 r^j の関数である。式(9)を用いると式(3)の支配微分方程式は次式となる。

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j(x, z^j) \quad (10)$$

ここで、次式を満たす特解を $\hat{u}_j(x, z^j)$ とする。

$$\nabla^2 \hat{u}_j(x, z^j) = f_j(x, z^j) \quad (11)$$

上式を式(10)へ代入すると次式を得る。

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \nabla^2 \hat{u}_j(x, z^j) \right\} \quad (12)$$

上式の両辺に基本解を掛け領域全体で積分することにより次式を得る。

$$\int_{\Omega} \{ \nabla^2 u(x) \} u^*(x, y) d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_{\Omega} \nabla^2 \hat{u}_j(x, z^j) u^*(x, y) d\Omega \right\} \quad (13)$$

また、本研究では近似関数として次式を用いる。

$$f_j(x, z^j) = \begin{cases} (1 - r^j)^3(3r^j + 1), & r^j \leq 1 \\ 0, & r^j \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

上式は、Compactly Supported Radial Basis Function⁽⁶⁾と呼ばれる近似関数である。ただし、 r^j は観測点 x とDRM選点 z^j の距離である。基本解に現れる r はソース点 y と観測点 x との距離であり、 r^j とは異なることに注意されたい。また、本研究の定式化では、 $r^j = 0$ において $\partial f_j(x, z^j)/\partial r^j$ が連続である必要があるが、上式を使うとき $r^j = 0$ において $\partial f_j(x, z^j)/\partial r^j$ が連続であることは容易に確認できる。

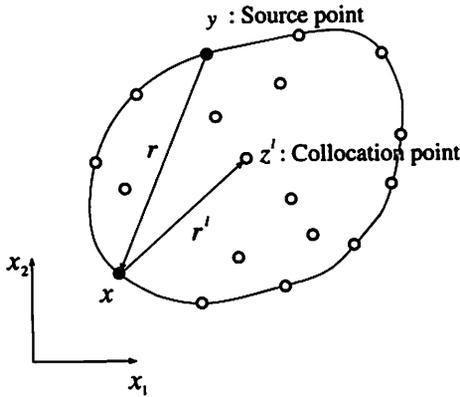


Fig. 2 Collocation points and definition of r and r^j

式(14)を用いた場合、特解 $\hat{u}_j(x, z^j)$ は次式となる。

$$\hat{u}_j(x, z^j) = \frac{1}{4}(r^j)^2 - \frac{3}{8}(r^j)^4 + \frac{8}{25}(r^j)^5 - \frac{1}{12}(r^j)^6 \quad (15)$$

式(13)に対して部分積分を2回行うことにより、左辺については式(7)の左辺と等しく、また右辺については次式を得る。

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j(x, z^j)) u^*(x, y) d\Omega \right\} \\ & = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ c(y) \hat{u}_j(x, z^j) + \int_{\Gamma} q^*(x, y) \hat{u}_j(x, z^j) d\Gamma \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Gamma} u^*(x, y) \hat{q}_j(x, z^j) d\Gamma \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

ただし、 $\hat{q}_j(x, z^j)$ は特解 $\hat{u}_j(x, z^j)$ の法線方向勾配であり次式で表される。

$$\hat{q}_j(x, z^j) = \left(r_1 \frac{\partial x_1}{\partial n} + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial n} \right) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(r^j)^2 + \frac{8}{5}(r^j)^3 - \frac{1}{2}(r^j)^4 \right\} \quad (17)$$

以上により領域積分項がすべて境界積分に変換されていることが確認できる。

ソース点を境界上の各節点及び領域内部の各選点ごとにとることにより $N+L$ 個の方程式が得られ、これをマトリクス形式で表すと次式となる。

$$H\mathbf{u} - G\mathbf{q} = [H\hat{\mathbf{U}} - G\hat{\mathbf{Q}}]\boldsymbol{\alpha} \quad (18)$$

ただし、

$$H_{ij} = c(y^i) \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} q^*(x, y^i) d\Gamma \quad (19)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*(x, y^i) d\Gamma \quad (20)$$

$$\hat{U}_{ij} = \hat{u}_j(x^i, z^j) \quad (21)$$

$$\hat{Q}_{ij} = \hat{q}_j(x^i, z^j) \quad (22)$$

である。ここで、 δ_{ij} はKroneckerのデルタ記号である。

2.4. 未知係数 $\boldsymbol{\alpha}$ の導出

領域積分項を境界積分に変換する際、未知係数と近似関数を用いて定式化を進めてきた。 $f_j(x, z^j)$ は距離の関数で既知関数であるが未知係数 $\boldsymbol{\alpha}$ については近似関数と非均質性を表す項を用いて求める必要がある。式(9)を展開すると次式となる。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j(x, z^j) \\ & = -\frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、 $f_j(x, z^j)$ は既知関数であり全選点 z^j において上式を考えると未知係数 $\boldsymbol{\alpha}$ は次式で表される。

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{K}_1 \mathbf{u}_{x_1} + \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_{x_2}] \quad (24)$$

ただし、

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(x^1, z^1) & \cdots & f_{N+L}(x^1, z^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x^{N+L}, z^1) & \cdots & f_{N+L}(x^{N+L}, z^1) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$K_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda(x)} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{\lambda(x)} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$u_{x_m} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_{L+N}}{\partial x_m} \end{array} \right\} \quad (27)$$

であり F^{-1} は F の逆行列を意味する。

温度 $u(x)$ の座標微分 $\partial u(x)/\partial x_k$ の評価には、次の3つの手法が考えられる。

- 差分近似を用いる方法
- 各節点の状態量を内挿して数値微分する方法
- 近似関数 $f_j(x, z^i)$ を用いる方法

本研究では、一貫して近似関数 $f_j(x, z^i)$ を用いて評価する。このとき、温度 $u(x)$ を次式のように近似関数 $f_j(x, z^i)$ を用いて書き表す。

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j f_j(x, z^i) \quad (28)$$

ここで、 β_j は未知係数である。上式を x_k で微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j \frac{\partial f_j(x, z^i)}{\partial x_k} \quad (29)$$

ただし、2次元の場合 $k=1, 2$ である。式(28)、(29)を全節点 z^i に対して適用し β_j を消去することにより $\partial u(x)/\partial x_k$ を求めることができる。ここで $\partial u(x)/\partial x_k$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j(x, z^i)}{\partial x_k} &= \frac{\partial f_j(x, z^i)}{\partial r^i} \frac{\partial r^i}{\partial x_k} \\ &= \frac{r_k^i}{r^i} \left\{ -12r^i + 24(r^i)^2 - 12(r^i)^3 \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、上式において r_k^i は r^i の x_k 方向成分を表す。

以上の操作により得られる未知係数 α_j はマトリクス形式で次式のように表される。

$$\alpha = F^{-1} \left[\left(K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2} \right) F^{-1} u \right] \quad (31)$$

ただし、

$$F_{x_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^1, z^1)}{\partial x_k} & \cdots & \frac{\partial f_{N+L}(x^1, z^1)}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1(x^{N+L}, z^1)}{\partial x_k} & \cdots & \frac{\partial f_{N+L}(x^{N+L}, z^1)}{\partial x_k} \end{bmatrix} \quad (32)$$

である。

式(31)を式(18)に代入することにより次式を得る。

$$Hu - Gq = [H\hat{U} - G\hat{Q}]Ru \quad (33)$$

ただし、 R を次式のようにおいた。

$$R = F^{-1} \left[\left(K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2} \right) F^{-1} \right] \quad (34)$$

さらに次式のようにまとめることができる。

$$[H - S]u = Gq \quad (35)$$

ただし、

$$S = [H\hat{U} - G\hat{Q}]R \quad (36)$$

である。式(35)の式の数は $N+L$ 個あり、これより N 個の境界上の未知量と L 個の内点の未知温度を与えられた境界条件のもとで求めることができる。

3. 数値解析例

本手法の有効性を示すために、以下の例題解析を行い、得られた結果について考察を行う。

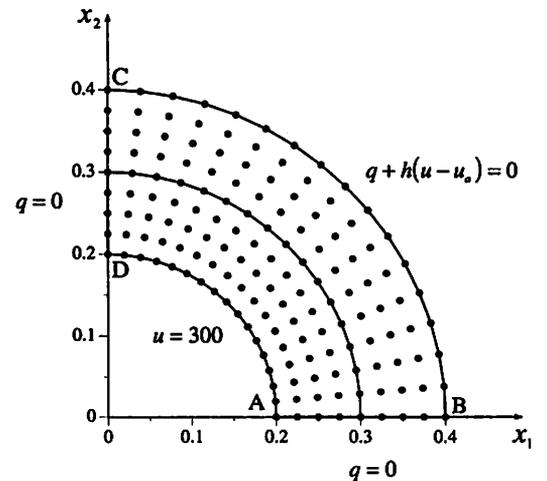


Fig. 3 Analysis model and discretization

Fig. 3 に示すような二重円筒モデルについて解析を行う。このモデルでは、熱伝導率は半径方向にだけ変化するものとし、対称性から断面の1/4部分を解析する。熱伝導率の変化

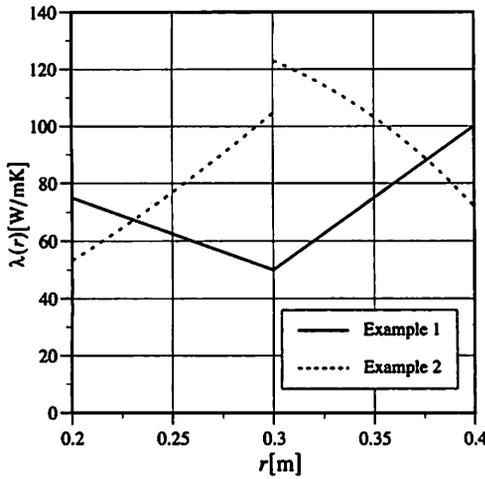


Fig. 4 Variations of thermal conductivity

は Fig. 4 に示されるものであるとし、変化特性が異なる2つの部分領域に分けて解析を行う。それぞれの部分領域の境界を Fig. 3 に示すような節点配置で2次境界要素に分割し、内点は各部分領域ごとに45個ずつ図示のようにとる。対称性から x_1, x_2 軸上では断熱境界条件に従う。円筒の内面では温度が与えられているものとし、外面では u_a を外部雰囲気温度として熱伝達により熱の授受が行われるものとする。また、各領域の界面では温度の連続条件と熱流束の釣り合い条件を用いる。今回は、熱伝導率が次式で変化する2つの例題について考える。

• Example 1

$$\lambda(r) = \begin{cases} 125 - 250r, & 0.2 \leq r \leq 0.3 \\ -100 + 500r, & 0.3 \leq r \leq 0.4 \end{cases} \quad (37)$$

• Example 2

$$\lambda(r) = \begin{cases} 100r + 830r^2, & 0.2 \leq r \leq 0.3 \\ 1100r - 2300r^2, & 0.3 \leq r \leq 0.4 \end{cases} \quad (38)$$

また、外部雰囲気温度を $u_a = 20$ 、円筒外面における熱伝達率を $h = 20$ と仮定し解析を行う。Fig. 5~7 はこの例題について、解析結果と厳密解を比較して示す。ここで、厳密解は次式を解くことにより求めることができる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r)}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\lambda(r)} \frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} \frac{\partial u(r)}{\partial r} \quad (39)$$

Example 1 のように熱伝導率の変化を与えた場合、その関数を $\lambda(r) = a + br$ とすると厳密解は次式となる。

$$u(r) = C_1 + C_2 \ln\left(\frac{a + br}{r}\right) \quad (40)$$

また、Example 2 のように熱伝導率の変化を与えた場合、そ

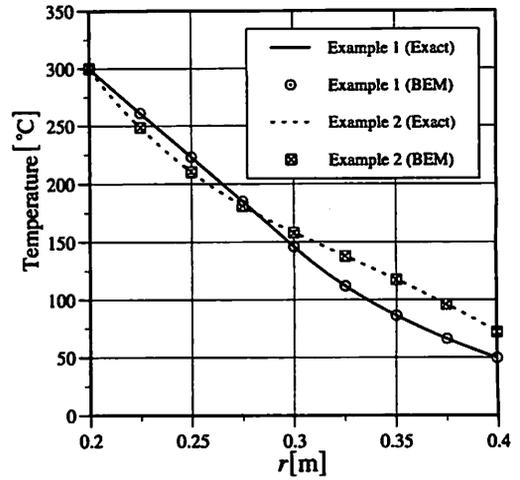


Fig. 5 Temperature on axis x_1

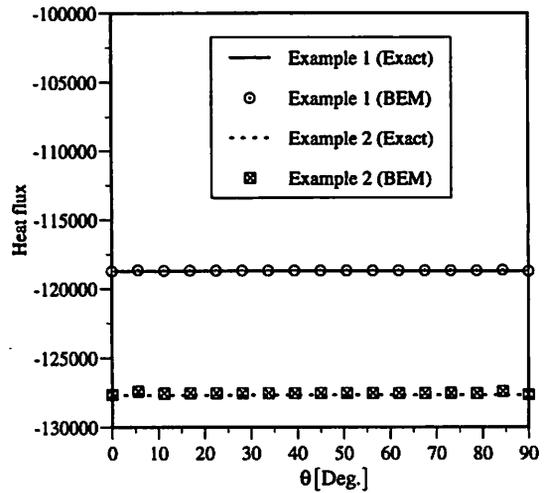


Fig. 6 Heat flux along AD

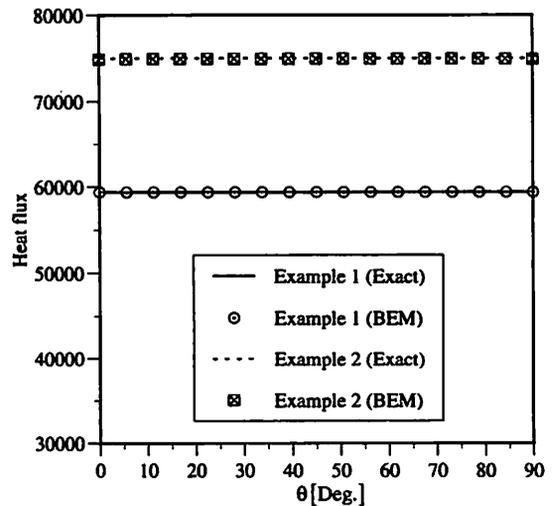


Fig. 7 Heat flux along BC

の関数を $\lambda(r) = cr + dr^2$ とすると厳密解は次式となる.

$$u(r) = C_3 + C_4 \left\{ d \ln \left(\frac{c + dr}{r} \right) - \frac{c}{r} \right\} \quad (41)$$

ただし, $C_1 \sim C_4$ は境界条件より求められる積分定数である.

Fig. 5 から, 解析結果を見ると, 温度の解析結果は十分よい精度の結果が得られていることがわかる. Fig. 5 は x_1 軸上の解析結果であるが, x_2 軸上や内点においてもよい結果が得られていることを確かめている. このことより, 熱伝導率の変化がかなり違っていても計算結果の精度にはほとんど影響がないと言える. Fig. 6, 7 は熱流束の解析結果であるが, 厳密解に近い値が得られている. 境界上の節点を多くとることによりこの精度はさらに向上することが確かめられている.

4. 結言

傾斜機能材料の定常熱伝導問題に対する二重相反境界要素法について検討した. 開発した解析プログラムにより例題について数値計算を行い, 本手法により精度のよい解が求められることを確認できた. 2次元問題のいくつかの例題から, 熱伝導率の場所的变化が大きい場合は, 領域内部の選点数を増やす必要がある. この種のメッシュレス評価により境界要素法が有効利用できる範囲を広げることができたとと言える. 本研究では2次元問題について考察してきたが, 今後3次元問題について研究を進める予定である.

参考文献

- (1) 北篠英光 (編): 複合化と材料, 裳華房, 1993.
- (2) 上田整: マイクロメカニカルモデルによる傾斜機能材料の熱衝撃応答解析, 機論 (A), **66**-648, pp. 1453-1460 2000.
- (3) 須見義信, 赤井富一, 笠井輝明: 不均質性を有する平板の一次元非定常熱伝導・熱応力問題, 機論 (A), **61**-583, pp. 607-613 1995.
- (4) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, 1991.
- (5) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, and L.C. Wrobel: The Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Computational Mechanics Publications*, 1992.
- (6) C.S. Chen, C.A. Brebbia, and H. Power: Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions, *Commun. Numer. Meth. Engng.* **15**, pp. 137-150, 1999.
- (7) Shi-Jun Liao, Allen. T. Chwang: General Boundary-Element Method For Unsteady Nonlinear Heat Transfer Problems, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **35**, pp. 225-242, 1999.