

## 熱弾性問題における二重相反境界要素法に関する検討

A STUDY ON THERMOELASTIC ANALYSIS USING DUAL RECIPROCALITY BOUNDARY  
INTEGRAL FORMULATION岡山 瞬<sup>1)</sup>, 松本 敏郎<sup>2)</sup>, 田中 正隆<sup>3)</sup>

Shun OKAYAMA, Toshiro MATSUMOTO and Masataka TANAKA

- 1) 信州大学大学院工学系研究科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: shun@artist.shinshu-u.ac.jp)  
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 3) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

The boundary integral representation for thermoplastic problems involves a domain integral term originated from the thermal strain. The dual-reciprocity method (DRM) is well-known as one of the techniques to convert such a domain integral term to a boundary integral. In DRM, an approximate function (radial basis function) is important to obtain accurate numerical solutions. In this paper, thermal strain distribution is approximated by using compactly supported radial basis function. The effectiveness of the present method is demonstrated through a numerical example.

**Key Words:** Boundary Element Method, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Dual Reciprocity Method, Thermoplasticity, Compactly Supported Radial Basis Function

## 1. 緒言

境界要素法解析における利点の一つとして、線形問題において境界積分のみで解析を行えることが挙げられる。しかしながら、初期ひずみや物体力が存在する弾性体の解析などにおいては、線形問題であってもこれらに対する領域積分を計算する必要がある。そこで領域積分を境界積分へ変換する方法として、静弾性問題では、Galerkin テンソルを用いて領域積分を解析的に境界積分に変換する方法<sup>(1)</sup>が提案されている。また、内部発熱を含む熱負荷などの任意の物体力については、二重相反法<sup>(2)</sup>や多重相反法<sup>(3)</sup>により領域積分を境界積分に変換する方法が提案されている。

二重相反法は、支配微分方程式の非同次項を適当な関数によって表し、その特解を使用して領域積分を境界積分へ変換する手法である。多重相反法と異なり、近似関数の境界における高次導関数を必要とせず、相反定理の適用の回数も限定されることから、比較的少ない計算コストで解析を行うことができる。ここで用いられる近似関数は、多項式を用いた場合、特解を一意に決定することができないため、距離関数(Radial Basis Function)の重ね合わせによるものが用いられる。DRMの解析精度には、節点数やその配置などが影響するが、このRadial Basis Functionの選択もその一つの要因となっている。また、通常使用されるRadial Basis Function

は領域全体に対して適用されるため、節点数の増加に伴って計算時間も増加する。Chen<sup>(4)</sup>はポテンシャル問題において任意の点の周辺のみ作用する局所的な距離関数(Compactly Supported Radial Basis Function)を用いて解析を行っている。特に、Wendland<sup>(5)</sup>が示した関数を用い、計算時間と精度の比較から有効性を示している。

本報では、初期ひずみを含む弾性問題の例として二次元熱弾性問題を取り扱い、二重相反法による解析を行う。そこで、Compactly Supported Radial Basis Functionに対して、DRMで使用する特解を示し、数値計算によって本手法の有効性を検討する。

## 2. 理論

## 2.1. 積分方程式

均質等方性材料における二次元熱弾性問題で使用する支配微分方程式を次式で与える。

$$C_{ijkl}u_{k,l}(x) - D\theta_{,j}(x) = 0 \quad (1)$$

$x$ は領域 $\Omega$ 内の点で、添字はデカルト座標系での成分( $x_1$ あるいは $x_2$ )を表し、コンマの後の添字はその方向での偏微分を表す。また、繰り返し用いる添字は和を取るものとす

る。  $u_i(x)$  は変位、  $\theta(x)$  は温度であり、

$$C_{ijkl} = G \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \quad (2)$$

$$D = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \kappa. \quad (3)$$

ただし、  $G$  は横弾性係数、  $\nu$  は Poisson 比、  $\kappa$  は線形熱膨張係数、  $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。

このとき、点  $y$  の変位  $u_j(y)$  を関係づける正則化された積分方程式は次式で与えられる。

$$\int_{\Gamma} u_{jm}^*(x, y) t_j(x) d\Gamma_x - \int_{\Gamma} t_{jm}^*(x, y) (u_j(x) - u_j(y)) d\Gamma_x + D \int_{\Omega} u_{i,mi}^*(x, y) \theta(x) d\Omega_x = 0, \quad y \in \Gamma \cup \Omega \quad (4)$$

ここで、  $t_j(x)$  は表面力、  $u_{jm}^*(x, y)$  は二次元静弾性問題における基本解であり、Dirac のデルタ関数を  $\Delta(x-y)$  としたときに、

$$C_{ijkl} u_{km,i}^*(x, y) = -\delta_{jm} \Delta(x-y) \quad (5)$$

を満足する平面ひずみ状態のときの  $u_{jm}^*(x, y)$  の具体形は次式となる。

$$u_{jm}^*(x, y) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \delta_{jm} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,j} r_{,m} \right] \quad (6)$$

また、  $t_{jm}^*(x, y)$  は  $u_{jm}^*(x, y)$  に関係づけられる表面力として次式で表される。

$$t_{jm}^*(x, y) = C_{ijkl} u_{km,i}^*(x, y) n_i(x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{jm} + 2r_{,j} r_{,m}] r_{,k} n_k + (1-2\nu)(r_{,j} n_m - r_{,m} n_j) \right\} \quad (7)$$

ただし、  $r$  は点  $x$  と点  $y$  の間の距離  $|x-y|$ 、  $n_i \equiv n_i(x)$  は境界上の単位法線ベクトルである。

## 2.2. 二重相反法

式 (4) の領域積分項について二重相反法を適用する。まず、次のような部分積分を行う。

$$\int_{\Omega} u_{im,i}^*(x, y) \theta(x) d\Omega_x = \int_{\Gamma} u_{im}^*(x, y) n_i(x) \theta(x) d\Gamma_x - \int_{\Omega} u_{im}^*(x, y) \theta_{,i}(x) d\Omega_x \quad (8)$$

ここで、温度勾配  $\theta_{,i}(x)$  を次式で近似する。

$$\theta_{,i}(x) = \sum_{l=1}^{N+L} \alpha_l^i f(x, z^l) \quad (9)$$

ただし、  $\alpha_l^i$  は定数、  $f(x, z^l)$  はある Radial Basis Function であり、点  $x$  と境界上で  $N$  個および領域内部で  $L$  個選択され

た点  $z^l$  との間の距離  $r = |x - z^l|$  で表される関数を与える。このとき、次の微分方程式の特解  $\bar{u}_{kn}^*(x, z^l)$  を考える。

$$C_{jikl} \bar{u}_{kn,lj}^*(x, z^l) = \delta_{in} f(x, z^l) \quad (10)$$

これを式 (8) に代入し、部分積分を 2 回繰り返すと式 (5) を用いると、次式のように領域積分はすべて境界積分に変換することができる。

$$\int_{\Omega} u_{im}^*(x, y) \theta_{,i}(x) d\Omega_x = \sum_{l=1}^{N+L} \alpha_l^i \left[ \int_{\Gamma} u_{im}^*(x, y) \bar{t}_{in}^*(x, z^l) d\Gamma_x - \int_{\Gamma} t_{km}^*(x, y) (\bar{u}_{kn}^*(x, z^l) - \bar{u}_{kn}^*(y, z^l)) d\Gamma_x \right] \quad (11)$$

ただし、  $\bar{t}_{in}^*(x, z^l) = C_{jikl} \bar{u}_{kn,lj}^*(x, y) n_j(x)$  である。

## 2.3. Radial Basis Function

二重相反法では、Radial Basis Function  $f(x, z^l)$  の選択が近似精度に影響をおよぼす。例えば、次に示すような関数がこれまでに提案されている。

$$f(x, z^l) = 1 + r \quad (12)$$

$$f(x, z^l) = r^2 \ln r \quad (13)$$

$$f(x, z^l) = \sqrt{c^2 + r^2}, \quad c > 0 \quad (14)$$

$$f(x, z^l) = \exp(-c^2 r^2), \quad c > 0 \quad (15)$$

これまでの手法においては、近似関数に含まれるパラメータの解析結果への影響や、用いる選点数の増加に伴う計算コストの増加などの問題がある。また、近似関数が節点間の距離で定義されることから、無次元化を行う必要がある。

式 (9) における点  $x$  の温度勾配  $\theta_{,i}(x)$  の決定には、点  $x$  から距離  $a$  の範囲の  $\alpha_l^i$  が影響するとして、次の条件を満足する  $f(x, z^l)$  を選択する。

$$f(x, z^l) = \begin{cases} F(r), & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (16)$$

例えば、式 (16) を満足する  $F(r)$  として、次式が考えられる。

$$F(r) = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^m, \quad m \in N \quad (17)$$

このとき  $F(r)$  は、  $m=1$  の場合を除き  $r=a$  においてその一階微分値が 0 であり、  $f(r)$  は連続である。さらに、Chen ら (4) は Table 1 に示すような Wendland (5) が示した特殊な関数を用いて解析を行っている。

特解  $\bar{u}_{kn}^*(x, z^l)$  および  $\bar{t}_{kn}^*(x, z^l)$  を導出する。式 (17) も Table 1 に示した関数も  $(r/a)^m$  の線形結合で表すことができる。そこで、  $F(r) = (r/a)^m$  として、式 (10) からそれぞれの特解  $\bar{u}_{kn}^*(x, z^l)$  を求めて、その線形結合で式 (17) や Table 1 に示した  $F(r)$  の場合の特解  $\bar{u}_{kn}^*(x, z^l)$  を与える。

Table 1 Wendland's Positive Definite and Compactly Supported Radial Basis Functions

$d = 1$	$F(r) = (1 - \bar{r})$	$C^0$
	$F(r) = (1 - \bar{r})^3(3\bar{r} + 1)$	$C^2$
	$F(r) = (1 - \bar{r})^5(8\bar{r}^2 + 5\bar{r} + 1)$	$C^4$
$d = 3$	$F(r) = (1 - \bar{r})^2$	$C^0$
	$F(r) = (1 - \bar{r})^4(4\bar{r} + 1)$	$C^2$
	$F(r) = (1 - \bar{r})^6(35\bar{r}^2 + 18\bar{r} + 3)$	$C^4$
	$F(r) = (1 - \bar{r})^8(32\bar{r}^3 + 25\bar{r}^2 + 8\bar{r} + 1)$	$C^6$

where  $\bar{r} = r/a$

$\bar{u}_{kn}^*(x, z^i)$  は、式 (10) の解として基本解の導出と同様の手順で次式から得られる。

$$\bar{u}_{kn}^*(x, z^i) = \frac{1}{G} \left[ \delta_{kn} \phi_{,ii}(x, z^i) - \frac{1}{2(1-\nu)} \phi_{,kn}(x, z^i) \right] \quad (18)$$

$$\nabla^4 \phi(x, z^i) = f(x, z^i) \quad (19)$$

ただし、式 (16) に示すように  $r = a$  で使用する関数が異なるため、特解  $\bar{u}_{kn}^*(x, z^i)$  が  $r = a$  で連続な関数となるように、 $r > a$  の場合については特別な計算を行う。まず、 $\phi(x, z^i)$  は式 (19) から次式で与えることができる。

$$\phi(x, z^i) = \begin{cases} \int_0^r \frac{1}{t} \int_0^t s \int_0^s \frac{1}{q} \int_0^q p F(p) dp dq ds dt, & r \leq a \\ \int_0^a \frac{1}{t} \int_0^t s \int_0^s \frac{1}{q} \int_0^q p F(p) dp dq ds dt \\ + \int_a^r \frac{1}{t} \int_0^t s \int_0^s \frac{1}{q} \int_0^q p F(p) dp dq ds dt \\ + \int_a^r \frac{1}{t} \int_a^t s \int_0^s \frac{1}{q} \int_0^q p F(p) dp dq ds dt \\ + \int_a^r \frac{1}{t} \int_a^t s \int_a^s \frac{1}{q} \int_0^q p F(p) dp dq ds dt, & r > a \end{cases} \quad (20)$$

そこで、 $F(r) = (r/a)^m$  として  $\phi(x, z^i)$  を計算して、式 (18) から求めた特解  $\bar{u}_{kn}^*(x, z^i)$  および  $\bar{t}_{in}^*(x, z^i)$  を示す。

$$\bar{u}_{kn}^*(x, z^i) = \begin{cases} \frac{[(2m+7) - (2m+8)\nu] \delta_{kn} - (m+2)r_{,k}r_{,n}}{2(m+2)^2(m+4)(1-\nu)G} r^2 \left(\frac{r}{a}\right)^m, & r \leq a \\ \frac{a^2}{8(m+2)^2(m+4)(1-\nu)Gr^2} \times \\ \left\{ [(m+4)(m+8-8\nu)r^2 - (m+2)a^2] \delta_{kn} \right. \\ \left. + 2(m+2)(m+4)(3-4\nu)r^2 \ln \frac{r}{a} \right\} \delta_{kn} \\ - 2(m+2)[(m+4)r^2 - (m+2)a^2] r_{,k}r_{,n}, & r > a \end{cases} \quad (21)$$

$\bar{t}_{in}^*(x, z^i)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(m+2)(m+4)(1-\nu)r} \left(\frac{r}{a}\right)^m \times \\ \left\{ [(m+3) - (m+4)\nu] \delta_{in} - mr_{,i}r_{,n} \right\} r_{,k}n_k \\ + [(m+3) - (m+4)\nu] r_{,i}n_n \\ - [1 - (m+4)\nu] r_{,n}n_i, & r \leq a \\ \frac{a^2}{2(m+2)(m+4)(1-\nu)r^3} \times \\ \left\{ [(m+4)(1-2\nu)r^2 + (m+2)a^2] \delta_{in} \right. \\ \left. + 2[(m+4)r^2 - 2(m+2)a^2] r_{,i}r_{,n} \right\} r_{,k}n_k \\ + [(m+4)(1-2\nu)r^2 + (m+2)a^2] r_{,i}n_n \\ - [(m+4)(1-2\nu)r^2 - (m+2)a^2] r_{,n}n_i, & r > a \end{cases} \quad (22)$$

#### 2.4. 温度勾配 $\theta_{,i}(x)$ の取扱い

温度勾配  $\theta_{,i}(x)$  は、温度場が境界要素法によって解析されていれば、温度勾配に関する積分恒等式から計算を行うことができる。また、境界上の節点であれば流れ  $q(x)$  と境界要素によって内挿した温度  $\theta(x)$  を用いて、

$$\theta_{,i}(x) = q(x)n_i(x) + \frac{\partial \theta(x)}{\partial s} s_i(x) \quad (23)$$

として計算することもできる。ただし、 $s_i(x)$  は単位接線ベクトル。また、簡便な方法としては、温度  $\theta(x)$  を式 (9) と同様に未知定数を  $\beta^i$  として、

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{N+L} \beta^i g(x, z^i) \quad (24)$$

のように近似し、これを直接微分することで温度勾配  $\theta_{,i}(x)$  を導くことができる。ただし、関数  $g(x, z^i)$  は 1 階微分が連続となるような関数を用いる必要があり、Table 1 においては、 $C^2$  連続以上のものを選択する必要がある。とのとき、 $g(x, z^i)$  と  $f(x, z^i)$  は必ずしも同じ関数を用いる必要はない。本報での数値実験では、温度勾配  $\theta_{,i}(x)$  は全領域に渡って既知であるとして解析を行う。

#### 3. 数値解析例

解析例として、Fig.1 に示すような 1/4 円筒の問題を考える。内径  $r_a = 2\text{cm}$ 、外径  $r_b = 8\text{cm}$  の平面ひずみ状態にある円筒に、内壁で圧力 5 GPa、温度 200 °C、外壁で圧力 1 GPa、温度 100 °C が負荷された場合を想定する。境界条件は、内壁および外壁で表面力  $t_1(x)$  および  $t_2(x)$ 、 $x_1$  軸上で  $u_2(x) = 0$  および  $t_1(x) = 0$ 、 $x_2$  軸上で  $u_1(x) = 0$  および  $t_2(x) = 0$  として与える。また、全節点において温度  $\theta(x)$  と温度勾配  $\theta_{,i}(x)$  を与えるものとする。物性値は、それぞれヤング率は 210 GPa、ポアソン比は 0.3、線熱膨張係数は熱負荷による効果を大きくするために  $1.0\text{K}^{-1}$  とした。Fig.1 に示すように領域全体に 81 個の節点を取り、境界は 2 次アイソパラメトリック要素で 16 要素 32 節点として離散化した。

Fig. 2に  $F(r) = (1-r)$ , Fig. 3に  $F(r) = (1-r)^3(3r+1)$  を用いた場合における  $x_1$  軸上での表面力  $t_2$  の解析結果を示す.  $a = 0.12$  とした場合は全節点が対象となるためともに精度よく解析できていることがわかる. また, Fig. 3から,  $F(r)$  の影響する範囲を小さくしても解析できることが分かる. ただし,  $a = 0.015$  では Table 1 内のすべての  $F(r)$  において良い結果を得ることはできなかった. これは,  $a = 0.015$  では, 選点間の距離が大きい領域における Radial Basis Function による近似のギャップが生じる場合があるためと考えられる. 以上のことから,  $F(r)$  の選択によって  $a$  を小さくすることは可能であるが, 通常二重相反法の解析と同様に選点を中心とした半径  $a$  の範囲に, ギャップが生じない程度の点が必要となることがわかる.

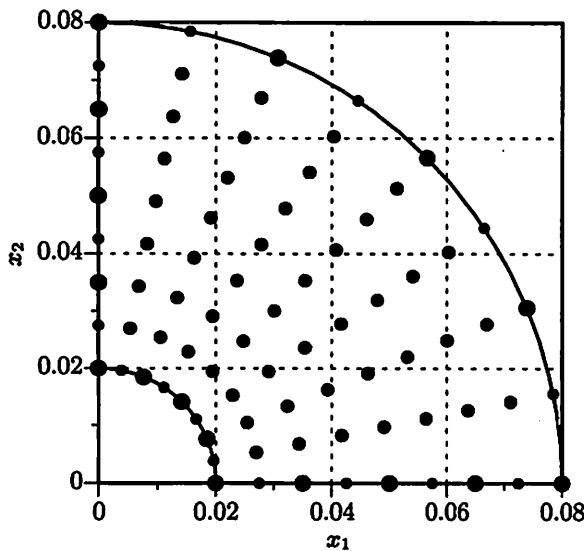


Fig. 1 An example problem

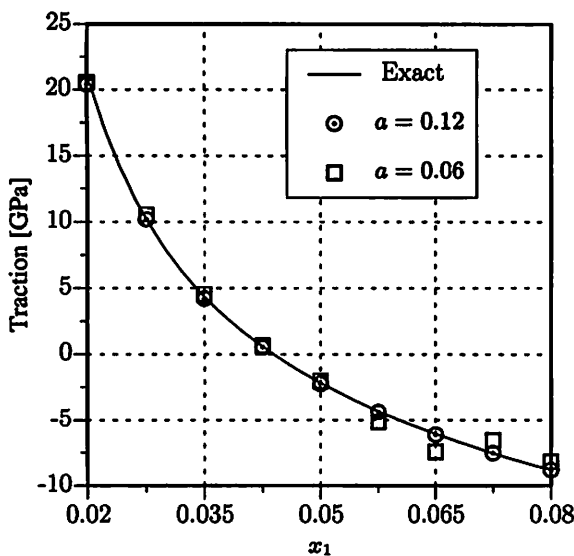


Fig. 2 Traction  $t_2(x)$  along  $x_1$  axis using radial basis function  $(1-r/a)$

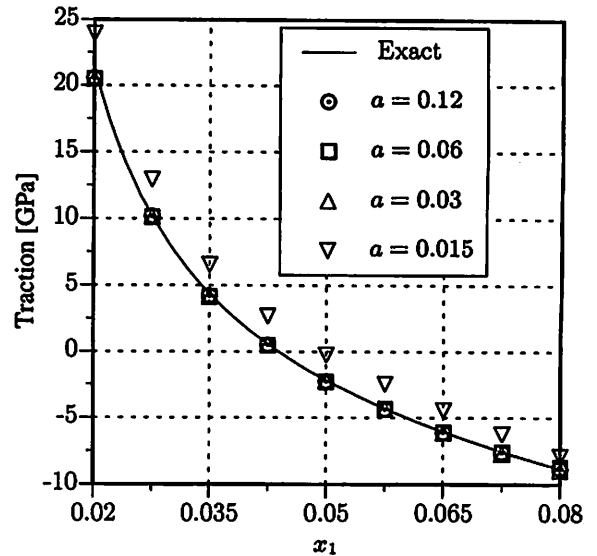


Fig. 3 Traction  $t_2(x)$  along  $x_1$  axis using radial basis function  $(1-r/a)^3(3r/a+1)$

#### 4. 結 言

二次元熱弾性問題について Compactly Supported Radial Basis Function を用いた二重相反法による定式化を行った. Radial Basis Function を用いる際の特解を示し, 数値実験から近似値の決定の範囲を設定して解析できることがわかった. また, 温度勾配  $\theta_{,i}(x)$  の計算に対しても用いることにより, さらに計算負荷の軽減が期待できる.

#### 参考文献

- (1) 例えば, 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, (1994), pp.95-100.
- (2) Partridge, P.W., Brebbia, C.A., Wrobel, L.C.: *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, (1992).
- (3) Nowak, A.J. and Neves, A.C., eds.: *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method* Computational Mechanics Publications, (1994).
- (4) Chen, C.S., Brebbia, C.A. and Power, H.: Dual reciprocity method using compactly supported radial basis functions, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15(1999), pp.137-150.
- (5) Wendland, H.: Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree, *Advances in Computational Mathematics*, 4(1995), pp.389-396.