境界要素法論文集 Vol.17 (2000 年 12 月)　　JASCOME

薄板スプラインを用いた多重相反法の AEM による等高面解析への適用

APPLICATION OF MULTIPLE RECIPROCITY METHOD USING THIN PLATE SPLINE TO LEVEL SET ANALYSIS WITH ANALOG EQUATION METHOD

阿部和久[1)]，岩成洋平[2)]

Kazuhisa ABE and Youhei IWANARI

[1)] 新潟大学工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地，E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)
[2)] 新潟大学大学院　博士前期課程　自然科学研究科環境システム科学専攻

Application of thin plate spline to an approximation function in the Analog Equation Method, which is used to develop a boundary element metod for the analysis of a moving boundary with the level set method, is attempted. The formulation is carried out based on the multiple reciprocity metod(MRM). In this case, since the application of biharmonic operator to the thin plate spline yields a delta function, the number of implementations of the reciprocal theorem in MRM becomes finite. Besides, it will be expected that the linear combination of thin plate splines allows us to approximate a function with high accuracy. Performance of the proposed method is examined through a comparison with the conventional one. It is found that the present method provides good results in spite of small number of internal points.

Key Words : *Evolution of Level Set, Analog Equation Method, Thin Plate Spline, Multiple Reciprocity Method*

1. はじめに

以前，著者らは等高面の方法[1)]による移動境界の解析に，BEM の適用を試みた[2)]．等高面の方法は，関数のゼロ等高面により移動境界を記述するものであり，境界の分裂・結合・消滅などの解析を可能にする．また，これにより移動境界問題は，領域内で与えられた発展方程式の初期値・境界値問題に帰着する．ただし当該問題の支配方程式は，その主要部に非線形項を含む 2 階の準線形偏微分方程式で与えられる．支配方程式が非線形項を含む問題に BEM を適用する際に生ずる領域積分を避ける方法として，二重相反法（DRM）や多重相反法（MRM）が広く用いられているが，これらの方法を主要部が非線形性を有する問題に適用することは一般に難しい[3)]．そのため，文献 2) では Analog Equation Method（AEM）[4)]の適用を試みた．AEM では解のラプラシアンで与えられる関数を，DRM と同様の方法により，既知な近似関数の一次結合で近似する．この近似関数には内点と積分点間との距離 r に関する m 次の多項式を用いたが，解析結果は内点数と多項式次数 m とに大きく依存するものとなった．AEM による等高面解析においては，当該問題に適した近似関数を見出すことが，効率化の面で必要であると言える．

そこで本研究では近似関数として薄板スプラインの適用を試みる．なお，非同次項を薄板スプラインで近似展開すれば，良好な近似精度が期待できる[5)]．さらに，MRM を適用すれば，4 回の部分積分でデルタ関数を生じるので，領域積分を容易に評価することが可能となり，効率的解法が構成できる[6)7)]．

以下では，まず従来の AEM に基づいた等高面方程式の定式過程の概要を示し，次に薄板スプラインを用いた MRM に基づく定式化について述べる．続いて解析例を通し，従来法と今回の方法とを対象に，内点数や従来法の多項式次数 m が精度に及ぼす影響について調べる．最後に解を安定化させるためのパラメータが結果に及ぼす影響について若干の検討を与える．

2. 等高面の方法

本論文では二次元問題を対象とする．時刻 t における移動境界を $S(t)$ とし，$S(t)$ で囲まれた領域内部で $u>0$,$S(t)$ 上で $u=0$，外部で $u<0$ となるようなあるスカラー関数 $u(\mathbf{x},t)$ を考える（**Fig.1**）．

等高面の方法とは，移動境界 $S(t)$ の追跡を，$u(\mathbf{x},t)$ のゼロ等高面の時間発展の問題として捉える手法である[1)]．以下にその概要を述べる．

2.1 曲線短縮方程式

曲線 S の成長速度 V が S の曲率 κ に比例する問題における運動方程式を曲線短縮方程式といい，それは次式で定義される．

$$V=-\kappa \tag{1}$$

式 (1) を等高面方程式に書き換えると，曲線短縮方程式は次式で与えられる．

$$u_{,t}-\Delta u+\frac{u_{,i}u_{,j}u_{,ij}}{u_{,k}u_{,k}}=0 \tag{2}$$

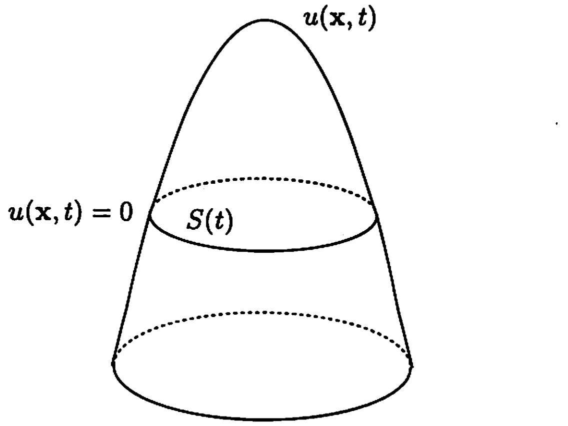


Fig.1 Surface with function u and its contour S

ここで Δ はラプラシアン，$u_{,t}=\partial u/\partial t, u_{,i}=\partial u/\partial x_i$ であり，繰り返し指標は総和規約に従うものとする．

2.2 等速成長方程式

曲線 S の成長速度 V が一定値で与えられる問題における運動方程式を等速成長方程式という．S が速度 1 で収縮する場合の等速成長方程式は次式で与えられる．

$$u_{,t}+|\mathrm{grad}u|=0 \tag{3}$$

2.3 基礎方程式

移動境界 S の運動は，式(2) や(3) を支配方程式とし，S を含む領域で定義されたスカラー関数 u の以下に示す初期値・境界値問題で与えられる．

支配方程式： 式 (2) 又は (3)

境界条件： $u(\mathbf{x},t)=-c \quad (\text{on } \Gamma)$ (4)

初期条件： $u(\mathbf{x},0)=u_0(\mathbf{x}) \quad (\text{in } \Omega)$ (5)

ここで，Ω は S を含む有界な領域，Γ はその境界，c はある正の定数である．また，u_0 は $S_0:=S(0)$ をゼロ等高線に持つ関数である．なお，$S(t)$ は u_0 のとり方によらず，S_0 のみによって一意に決まることが保証されている[1]．

3. AEM による求解方程式の構成

定式過程を簡単にするため，未知量を u から次式で定義される v に変更する．

$$v:=u+c \tag{6}$$

ここでは支配方程式として曲線短縮方程式を例に考える．v についての基礎方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
&v_{,t}-\Delta v+\frac{v_{,i}v_{,j}v_{,ij}}{v_{,k}v_{,k}}=0 \quad (\text{in } \Omega),\\
&v=0 \quad (\text{on } \Gamma),\\
&v=u_0+c \quad (\text{in } \Omega \text{ at } t=0)
\end{aligned} \tag{7}$$

式(7) の支配方程式は 2 階の偏導関数を主要部に持つが，その中 (左辺第 3 項) に非線形項を含む．当該問題の解析手法として AEM を適用する．

3.1 従来法による定式化

ここでは比較のため，従来の AEM[2] による定式過程についてその概略を示す．

まず，v のラプラシアンを考え，それを次式のように近似展開する．

$$\Delta v(\mathbf{x},t)\simeq\sum_{j=1}^{M}\alpha_j(t)f_j(\mathbf{x}) \tag{8}$$

ここで，$f_j(\mathbf{x})$ は DRM で用いられるような既知な近似関数，$\alpha_j(t)$ は未知量である．

式(8) において v を次のように 2 成分に分離する．

$$v=v_0+v_p \tag{9}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\Delta v_0 &=0,\\
\Delta v_p &=\sum_{j=1}^{M}\alpha_j f_j
\end{aligned} \tag{10}$$

f_j に対して次式をみたす関数を $\hat{v}_j$ と定義する．

$$\Delta\hat{v}_j=f_j \quad (j=1,\cdots,M) \tag{11}$$

このとき，v_p は次式で与えられる．

$$v_p=\sum_{j=1}^{M}\alpha_j(t)\hat{v}_j(\mathbf{x}) \tag{12}$$

以上より，v_0 は次式をみたす解として定義される．

$$\begin{aligned}
\Delta v_0 &=0 \quad (\text{in } \Omega),\\
v_0 &=-v_p \quad (\text{on } \Gamma)
\end{aligned} \tag{13}$$

各時刻において，式(13) の解 v_0 は次の積分表現式により与えられる．

$$\begin{aligned}
v_0(\mathbf{x},t)=&\int_\Gamma q^*(\mathbf{x},\mathbf{y})v_p(\mathbf{y},t)\,d\Gamma_y\\
&+\int_\Gamma u^*(\mathbf{x},\mathbf{y})q_0(\mathbf{y},t)\,d\Gamma_y
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，$q_0=\partial v_0/\partial n_\Gamma$ であり，u^*,q^* は Laplace の方程式の基本解である．

式(14) より境界積分方程式を求め，それを選点法により離散化して次の境界要素方程式を得る．

$$-\mathbf{H}\mathbf{v}_p=\mathbf{G}\mathbf{q}_0 \tag{15}$$

ここで，$\mathbf{v}_p,\mathbf{q}_0$ は Γ 上の節点における v_p,q_0 より成るベクトルである．また，式(15) の自由度を N とすると，$\mathbf{H},\mathbf{G}$ は $N\times N$ の正方行列で与えられる．なお，本研究では離散化に当たり一定要素を用いる．

式(12) より $\mathbf{v}_p$ は次式で与えられる．

$$\mathbf{v}_p = \hat{\mathbf{V}}\boldsymbol{\alpha} \tag{16}$$

ただし，$\hat{\mathbf{V}}$ は $N \times M$ の行列であり，その成分 $\hat{v}_{ij}$ は Γ 上の選点 $\mathbf{x}_i$ に関し次式で定義される．

$$\hat{V}_{ij} := \hat{v}_j(\mathbf{x}_i) \tag{17}$$

式(16) を(15) に代入して次式を得る．

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\hat{\mathbf{V}}\boldsymbol{\alpha} \tag{18}$$

また，式(14) の左辺における v_0 を $v - v_p$ として次式を得る．

$$v = \int_\Gamma q^* v_p \, d\Gamma + \int_\Gamma u^* q_0 \, d\Gamma + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \hat{v}_j \tag{19}$$

Ω 内に M 個の点 $\tilde{\mathbf{x}}_i, (i = 1, \cdots, M)$ をとり，そこにおける v の値から成るベクトルを $\tilde{\mathbf{v}}$ とすると，$\tilde{\mathbf{v}}$ は次のように与えられる．

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{v}_p + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{q}_0 + \tilde{\mathbf{V}}\boldsymbol{\alpha} \tag{20}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} q^*(\tilde{\mathbf{x}}_i, \mathbf{y}) \, d\Gamma_y, \\ \tilde{G}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^*(\tilde{\mathbf{x}}_i, \mathbf{y}) \, d\Gamma_y, \\ \tilde{V}_{ij} &= \hat{v}_j(\tilde{\mathbf{x}}_i) \end{aligned} \tag{21}$$

なお，Γ_j は j 番目の要素である．

式(20) に(16),(18) を代入すると，$\tilde{\mathbf{v}}$ を $\boldsymbol{\alpha}$ により表わすことができる．

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{W}\boldsymbol{\alpha}, \\ \mathbf{W} &= (\tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H})\hat{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{V}} \end{aligned} \tag{22}$$

なお，式(11) における f_j は文献 4) と同様に次式で与える．

$$f_j = 1 + r_j + r_j^3 + \cdots + r_j^{2m+1} \tag{23}$$

ここで $r_j = |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}_j|$ である．このとき $\hat{v}_j$ は次のように与えられる．

$$\hat{v}_j = \frac{r_j^2}{4} + \frac{r_j^3}{9} + \frac{r_j^5}{25} + \cdots + \frac{r_j^{2m+3}}{(2m+3)^2} \tag{24}$$

3.2 MRM による定式化

解 v のラプラシアンを b と定義し，次の境界値問題を考える．

$$\begin{aligned} \Delta v &= b \quad (\text{in } \Omega), \\ v &= 0 \quad (\text{on } \Gamma) \end{aligned} \tag{25}$$

各時刻において，式(25) の解 v は次の積分表現式により与えられる．

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) = &- \int_\Gamma q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}, t) \, d\Gamma_y \\ &+ \int_\Gamma u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}, t) \, d\Gamma_y \\ &- \int_\Omega u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b(\mathbf{y}, t) \, d\Omega_y \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \end{aligned} \tag{26}$$

式(26) の領域積分項 の処理に MRM を適用する．まず，次のように基本解 u_n^* を定義する．

$$\Delta u_1^* = -\delta, \quad \Delta u_{n+1}^* = u_n^* \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{27}$$

ここで，$u_1^* = u^*$，δ は Dirac のデルタ関数である．

なお，u_2^* は次式をみたし，薄板スプラインを与える．

$$\Delta^2 u_2^* = -\delta \tag{28}$$

式(27) の表記法を用いると，式(26) は次式のよう書き直すことができる．

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) = &\int_\Gamma [u_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}, t) - q_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}, t)] \, d\Gamma_y \\ &- \int_\Omega u_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b(\mathbf{y}, t) \, d\Omega_y \end{aligned} \tag{29}$$

ここで，$q_1^* := q^*$ である．

式(29) の右辺の最後の項は u_2^* を用いると次式のように書き表わすことができる．

$$\int_\Omega u_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b(\mathbf{y}, t) \, d\Omega_y = \int_\Omega \Delta u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b(\mathbf{y}, t) \, d\Omega_y \tag{30}$$

ここで，b を 薄板スプライン u_2^* を用い次のように近似する[6)7)]．

$$b(\mathbf{y}, t) \simeq \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(t) u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y}) \quad (\tilde{\mathbf{x}}_j \in \Omega) \tag{31}$$

式(31) を(30) に代入すると次式を得る．

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b(\mathbf{y}, t) \, d\Omega_y \\ &= \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(t) \int_\Omega \Delta u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y}) \, d\Omega_y \end{aligned} \tag{32}$$

式(32) 右辺に部分積分を 4 回適用して次式を得る．

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Delta u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y}) \, d\Omega_y \\ &= \int_\Gamma [q_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y}) - u_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y})] \, d\Gamma_y \\ &\quad + \int_\Gamma [q_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y}) - u_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y})] \, d\Gamma_y \\ &\quad + \int_\Omega u_3^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{y}) \, d\Omega_y \end{aligned} \tag{33}$$

$\Delta u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}_j)$ より，式(33) の右辺の最後の領域積分は次式で与えられる．

$$\int_\Omega u_3^*(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\,d\Omega_y = -u_3^*(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}_j) \tag{34}$$

式(32) ～(34) を(29) に代入して次の積分表現式を得る．

$$\begin{aligned}
&v(\mathbf{x},t)\\
&=\int_\Gamma [u_1^*(\mathbf{x},\mathbf{y})q(\mathbf{y},t)-q_1^*(\mathbf{x},\mathbf{y})v(\mathbf{y},t)]\,d\Gamma_y\\
&\quad-\sum_{j=1}^{M}\alpha_j(t)[\int_\Gamma\{q_2^*(\mathbf{x},\mathbf{y})u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\\
&\quad-u_2^*(\mathbf{x},\mathbf{y})q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})+q_3^*(\mathbf{x},\mathbf{y})u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\\
&\quad-u_3^*(\mathbf{x},\mathbf{y})q_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\}\,d\Gamma_y-u_3^*(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}_j)]
\end{aligned}\tag{35}$$

$\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i$ (on Γ) の極限移行をとると次の境界積分方程式を得る．

$$\begin{aligned}
&cv(\mathbf{x}_i,t)\\
&=\int_\Gamma [u_1^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})q(\mathbf{y},t)-q_1^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})v(\mathbf{y},t)]\,d\Gamma_y\\
&\quad-\sum_{j=1}^{M}\alpha_j(t)[\int_\Gamma\{q_2^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\\
&\quad-u_2^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})+q_3^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\\
&\quad-u_3^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})q_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\}\,d\Gamma_y-u_3^*(\mathbf{x}_i,\tilde{\mathbf{x}}_j)]
\end{aligned}\tag{36}$$

式(36) より以下の境界要素方程式を得る．

$$\mathbf{Hv}=\mathbf{Gq}-\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \tag{37}$$

ここで，M_{ij} は以下で定義される行列成分である．

$$\begin{aligned}
&M_{ij}\\
&=\int_\Gamma[q_2^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})-u_2^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\\
&\quad+q_3^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})-u_3^*(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})q_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})]\,d\Gamma_y\\
&\quad-u_3^*(\mathbf{x}_i,\tilde{\mathbf{x}}_j)
\end{aligned}\tag{38}$$

なお，$\mathbf{v},\mathbf{q}$ は Γ 上の N 個の節点における v,q より成るベクトルである．また，$\mathbf{M}$ は $N\times M$ の行列で与えられる．

式(25) より $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ であるので，$\mathbf{q}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ を用いて次式で与えられる．

$$\mathbf{q}=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \tag{39}$$

Ω 内にとった M 個の点 $\tilde{\mathbf{x}}_i,(i=1,\cdots,M)$ における v は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
&v(\tilde{\mathbf{x}}_i,t)\\
&=\int_\Gamma u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})q(\mathbf{y},t)\,d\Gamma_y\\
&\quad-\sum_{j=1}^{M}\alpha_j(t)[\int_\Gamma\{q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\\
&\quad-u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})+q_3^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\\
&\quad-u_3^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})q_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\}\,d\Gamma_y-u_3^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\tilde{\mathbf{x}}_j)]
\end{aligned}\tag{40}$$

式(39)，(40) より，$v(\tilde{\mathbf{x}}_i,t)$ の値からなるベクトル $\tilde{\mathbf{v}}$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}&=\mathbf{W}\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{W}&=\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M}-\tilde{\mathbf{M}}
\end{aligned}\tag{41}$$

ここで，$\tilde{\mathbf{G}},\tilde{\mathbf{M}}$ の成分は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{ij}&=\int_{\Gamma_j}u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})d\Gamma_y,\\
\tilde{M}_{ij}&=\int_\Gamma[q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})-u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})\\
&\quad+q_3^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})-u_3^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\mathbf{y})q_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_j,\mathbf{y})]\,d\Gamma_y\\
&\quad-u_3^*(\tilde{\mathbf{x}}_i,\tilde{\mathbf{x}}_j)
\end{aligned}\tag{42}$$

同様に $\tilde{v}$ の導関数 $\tilde{v}_{,i},\tilde{v}_{,ij}$ より成るベクトル $\tilde{\mathbf{v}}_{,i},\tilde{\mathbf{v}}_{,ij}$ も次式のように得ることができる．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}_{,i}&=\mathbf{W}_{,i}\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{W}_{,i}&=\tilde{\mathbf{G}}_{,i}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M}-\tilde{\mathbf{M}}_{,i}
\end{aligned}\tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}_{,ij}&=\mathbf{W}_{,ij}\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{W}_{,ij}&=\tilde{\mathbf{G}}_{,ij}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M}-\tilde{\mathbf{M}}_{,ij}
\end{aligned}\tag{44}$$

ここで，$\tilde{\mathbf{H}}_{,i},\tilde{\mathbf{G}}_{,i},\tilde{\mathbf{M}}_{,i}$ の成分 $\tilde{H}_{,i\alpha\beta},\tilde{G}_{,i\alpha\beta},\tilde{M}_{,i\alpha\beta}$ は次式で与えられ，$\tilde{\mathbf{H}}_{,ij},\tilde{\mathbf{G}}_{,ij},\tilde{\mathbf{M}}_{,ij}$ の成分も同様の定義により与えられる．

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{,i\alpha\beta}&=\int_{\Gamma_\beta}\frac{\partial}{\partial x_i}u_1^*(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\Gamma_y|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}_\alpha},\\
\tilde{M}_{,i\alpha\beta}&=\frac{\partial}{\partial x_i}\{\int_\Gamma[q_2^*(\mathbf{x},\mathbf{y})u_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_\beta,\mathbf{y})-u_2^*(\mathbf{x},\mathbf{y})q_2^*(\tilde{\mathbf{x}}_\beta,\mathbf{y})\\
&\quad+q_3^*(\mathbf{x},\mathbf{y})u_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_\beta,\mathbf{y})-u_3^*(\mathbf{x},\mathbf{y})q_1^*(\tilde{\mathbf{x}}_\beta,\mathbf{y})]\,d\Gamma_y\\
&\quad-u_3^*(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}_\beta)\}|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}_\alpha}
\end{aligned}\tag{45}$$

式(41)，(43)，(44) を(7) 第一式に代入し，時間増分 Δt の下，$d\alpha/dt$ を $(\alpha^{n+1}-\alpha^n)/\Delta t$ で近似して時間積分に Euler スキームを適用すると，最終的に第 $n+1$ ステップの解 $\boldsymbol{\alpha}^{n+1}$ を与える次式を得る．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{n+1}&=\boldsymbol{\alpha}^n+\Delta t\mathbf{W}^{-1}\mathbf{g}^n,\\
g_\beta^n&=W_{,ii\beta\gamma}\alpha_\gamma^n-\frac{W_{,i\beta\gamma}\alpha_\gamma^n W_{,j\beta\delta}\alpha_\delta^n W_{,ij\beta\varepsilon}\alpha_\varepsilon^n}{W_{,k\beta\gamma}\alpha_\gamma^n W_{,k\beta\delta}\alpha_\delta^n+a^2}
\end{aligned}\tag{46}$$

なお，上式は β について和をとらないものとする．

式(3) の等速成長方程式の場合も，曲線短縮方程式の場合と同様に展開すると最終的に次式を得る．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{n+1}&=\boldsymbol{\alpha}^n+\Delta t\mathbf{W}^{-1}\mathbf{g}^n,\\
g_i^n&=\sqrt{W_{,i\beta\gamma}\alpha_\gamma^n W_{,i\beta\gamma}\alpha_\gamma^n}+aW_{,ii\beta\gamma}\alpha_\gamma^n
\end{aligned}\tag{47}$$

なお，式(46)，(47) の g_β^n,g_i^n における a は $\mathrm{grad}v=0$ となる特異点近傍における解の挙動を安定化させるために導入したパラメータである[8]．

また，α の初期値 α^0 は式(7),(41) より次式で与えることができる．

$$\alpha^0 = \mathbf{W}^{-1}\{\tilde{\mathbf{u}}_0 + c\mathbf{I}\} \tag{48}$$

ここで，$\tilde{\mathbf{u}}_0$ は Ω 内にとった M 個の点における u_0 の値から成るベクトル，$\mathbf{I}$ は恒等行列である．

式(46) において $\mathbf{W}, \mathbf{W}_{,i}, \mathbf{W}_{,ij}$ は未知量 α を含まないので定数行列である．また，それらの作成には境界積分だけが必要となる．

4. 解析例

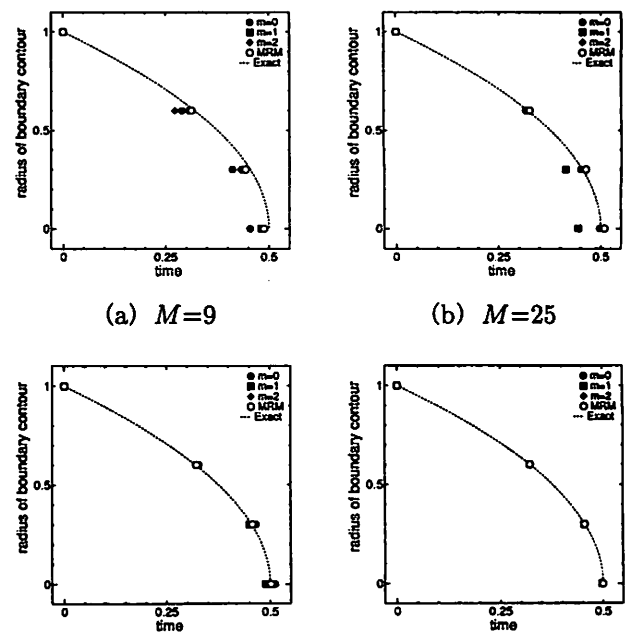
4.1 S_0 が円周により与えられている場合

初期条件を次式で与え，S_0 を半径 1 の円周とした問題に本手法を適用する．

$$u_0 = 1 - x_1^2 - x_2^2 \tag{49}$$

なお，$c = 3$ とし半径 2 の円周を Γ にとる．また，$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ とし，離散化に当り，Γ を 72 要素で等分割した．

本手法において内点数 M が精度に及ぼす影響を，従来法による結果と比較し検討する．曲線短縮方程式において M=9,25,69,253 とし，本手法による結果，及び従来法で f_j の次数 m=0 ～ 2 での結果を **Fig.2** に示す．なお，**Fig.2** は $S(t)$ の半径 $R(t)$ の変化を示しており，理論解を点線で示した．図より従来法では，内点数が増えるにしたがって解の挙動は良好なものとなっているが，比較的少ない内点数の下では，多項式次数 m のとり方により精度低下を生ずる可能性のあることがわかる．ちなみに，m=3 の場合，$S(t)$ の形状は同心円とは大幅に異なったものとなった．一方，本手法ではいずれの M でも良好な結果が得られており，内点数が解に与える影響が小さいことがわかる．また，従来法のように近似関数の適切な多項式次数を選定する必要がないので，その分解析は容易になる．



(a) M=9　(b) M=25　(c) M=69　(d) M=253

Fig.2 Comparison between the present and conventional methods based on the accuracy

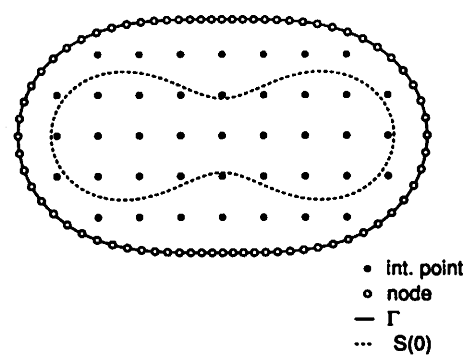


Fig.3 Discretization condition. M=41

4.2 S_0 が Cassini の橙形で与えられている場合

初期条件を次の Cassini の橙形で与える．

$$u_0 = -[(x_1^2 + x_2^2 + 4)^2 - 16x_1^2]^{1/4} + 2.1 \tag{50}$$

本解析では，$c = 0.73$，境界要素数 72，$\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ としている．なお，M=41 での離散化の様子を **Fig.3** に示す．曲線短縮方程式において M=41,223, a=0 における，本手法による結果，及び従来法で m=1 とした場合の 2100 step 目の解を **Fig.4** に示す．なお，**Fig.4** には差分法により求めた $S(t)$ も合わせて示した．図より，従来法では，多項式次数 m=1 の下では良好な結果が得られていないのに対し，本手法ではいずれの M でも良好な結果が得られていることがわかる．

次に，等速成長方程式を対象に，内点数 M と安定化パラメータ a とが解の精度や挙動に及ぼす影響を，本手法で得た解に基づいて検討する．結果を **Fig.5** に示す．図には，M=41，223，a=0.04，0.08，0.12 の各ケースにおける 1500 step 目の解を示した．なお，境界要素数，時間増分等は上述の曲線短縮方程式の場合と同じである．本来当該問題では，初め 1 つであった境界線が 2 つに分裂し，各々消滅して行くこととなる．しかし，内点数 M=41 で a=0.04，0.08 の 2 ケースにおいては 3 つの領域に分裂する様子が認められ，不自然な挙動が得られている．なお，M=41 でも，a=0.12 と安定化パラメータの値を比較的大きくとれば，定性的に妥当な結果を得ることが可能である．一方，M=223 と内点数を十分多くとれば，a によらず定性的に良好な結果を得ている．ただし，a の値が大きくなるにつれて，境界の分裂・消滅のタイミングが早くなる傾向にある．式(47) において安定化の目的で追加した項は粘性解を与えるものであり[1]，精度の面から見れば，a の値は小さい程良い．一方，M=41 の場合のように，内点数が比較的少ない下でも定性的に妥当な解を得るためには，a の値を相対的に大きく設定する必要があり，解析では内点数と安定化パラメータとの適切な組

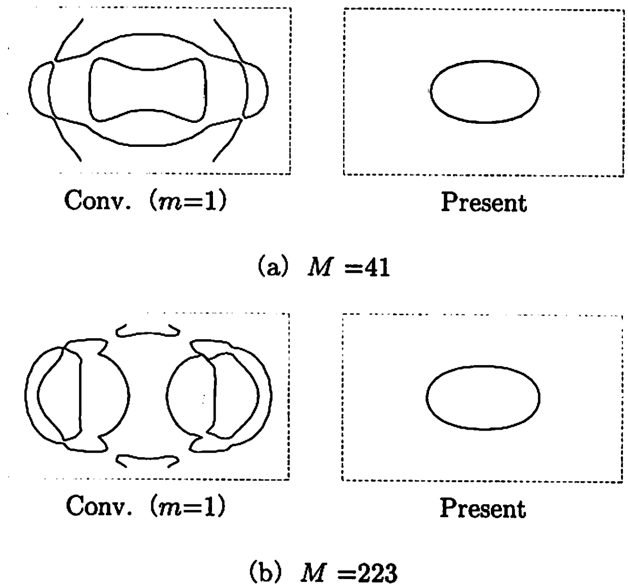


Fig.4 Influence of M on the accuracy in the present and conventional methods

み合わせを選定することが重要である.

5. おわりに

等高面の方法に基づく自由表面解析に境界要素法を適用する際に用いた AEM での近似関数に，薄板スプラインを用い，さらに MRM に準じた定式化を試みた.

本手法によれば，近似関数として距離 r の多項式を用いた従来法と違い，多項式次数の選定が不要であり，比較的少ない内点数の下でも良好な結果を得ることが可能である.

また，内点数を減らすと精度低下を招く恐れがあるが，安定化パラメータを適切に設定すれば，定性的に概ね良好な解を得ることができる.

なお，薄板スプラインを用いた MRM では，文献 6), 7) で示されたように有限回の部分積分で領域積分を処理できるので，AEM への適用は有効である.

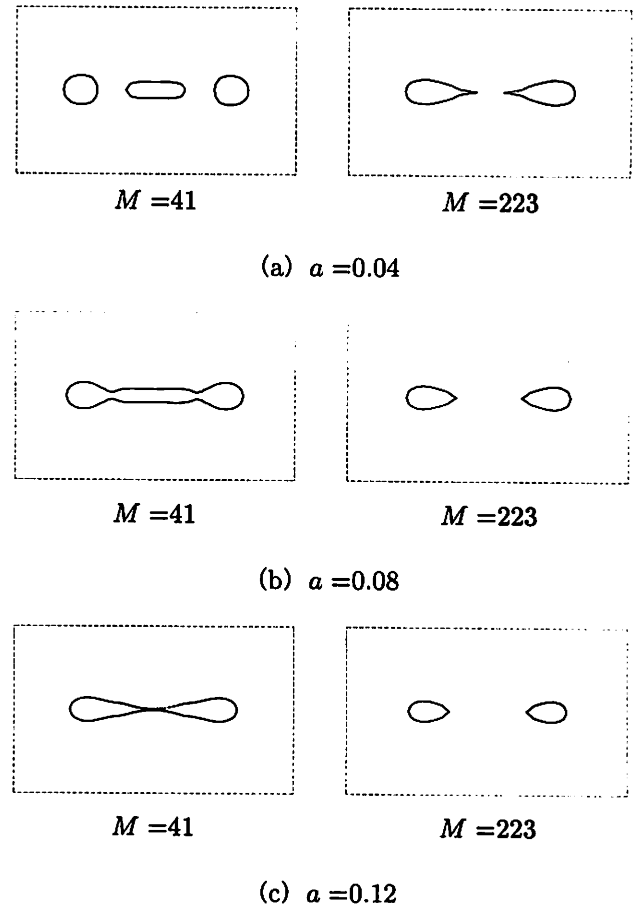


Fig.5 Influence of M and a on the accuracy

参考文献

1) 俵我美一，陳　蘊剛：動く曲面を追いかけて，日本評論社, 1996.
2) 阿部和久，岩成洋平：等高面の方法による移動境界問題の境界要素解析，BTEC 論文集，Vol.10, 37-42, 2000.
3) Pertridge, P.W. : Radial basis approximation functions in the boundary element dual reciprocity method, Boundary Element Technology XIII, Chen, C.S., Brebbia, C.A. and Pepper, D.W. eds., WIT Press, 325-334, 1999.
4) Katsikadelis, J.T. and Nerantzaki, M.S. : The boundary element method for nonlinear problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **23**, 365-373, 1999.
5) 落合芳博：改良型 MRBEM による内部熱発生を伴う二次元非定常熱応力解析，BTEC 論文集，Vol.9, 43-48, 1999.
6) 松本敏郎，田中正隆，稲舘秀明：拡散方程式の時間領域境界要素法の Thin Plate Spline と多重相反法の適用，計算工学講演会論文集，Vol.5, 311-312, 2000.
7) 岡山瞬，松本敏郎，田中正隆：重調和方程式の Trefftz 関数と Thin Plate Spline を用いた多重相反法，計算工学講演会論文集，Vol.5, 313-314, 2000.
8) Evans, L.C. and Spruck, J. : Motion of level sets by mean curvature. I, *J. Diff. Geom.*, **33**, 635-681, 1991.