

境界要素法を用いた弾性体感度解析における随伴変数法の適用

Design sensitivity formulation for elastostatic problems based on adjoint variable method and boundary element method

柴田 健士朗¹⁾, 高橋 徹²⁾, 松本 敏郎³⁾

Kenshiro SHIBATA, Toru TAKAHASHI and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: k.shibata@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

This paper presents a formulation of design sensitivity analysis of elastostatic body by using the boundary element method. The objective function is defined in terms of a boundary integral and domain terms at some discrete collocation points. The adjoint method is utilized to eliminate the sensitivity coefficients of the unknown boundary displacements and tractions. The adjoint system consists of Navier's equation with body force terms in the form of Dirac's delta function. Some numerical results are shown to demonstrate the effectiveness of the present method.

Key Words: Boundary Element Method, Adjoint Variable Method, Design Sensitivity Analysis, Elastostatics

1. 緒言

最適化問題の解法は, 目的関数の設計変数に対する勾配を利用する勾配法と, 目的関数の関数値のみを用いる直接探索法とに大別することが出来る. 勾配法は, 目的関数が単峰性関数や勾配が計算できる場合には直接探索法に比べて少ない反復回数で最適解に到達できる利点を有するが, 目的関数の設計変数に対する感度を計算する必要性が生じる. 感度は目的関数の設計変数に対する変化率であるから, 目的関数を設計変数で微分すればその計算式を得ることができる. この式の中には, 解析対象の境界や領域内部の変位・表面力や応力などの感度係数が含まれる. これら感度係数を計算する方法として, 解析に用いる境界積分方程式や弱形式を設計変数で微分して得られる新たな積分方程式を離散化して解く直接微分法^{(1)~(3)}があるが, 感度の計算を設計変数の数の回数だけ行う必要があり, 大規模な問題かつ設計変数が多い場合は計算コストが高い. これに対して目的関数の勾配を計算する別の方法として, 随伴変数法^{(5)~(9)}がある. 随伴変数法は, 随伴変数を定義することにより, 目的関数の勾配を計算する式が支配微分方程式の解およびその導関数などの系の応答(たとえば変位, 表面力, 応力など)の感度を含まない形に変形して計算を行う方法である. 随伴変数法では, 随伴変数が満足する随伴系の解を求めれば目的関数の感度を計算することができ, 支配微分方程式の解やその導関数の感度係数を

計算する必要がない. 随伴系の導出には, 目的関数に支配微分方程式をラグランジュ乗数を用いて等式制約条件として加えたものの変分をとる方法⁽⁴⁾がある. また, 境界要素法を用いる場合には, 考えている系と随伴系の関数に対する相反定理の変分から導出する方法^{(5)~(8)}や, 離散化された境界積分方程式を等式制約条件として加えて変分を取る方法⁽⁹⁾などがこれまでで示されている. 系の応答の計算に大規模な解析を必要とする問題では, 系の応答の感度係数の計算を必要としない随伴変数法の方が, 直接微分法よりも効率よく目的関数の感度を計算できる.

ところで目的関数が物体の境界上, あるいは物体の内部に離散的に配置した点だけで計算でき, かつ物理現象が線形の場合は, 目的関数やその感度の計算に境界要素法を用いることが有利である. しかしながら, 形状最適化問題などに境界要素法を用いることが盛んになっているとは言い難い. これは境界要素法が実用上・実際上の大規模解析への適用が難しかったことにあるが, 高速多重極法によりこの点は解決しつつある. そこで本研究では大規模解析への適用を前提とし, 静弾性問題に対する形状最適化問題を想定した境界要素法に適した目的関数の一般形に対して, 随伴変数法に基づく感度解析の定式化を行い, 簡単な数値計算例によりその妥当性を示す. なお, 随伴系の導出に際しては, 支配微分方程式を等式制約条件としてラグランジュ乗数により拡張した目的関数を用いる.

2. 理論

2.1. 境界要素法

弾性体の支配方程式 (Navier の方程式) は等方線形弾性体の場合、次の様になる。

$$C_{ijkl}u_{k,li} + b_j = Gu_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,kj} + b_j = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ただし、 C_{ijkl} は弾性定数テンソル、 u_i は変位、 b_i は物体力あるいはそれに相当するソース項、 G は横弾性係数、 ν は Poisson 比、 Ω は考えている物体の領域である。添え字は 3 次元問題の場合は 1 から 3 まで、2 次元問題の場合は 1 から 2 まで変化し、繰り返し用いる添え字はその範囲内で和をとるものとする。また、コンマの後ろの添え字は、その座標成分による偏微分を意味する。

境界条件は次のようになる。

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2)$$

$$t_i = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_t \quad (3)$$

ただし、 t_i は表面力、 \bar{u}_i 、 \bar{t}_i はそれぞれ変位、表面力の既知関数、 Γ_u 、 Γ_t は Fig.1 に示すような境界 Γ の部分である。

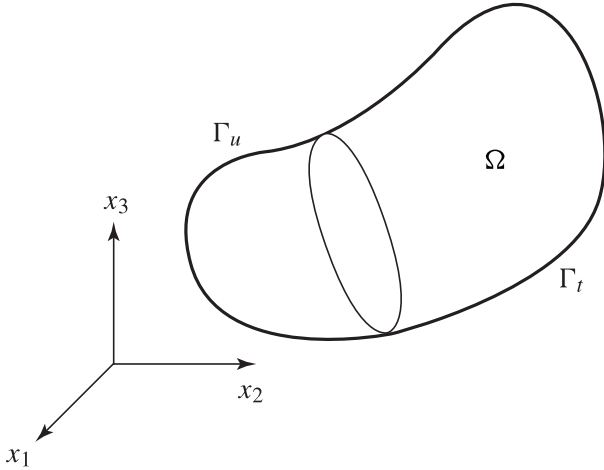


Fig. 1 Domain and boundary of a solid.

Navier の方程式に対し、基本解を用いると境界上の変位と表面力を関係づける境界積分方程式が次のように導出される。

$$c_{ij}u_i(y) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x, y)u_i(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, y)t_i(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(x, y)b_i(x)d\Omega(x), \quad y \in \Gamma \quad (4)$$

ただし、 x と y は境界上の点、 c_{ij} は定数であり、点 y が境界の滑らかな部分に置かれているときは $1/2\delta_{ij}$ となる。また、 u_{ij}^* 、 t_{ij}^* はそれぞれ基本解とそれに関係づけられる表面力である。

基本解 u_{ij}^* 、 t_{ij}^* は、2 次元問題の場合 (平面ひずみ) の場合、それぞれ次式のようになる。

$$u_{ij}^*(x, y) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,i}r_{,j} \right\} \quad (5)$$

$$t_{ij}^*(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \} + (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (6)$$

ただし、 r は点 x と y の距離、 δ_{ij} はクロネッカのデルタ、 n_i は点 x の外向き単位法線ベクトル、 $\partial r/\partial n$ は点 x における r の法線方向微係数である。

3 次元問題の場合は基本解 u_{ij}^* 、 t_{ij}^* は次のようになる。

$$u_{ij}^*(x, y) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \} \quad (7)$$

$$t_{ij}^*(x, y) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \} + (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (8)$$

式 (4) には、物体力に由来する領域積分項が存在するが、物体力が無視できない場合は領域を内部セルに分割するか、境界積分に変換して評価することができる⁽³⁾。また、物体力が領域内の離散的な点で与えられる場合は、物体力を Dirac のデルタ関数を用いて表すことができるので、この領域積分項はその点における基本解の値を計算することに帰着する。

境界積分方程式を離散化すると、変位と表面力の節点値からなるベクトル $\{u\}$ 、 $\{t\}$ と物体力項を計算して得られる既知ベクトル $\{b\}$ からなる次のような代数方程式が得られる。

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} + \{b\} \quad (9)$$

さらに、境界条件を適用して、節点の未知量を左辺、既知量を右辺に移項して整理すると、次の形に帰着する。

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (10)$$

ただし、 $\{x\}$ は未知節点値ベクトル、 $\{y\}$ は既知量を右辺に移行して物体力項と併せて整理して得られるベクトルである。

式 (10) を解くと境界上の変位、表面力がすべて求められる。境界の応力成分は、境界節点の表面力と変位の接線方向勾配を用いて次式から計算される。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \frac{1}{1-\nu} (\nu\delta_{ij} - n_in_j) t_k n_k + t_i n_j + t_j n_i \\ & + G \left\{ \frac{2\nu}{1-\nu} (2\delta_{ij} - n_in_j) \alpha_k \right. \\ & \left. + (\delta_{ik} - n_in_k) \alpha_j + (\delta_{jk} - n_j n_k) \alpha_i \right\} \frac{\partial u_k}{\partial \alpha} \\ & + G \left\{ \frac{2\nu}{1-\nu} (2\delta_{ij} - n_in_j) \beta_k \right. \\ & \left. + (\delta_{ik} - n_in_k) \beta_j + (\delta_{jk} - n_j n_k) \beta_i \right\} \frac{\partial u_k}{\partial \beta} \quad (11) \end{aligned}$$

ただし、 α_k 、 β_k はそれぞれ接線ベクトル、 $\partial u_k/\partial \alpha$ 、 $\partial u_k/\partial \beta$ は変位の接線方向勾配であり、形状関数の微分から計算される。

領域内の変位の計算には次の Somigliana の公式を用いる。

$$u_i(y) = \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x, y)u_i(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, y)t_i(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(x, y)b_i(x)d\Omega(x), \quad y \in \Omega \quad (12)$$

式 (12) は境界積分方程式の場合と同様の方法で離散化して計算する。

2.2. 目的関数

目的関数が境界上および領域内の複数の点で評価したい量を用いて表されている場合は、境界要素法を用いる利点がある。ここでは目的関数が構造物の変位 u_i 、表面力 t_i 、応力 σ_{ij} を用いて以下の様に表されているものとする。

$$J = \int_{\Gamma} g(u_i, t_i) d\Gamma + \sum_s \int_{\Omega} h(u_i, \sigma_{ij}) \delta(x - z^s) d\Omega, \quad z^s \in \Omega \quad (13)$$

ここで $g(u_i, t_i)$ 、 $h(u_i, \sigma_{ij})$ はそれぞれ境界、領域で定義された u_i 、 t_i 、 σ_{ij} を陽に含む設計変数により微分可能なスカラー関数であり、 $\delta(x - z^s)$ は Dirac のデルタ関数、 z^s は領域の複数の評価点である。設計変数が形状を変化させるパラメータであるとき、 J の感度 J' は次式のようになる。

$$\begin{aligned} J' &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \dot{u}_i + \frac{\partial g}{\partial t_i} \dot{t}_i \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} g d\dot{\Gamma} \\ &+ \sum_s \int_{\Omega} \left(\frac{\partial h}{\partial u_i} \dot{u}_i + \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \right) \delta(x - z^s) d\Omega \\ &+ \sum_s \int_{\Omega} h(u_i, \sigma_{ij}) \delta(x - z^s) d\dot{\Omega} \\ &+ \sum_s \int_{\Omega} h(u_i, \sigma_{ij}) \dot{\delta}(x - z^s) d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、ドット ($\dot{\cdot}$) は物質微分を意味し、 \dot{u}_i 、 \dot{t}_i 、 $\dot{\sigma}_{ij}$ は次の様な意味である。

$$\dot{u}_i = u'_i + u_{i,j} \dot{x}_j \quad (15)$$

$$\dot{t}_i = t'_i + t_{i,j} \dot{x}_j \quad (16)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma_{ij,k} \dot{x}_k \quad (17)$$

ただし、プライム ($'$) は設計変数を変化させる前のもの形状における微分を表す。また、 $d\dot{\Gamma}$ と $d\dot{\Omega}$ は次の様に表される (10)。

$$d\dot{\Gamma} = (\dot{x}_{m,m} - \dot{x}_{i,j} n_i n_j) d\Gamma \quad (18)$$

$$d\dot{\Omega} = \dot{x}_{m,m} d\Omega \quad (19)$$

式 (14) から分かるように、式 (13) に関する最適化問題を勾配法を用いて考える場合は、構造応答の感度係数 \dot{u}_i 、 \dot{t}_i 、 $\dot{\sigma}_{ij}$ を設計変数の数に対応する回数分計算しなければならない。そのため、大規模で設計変数の数が多い問題においては、これらを直接微分法のようにこれらを直接計算する方法は効率的でない。そこで、随伴変数法を式 (13) に適用し、評価関数が構造応答の感度を含まない形に変形する。

2.3. 随伴変数法

式 (13) の代わりに、以下の関数 P を考える。

$$P = J + I \quad (20)$$

I は支配方程式である Navier の方程式の Lagrange 定数 λ_j を掛け、対象とする領域全体で積分したものであり、以下の様になる。

$$I = \int_{\Omega} \lambda_j C_{ijkl} u_{k,l,i} \Omega \quad (21)$$

ただし、境界要素法の計算が領域型解法よりも有利な場合を想定して、物体力は無いものとした。

ここで、導関数の物質微分について次の関係を得ておく。

$$(\dot{u}_{k,l}) = (\dot{u}_k)_{,l} - u_{k,m} \dot{x}_{m,l} \quad (22)$$

ただし、 $(\dot{\cdot})$ はカッコの中の関数の物質微分であることを意味するものとする。したがって、 $\dot{\sigma}_{ij}$ は式 (23) の様に变形することができる。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl} (\dot{u}_k)_{,l} \\ &= C_{ijkl} (\dot{u}_k)_{,l} - C_{ijkl} u_{k,m} \dot{x}_{m,l} \end{aligned} \quad (23)$$

式 (23) を用いると、式 (14) の第 3 項の $\dot{\sigma}_{ij}$ の項を部分積分を用いて次式のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \delta(x - z^s) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} (\dot{u}_k)_{,l} \delta(x - z^s) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} u_{k,m} \dot{x}_{m,l} \delta(x - z^s) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \delta(x - z^s) \right\}_{,l} C_{ijkl} \dot{u}_k d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} u_{k,m} \dot{x}_{m,l} \delta(x - z^s) d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) を用いると、式 (14) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} J' &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \dot{u}_i + \frac{\partial g}{\partial t_i} \dot{t}_i \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} g d\dot{\Gamma} \\ &+ \sum_s \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial u_i} \dot{u}_i \delta(x - z^s) d\Omega \\ &- \sum_s \int_{\Omega} \left(\frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{,l} C_{ijkl} \dot{u}_k \delta(x - z^s) d\Omega \\ &- \sum_s \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{u}_k \delta_{,l} (x - z^s) d\Omega \\ &+ \sum_s \int_{\Omega} h \dot{\delta}(x - z^s) d\Omega \\ &- \sum_s \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} u_{k,m} \dot{x}_{m,l} \delta(x - z^s) d\Omega \\ &+ \sum_s \int_{\Omega} h \delta(x - z^s) d\dot{\Omega} \end{aligned} \quad (25)$$

次に、 I を以下の様に変形する。まず I を 1 回部分積分して弱形式を導出すると次のようになる。

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \lambda_j C_{ijkl} u_{k,l} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \lambda_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \lambda_j t_j d\Gamma - \int_{\Omega} \lambda_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} d\Omega \end{aligned} \quad (26)$$

ここで I' を次のように考える。

$$\begin{aligned} I' &= \int_{\Gamma} \lambda_j t_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_j t_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_j t_j d\Gamma \\ &- \int_{\Omega} (\lambda_{j,i}) C_{ijkl} u_{k,l} d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_{j,i} C_{ijkl} (\dot{u}_k)_{,l} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \lambda_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} d\dot{\Omega} \end{aligned} \quad (27)$$

式 (27) に

$$\dot{\lambda}_j = \lambda_{j,m} \dot{x}_m \quad (28)$$

$$(\dot{\lambda}_{j,i}) = \lambda_{j,im} \dot{x}_m \quad (29)$$

および式 (22) を用いてさらに部分積分を行えば, I' は次の様になる .

$$\begin{aligned} I' = & \int_{\Gamma} \lambda_{j,m} \dot{x}_m t_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_j \dot{t}_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_j t_j d\dot{\Gamma} \\ & - \int_{\Gamma} \lambda_{j,i} C_{ijkl} \dot{u}_k n_l d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_{j,i} C_{ijkl} u_{k,m} \dot{x}_m n_l d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \lambda_{j,i} C_{ijkl} \dot{u}_k d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_{j,i} C_{ijkl} u_{k,m} \dot{x}_m d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \lambda_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} \dot{x}_m n_m d\Gamma \end{aligned} \quad (30)$$

この関係より $P' = J' + I'$ は次式の様になる .

$$\begin{aligned} P' = & \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\partial g}{\partial u_k} - \tau_k \right) \dot{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\partial g}{\partial u_k} - \tau_k \right) \dot{u}_k d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\partial g}{\partial t_i} + \lambda_i \right) \dot{t}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\partial g}{\partial t_i} + \lambda_i \right) \dot{t}_i d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \left[C_{ijkl} \lambda_{j,il} + \sum_s \left\{ \frac{\partial h}{\partial u_k} \delta(x - z^s) \right. \right. \\ & \quad - \left. \left. \left(\frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{,l} C_{ijkl} \delta(x - z^s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \delta_{,l}(x - z^s) \right\} \right] \dot{u}_k d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} g d\dot{\Gamma} + \int_{\Gamma} \lambda_{j,m} \dot{x}_m t_j d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \lambda_j t_j d\dot{\Gamma} + \int_{\Gamma} \tau_k u_{k,m} \dot{x}_m d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \lambda_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} \dot{x}_m n_m d\Gamma - \int_{\Omega} \lambda_{j,i} C_{ijkl} u_{k,m} \dot{x}_m d\Omega \\ & + \sum_s \int_{\Omega} h \delta(x - z^s) d\Omega \\ & - \sum_s \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} u_{k,m} \dot{x}_m \delta(x - z^s) d\Omega \\ & + \sum_s \int_{\Omega} h \delta(x - z^s) d\dot{\Omega} \end{aligned} \quad (31)$$

ただし, τ_k は随伴変数 λ_j に対応する表面力, すなわち

$$\tau_k = C_{ijkl} \lambda_{j,i} n_l \quad (32)$$

である .

式 (31) から随伴方程式とその境界条件を定める . 式 (31) で計算しなければならない構造応答の感度は, u_i, t_i がそれぞれ未知である境界における \dot{u}_i, \dot{t}_i に加えて, 領域内での \dot{u}_i である . その係数部分を零にするように λ_j を決めればよく, 次式の様になる .

随伴方程式 :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \lambda_{j,il}(x) + \sum_s \left\{ \frac{\partial h}{\partial u_k} \delta(x - z^s) \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{,l} C_{ijkl} \delta(x - z^s) \right. \\ \left. - \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \delta_{,l}(x - z^s) \right\} = 0, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (33)$$

境界条件 :

$$\tau_k(x) = \frac{\partial g}{\partial u_k}(x) \quad x \in \Gamma_t \quad (34)$$

$$\lambda_i(x) = -\frac{\partial g}{\partial t_i}(x) \quad x \in \Gamma_u \quad (35)$$

随伴系の境界条件はもとの問題と同じパターンとなっている . 随伴系に対する境界積分方程式は, 次のようになる .

$$\begin{aligned} c_{ij} \lambda_i(y) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x, y) \lambda_i(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, y) \tau_i(x) d\Gamma(x) \\ + \sum_s \left[u_{ij}^*(z^s, y) \frac{\partial h}{\partial u_i}(z^s) + u_{ij,m}^*(z^s, y) C_{klim} \frac{\partial h}{\partial \sigma_{kl}}(z^s) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

式 (33) と式 (34), (35) を用いて変形すると, 最終的に感度解析に用いる式は次式の様に導き出すことができる .

$$\begin{aligned} P' = & \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} - \tau_i \right) \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\partial g}{\partial t_i} + \lambda_i \right) \dot{t}_i d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} g d\dot{\Gamma} + \int_{\Gamma} \lambda_{j,m} \dot{x}_m t_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_j t_j d\dot{\Gamma} \\ & + \int_{\Gamma} \tau_k u_{k,m} \dot{x}_m d\Gamma - \int_{\Gamma} \lambda_{i,j} \sigma_{ij} \dot{x}_m n_m d\Gamma \\ & - \sum_s \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij,m} \dot{x}_m + \frac{\partial h}{\partial u_i} u_{i,m} \dot{x}_m + h \dot{x}_{m,m} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

式 (37) を見ると未知量の構造応答の感度と領域積分項が消去されていることが分かる . 実際に式 (37) を数値計算する際には, まず境界要素法を用いて境界上の表面力, 変位を求め, さらに境界要素法を用いて式 (33) を式 (34) と (35) の下に解き, λ_j や $\lambda_{j,i}$ などを求めてから, 式 (37) を計算することになる .

なお, 式 (37) には境界の応力および境界の変位や対応する随伴変数の勾配 ($u_{k,m}, \lambda_{i,j}$ など) が含まれているが, 境界の応力は式 (11) から, 変位勾配は次のように変位の法線微分と接線微分から計算することができる .

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial n} n_j + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} \alpha_j + \frac{\partial u_i}{\partial \beta} \beta_j \quad (38)$$

$$\lambda_{i,j} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial n} n_j + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha} \alpha_j + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \beta} \beta_j \quad (39)$$

ただし, $\partial u_i / \partial n, \partial \lambda_i / \partial n$ はそれぞれ u, λ の法線方向勾配, α_j, β_j は接線ベクトル, $\partial \lambda_i / \partial \alpha, \partial \lambda_i / \partial \beta$ はそれぞれ λ の対応する接線方向微分である . u, λ の接線方向微分は, 形状関数の微分から容易に計算することができ, 法線方向微分 $\partial u_i / \partial n, \partial \lambda_i / \partial n$ はそれぞれ次式より計算できることを容易

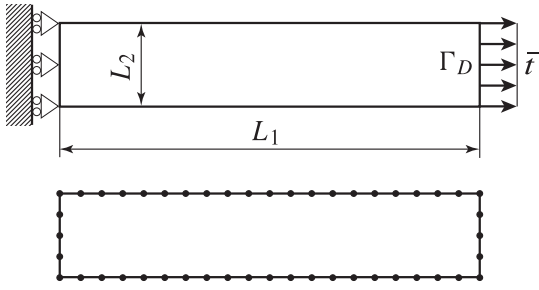


Fig. 2 An example model of a rectangular plate subjected to uniform tensile stresses.

に導くことができる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial n} &= \frac{1}{G} \left(t_i - \frac{1}{2(1-\nu)} t_k n_k n_i \right) \\ &\quad - \left(\frac{\nu}{1-\nu} n_i \alpha_k + n_k \alpha_i \right) \frac{\partial u_k}{\partial \alpha} \\ &\quad - \left(\frac{\nu}{1-\nu} n_i \beta_k + n_k \beta_i \right) \frac{\partial u_k}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial n} &= \frac{1}{G} \left(\tau_i - \frac{1}{2(1-\nu)} \tau_k n_k n_i \right) \\ &\quad - \left(\frac{\nu}{1-\nu} n_i \alpha_k + n_k \alpha_i \right) \frac{\partial \lambda_k}{\partial \alpha} \\ &\quad - \left(\frac{\nu}{1-\nu} n_i \beta_k + n_k \beta_i \right) \frac{\partial \lambda_k}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (41)$$

ただし，2次元問題の場合は接線ベクトルは1方向のみ考えればよい．

式(40), (41)の接線微分は形状関数の微分に基づき計算できる．その場合，要素間で接線微分値が一般に不連続となるが，要素数を増やせばその誤差は小さくなると考えられる．

3. 数値解析例

まず簡単な解析例としてFig.2に示すようなYoung率 216×10^9 [Pa]，Poisson比0.3の矩形板の一樣引っ張り問題を考える． $L_2 = 1.0 \times 10^{-2}$ [m]， $\bar{t} = 2.0 \times 10^8$ [Pa]であり，平面応力状態とする． L_1 を設計変数とし，式(13)の g, h には，境界 Γ_D における変位の x_1 方向成分を 0.8×10^{-4} [m]に近づけるための以下の様な関数を考えた．

$$g(L_1) = \frac{1}{2} (u_1(L_1) - \bar{u})^2 \quad \text{on } \Gamma_D \quad (42)$$

$$h = 0 \quad (43)$$

ただし， $\bar{u} = 0.8 \times 10^{-4}$ [m]である．

各辺を2次アイソパラメトリック要素で分割して解析した．Fig.2の下段には24要素(48節点)の場合を示す．設計変数の値が $L_1 = 5.0 \times 10^{-2}$ [m]のときの目的関数の感度 P' の誤差と節点数の関係性を調べるとTable 1のようになる．厳密解は $P'_{\text{exact}} = -3.120713306 \times 10^3$ である．厳密解と非常によく一致した結果が得られていることがわかる．

次に，最初の例題と同じ材料定数を持ち，外周に圧力 2.0×10^8 [Pa]を受ける外径 $r_1 = 0.2$ [m]の厚肉円筒を，対称性を考

Table 1 Errors of the sensitivities versus number of nodes for the rectangular plate model.

Number of nodes	Sensitivity P'	Error(%)
24	$-3.1207131 \times 10^{-10}$	3.87×10^{-6}
48	$-3.1207131 \times 10^{-10}$	3.87×10^{-6}
120	$-3.1207131 \times 10^{-10}$	3.87×10^{-6}
240	$-3.1207118 \times 10^{-10}$	2.33×10^{-13}

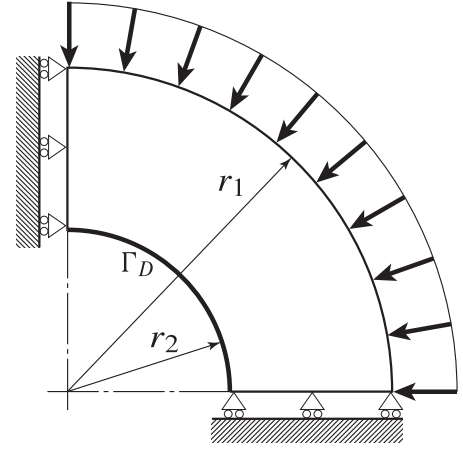


Fig. 3 An example model of a quarter region of the cross section of a thick-walled cylinder subjected to a uniform pressure on the outer boundary.

慮して1/4の部分でFig.3に示すような境界条件で，矩形板の例題と同じ境界要素法プログラムを用いて各辺を均等な2次アイソパラメトリック要素で分割して解析した．設計変数は円筒の内径 r_2 とし，式(13)の g, h は次のように定義した．

$$g(r_2) = \frac{1}{2} \{u_r(r_2) - \bar{u}_r\}^2 \quad (44)$$

$$h = 0 \quad (45)$$

ただし， $u_r(r_2)$ は境界 Γ_D における半径方向変位を表し， $\bar{u}_r = 1.0 \times 10^{-6}$ [m]である．

設計変数の値が $r_1 = 1.0 \times 10^{-1}$ [m]のときの目的関数の感度 P' の誤差を，様々な節点数について調べるとTable 2のようになる．この時の理論解は $P'_{\text{exact}} = 1.571767424 \times 10^{-14}$ である．矩形板の例題に比べて，精度は少し低いもののほぼ1%以下であり，十分な精度の解が得られていると考えられる．円筒の問題において精度が低下しているのは，矩形板の場合は変位の厳密解が1次関数であり， P' 中の変位勾配，応力が一定値できわめて高精度に計算されるのに対して，円筒の場合の変位や表面力の精度は矩形板の場合よりも精度が低く，応力と変位勾配は式(11), (39)により変位の内挿関数の微分と関係づけられているので変位の精度よりわずかに精度が劣るためと考えられる．しかしながらこのような精度の低

Table 2 Errors of the sensitivities versus number of nodes for the thick-wall cylinder model.

Number of nodes	Sensitivity P'	Error(%)
40	1.530280×10^{-14}	2.64
80	1.560144×10^{-14}	7.40×10^{-1}
160	1.568859×10^{-14}	1.85×10^{-1}
320	1.571042×10^{-14}	4.62×10^{-2}

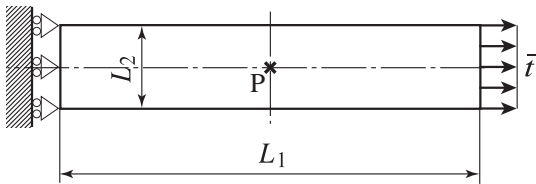


Fig. 4 An example model of a square plate subjected to uniform tensile stresses on the boundary with a displacement measuring point.

下はわずかであり十分な要素数で計算すれば実用上問題となることはない。

最後に、Fig.2と同じ矩形板に対して、Fig.4のように矩形板の中心 P における変位を $\bar{u}_1 = 0.4 \times 10^{-4}$ [m] に近づける目的関数を次のように設定し、矩形板の横の長さ L_1 に対する感度を 24 個の 2 次アイソパラメトリック要素で分割して計算した。

$$g = 0 \quad (46)$$

$$h = \frac{1}{2} (u_1(P) - \bar{u}_1)^2 \quad (47)$$

Table 3 に示すように、内点の 1 点で定義される目的関数に対しても、正しい結果が得られた。

Table 3 Result for the sensitivity of the objective function defined at an internal point in comparison with the exact solution.

Present	Exact
$-7.801783368 \times 10^{-9}$	$-7.801783264 \times 10^{-9}$

4. 結 言

静弾性問題の形状最適化問題における目的関数が境界積分および内部の離散的な点の値として定義されている場合の感度を、随伴変数法と境界要素法で解析するための定式化を示した。この方法では、随伴系を定義することにより境界の変位や表面力の感度係数の未知量が消去されるので、境界積分

方程式を設計変数で直接微分した式を用いる方法に比べると設計変数が多い場合や大規模な問題において効率的である。目的関数の感度の計算式には、境界の変位や表面力の他に、境界の応力成分、変位勾配、随伴変数の勾配などが含まれるが、数値例から精度よく感度を計算できることを示した。今後は、さらに複雑かつ大規模なモデルでの検討と形状最適化問題への適用を図る必要がある。

参考文献

- (1) T. Matsumoto, M. Tanaka, M. Miyagawa, N. Ishii: Optimum design of cooling lines in injection moulds by using boundary element design sensitivity analysis., *Finite Elements in Analysis and Design*, **14**, pp. 177–185, (1993).
- (2) M.R. Barone, R.J. Yang: A boundary element approach for recovery of shape sensitivities in three-dimensional elastic solids., *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **74** pp. 69–82, (1989).
- (3) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, (1991), 培風館.
New York, (1986).
- (4) Y.W. Chun, E.J.Haug: Two-dimensional shape optimal design, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **13**, pp. 311–336, (1978).
- (5) E.J. Haug, K.K. Choi, V. Komkov: Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press,
- (6) J.H. Choi, B.M. Kwak: Boundary integral equation method for shape optimization of elastic structures, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **26**, pp. 1579–1595, (1988).
- (7) T. Burczynski, J.H. Kane, C. Balakrishna: Shape design sensitivity analysis via material derivative-adjoint variable technique for 3-D and 2-D curved boundary element, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **38**, pp. 2839–2866, (1995).
- (8) M. Bonnet, T. Burczynski, M. Nowakowski: Sensitivity analysis for shape perturbation of cavity or internal crack using BIE and adjoint variable approach, *Int. J. Solids Struct.*, **39**, pp. 2365–2385, (2002).
- (9) K. Abe, S. Kazama, K. Koro: Shape optimization for sound scattering problems using a BE-based level set method, *Advances in Boundary Element Techniques VIII*, Eds: V. Minutolo and M.H. Aliabadi, EC, Eastleigh, UK, pp. 279–384, (2007).
- (10) K. Dems, Z. Mroz, Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis-II. Structure shaw variation, *Int. J. Solids Struct.*, **20**, pp. 527–552, (1984).