計算数理工学論文集 Vol. 9 (2009 年 12 月)，論文 No. 04-091211 JASCOME

有限要素法における完全整合層の平面電磁波吸収特性

ABSORBING CHARACTERISTICS OF ELECTROMAGNETIC PLANE WAVES IN PERFECTLY MATCHED LAYERS DISCRETIZED BY FINITE ELEMENT METHOD

嶋田　賢男 [1)]，長谷川　弘治 [2)]，佐藤　慎悟 [3)]

Takao SHIMADA, Koji HASEGAWA and Shingo SATO

1) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: s2092003@mmm.muroran-it.ac.jp)
2) 室蘭工業大学大学院工学研究科もの創造系領域 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)
3) 釧路工業高等専門学校電子工学科 (〒084-0916 釧路市大楽毛西 2-32-1, E-mail: s-sato@elctro.kushiro-ct.ac.jp)

A fast technique is desired for estimating reflection coefficients of electromagnetic plane waves from a plane boundary of discretized perfect matched layer(PML), because in the finite element analysis(FEA) division of PML region into finite-elements and absorption parameter distribution in the PML should be determined for achieving non-reflection from PML boundary. For tackling this problem, we present the reflection coefficients calculated from discretized wavenumber. In this paper, we consider the plane wave scattering from a PML plane boundary, and demonstrate that the results give satisfactory approximation of FEA results.

Key Words: PML, Finite Element Method, Electromagnetic wave

1. はじめに

周波数領域の電磁波問題は，開領域で問題を定義することが多い．このため，有限要素法に基づく解析法では，開領域を不連続を含む内部閉領域と残りの一様外部閉領域に仮想境界で二分し，外部領域の効果を吸収境界条件と呼ばれる内部領域の境界条件に置き換えたり，外部領域向けの特殊な要素を採用するなどの工夫が必要である．なかでも完全整合層 (Perfectly Matched Layer: 以下 PML と略す) は，比較的広い入射角の範囲で平面波の反射が小さくなるように吸収媒質を外部領域に埋め込むことで，電磁波の界分布を有限の領域に制限するもので，標準的な方法として用いられている．一方特殊な要素を採用する一方法として，著者らはこれまで，周期構造の平面波散乱解析問題を対象にハイブリッドトレフツ有限要素法 (Hybrid Trefftz Finite Element Method:以下 HTFEM と略す)[(1)] の適用を行い，その妥当性を示してきた [(2)−(4)]．トレフツ要素は，放射条件を厳密に満足するため，入射角並びに伝搬波，非伝搬波に依らず無反射で，外部領域の有限要素分割が不要であるという特徴がある．しかしながらトレフツ要素は，密な有限要素行列を与えるため，標準有限要素法の疎行列性が損なわれる欠点があった．ハイブリッドトレフツ要素の PML への優位性を検討する試みは，既に著者らが報告している [(5)]．しかしながら，最適化を行った PML 材料を装荷した結果との比較は行われておらず，十分な検討とは言えない状況にある．

さて PML は，電磁界の有限差分時間領域法 (Finite Difference Time Domain Method:以下 FD-TD と略す) における無反射吸収境界条件として提案された [(6)]．PML 材料中の界成分を適切に分解し，材料境界への平面波の入射角と周波数に依らず，インピーダンス整合がとれるように材料定数を定めたものである．PML 材料中の界は分解され，Maxwell 方程式を満足しないため，非物理的な材料と考えられる．その後，analytic continuation あるいは complex coordinate stretching[(7, 8)] と呼ばれる導出方法により，周波数領域での材料定数が得られるようになり [(9, 10)]，PML 材料の有限要素法での利用が可能となった．現在では，Maxwell の方程式を満足する異方性材料として PML を取り扱うことができ [(8),(10)−(12)]，FD-TD 法ならびに有限要素

2009 年 9 月 30 日受付，2009 年 11 月 6 日受理

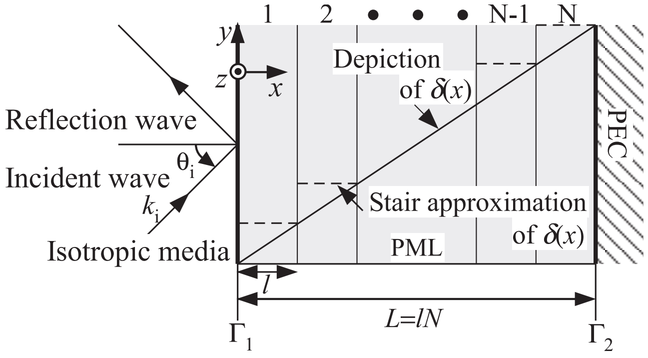


Fig.1　Plane wave reflection by a metal backed PML

法における模擬用吸収材料として広く用いられている．しかしながら，PML 材料の厚み，最大吸収係数，吸収係数分布関数などの吸収パラメータ，分割の最適化についての検討は，十分なされていないように思われる．たとえば，吸収係数分布関数として 2 次 (13)，5 次 (14) の多項式が用いられた報告があるものの，数値解析による結果が示されたのみで，物理的な解釈は示されていない．

このような状況のもとで，著者らは，HTFEM の評価のために，最適化した PML 材料の検討を行っている．本報告では，PML 材料の離散化に起因する反射を，半無限一様均質媒質の分散解析から求まる離散化波数 (15) から説明を試みたところ，良好な結果が得られたので報告する．

2．問題の設定

等方性媒質 (誘電率 ε，透磁率 μ)，PML 材料 (誘電率 $\bar{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{PML}}$，透磁率 $\bar{\bar{\mu}}^{\mathrm{PML}}$)，完全導体を Fig.1 のように配置し，等方性媒質側から完全導体で裏打ちされた厚み L の PML 材料へ入射角 θ_i で平面波が入射する散乱問題を考える．入射波は，H 波あるいは E 波とする．界の変化が x 軸方向のみの 1 次元問題とするために，z 軸方向に界の変化が無く，y 軸方向に界が一様とする．

ここでは，x 軸方向に界を減衰させることを考えるので，PML 材料の誘電率 $\bar{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{PML}}$ と透磁率 $\bar{\bar{\mu}}^{\mathrm{PML}}$ は，

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{PML}} = \varepsilon(\hat{x}\hat{x}\frac{1}{s(x)} + \hat{y}\hat{y}s(x) + \hat{z}\hat{z}s(x)) \tag{1}$$

$$\bar{\bar{\mu}}^{\mathrm{PML}} = \mu(\hat{x}\hat{x}\frac{1}{s(x)} + \hat{y}\hat{y}s(x) + \hat{z}\hat{z}s(x)) \tag{2}$$

となる．ここに，$\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$ は，それぞれ x，y，z 軸方向の単位ベクトルであり，$s(x)$ は complex coordinate stretching に用いる複素関数

$$s(x) = 1 - \mathrm{j}\delta(x) \tag{3}$$

$$\delta(x) = \delta_{\max}\left(\frac{x}{L}\right)^{\mathrm{m}} \tag{4}$$

である．ここで，j は虚数単位である．また，$\delta_{\max}$ は最大吸収係数，m は吸収係数分布関数の次数であり，ともに正の数である．

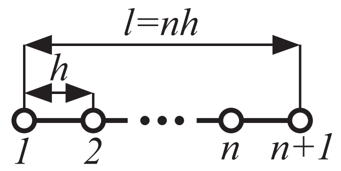


Fig2　n-th order element

平面電磁波は等方性媒質とその PML 材料の平面境界 Γ_1 では，無反射で屈折せずに直進するので PML 材料内で伝搬定数 k_{PML} は

$$k_{\mathrm{PML}} = k_i s(x)\cos\theta_i \tag{5}$$

となる．また，PML 材料中の界の依存性を $\exp(-\mathrm{j}k_{\mathrm{PML}}x)$ と表すと，Fig.1 における等方性媒質とその PML 材料の境界 Γ_1 での反射係数の大きさ $|R|$ は，H 波，E 波入射ともに

$$|R| = \exp\left(-2k_iL\frac{\delta_{\max}}{\mathrm{m}+1}\cos\theta_i\right) \tag{6}$$

となる．

3．有限要素解析

3.1．支配方程式と境界条件

PML 材料には，ラグランジュ節点要素を用いた 1 次元有限要素法を適用し，半無限等方性媒質は入射ならびに反射平面波により界を展開する．

PML 材料中の支配方程式は，入射波波数 k_i で規格化 $\tilde{x} = k_ix$ すると，

$$\left[-\frac{d}{d\tilde{x}}\frac{1}{\upsilon}\frac{d}{d\tilde{x}} + \frac{1}{\nu}\sin^2\theta_i - \eta\right]\phi(\tilde{x}) = 0 \tag{7}$$

と書ける．ここで，H 波入射では，

$$\phi = E_z, \upsilon = \frac{\mu_{yy}^{\mathrm{PML}}}{\mu}, \nu = \frac{\mu_{xx}^{\mathrm{PML}}}{\mu}, \eta = \frac{\varepsilon_{zz}^{\mathrm{PML}}}{\varepsilon} \tag{8}$$

とし，E 波入射では，

$$\phi = H_z, \upsilon = \frac{\varepsilon_{yy}^{\mathrm{PML}}}{\varepsilon}, \nu = \frac{\varepsilon_{xx}^{\mathrm{PML}}}{\varepsilon}, \eta = \frac{\mu_{zz}^{\mathrm{PML}}}{\varepsilon} \tag{9}$$

とする．ここに，E_z，H_z はそれぞれ電界，磁界の静止フェーザ表現した z 成分である．平面波で展開した半無限等方性媒質内の界の関係式と境界 $\Gamma_1(\tilde{x}=0)$ 上での電磁界の境界条件から，境界 Γ_1 上で，Robin 条件

$$\left[\frac{1}{\upsilon}\frac{d}{d\tilde{x}} - \mathrm{j}\cos\theta_i\right]\phi(0) = -\mathrm{j}2\phi_0\cos\theta_i \qquad \text{at} \quad \Gamma_1 \tag{10}$$

が成立する．ここで，ϕ_0 は，入射電磁界の振幅であり，H 波入射のときに E_0，E 波入射のときに H_0 とする．また，完全導体上での電磁界の境界条件は

$$\left.\begin{array}{ll} E_z = 0 & \text{for H 波} \\ dH_z/d\tilde{x} = 0 & \text{for E 波} \end{array}\right\} \quad \text{at} \quad \Gamma_2 \tag{11}$$

Table1　Discretized wavenumber in PML

Order	Discretized wavenumber $\tilde{k}_{\mathrm{PML}}$
1	$\frac{1}{h}\cos^{-1}\left[\frac{6-2(k_{\mathrm{PML}}h)^2}{6+(k_{\mathrm{PML}}h)^2}\right]$
2	$\frac{1}{2h}\cos^{-1}\left[\frac{15-26(k_{\mathrm{PML}}h)^2+3(k_{\mathrm{PML}}h)^4}{15+4(k_{\mathrm{PML}}h)^2+(k_{\mathrm{PML}}h)^4}\right]$
3	$\frac{1}{3h}\cos^{-1}\left[\frac{2800-11520(k_{\mathrm{PML}}h)^2+4860(k_{\mathrm{PML}}h)^4-324(k_{\mathrm{PML}}h)^6}{2800+1080(k_{\mathrm{PML}}h)^2+270(k_{\mathrm{PML}}h)^4+81(k_{\mathrm{PML}}h)^6}\right]$
4	$\frac{1}{4h}\cos^{-1}\left[\frac{19845-148680(k_{\mathrm{PML}}h)^2+134064(k_{\mathrm{PML}}h)^4-28800(k_{\mathrm{PML}}h)^6+1280(k_{\mathrm{PML}}h)^8}{19845+10080(k_{\mathrm{PML}}h)^2+3024(k_{\mathrm{PML}}h)^4+768(k_{\mathrm{PML}}h)^6+256(k_{\mathrm{PML}}h)^8}\right]$

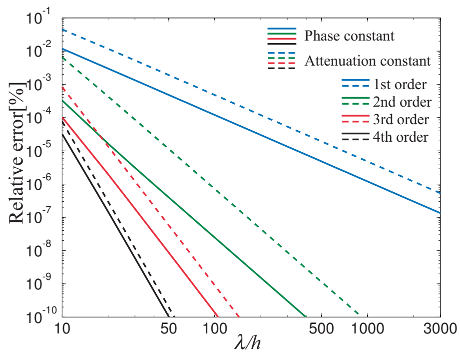


Fig3　Phase error and attenuation error as a function of λ/h for 1st-,2nd-,3rd-,and 4th order elements

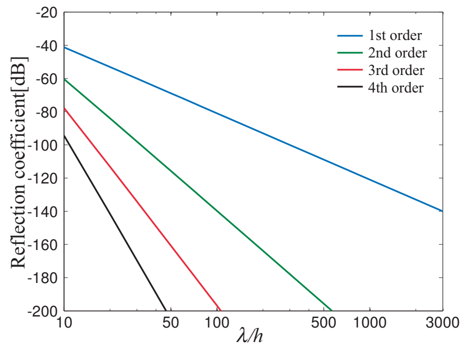


Fig.4　Reflection coefficient on the plane boundary between an isotropic media and its PML

である．以上から，Fig.1 に示した問題は，式 (7) の微分方程式を，境界条件式 (10)，(11) を課して 1 次元有限要素解析する問題となる．この有限要素解析の定式化については良く知られているので [16]，本論文では省略する．

なお，入射端 ($\tilde{x}=0$) での界 $\phi(0)/\phi_0$ が求まると，電界反射係数の大きさ $|R_{\mathrm{FEM}}|$ は

$$|R_{\mathrm{FEM}}| = \left|\frac{\phi(0)}{\phi_0} - 1\right| \tag{12}$$

と求まる．

3.2. 計算方法

計算には，汎用有限要素法シミュレータである COMSOL Multiphysics$^{\mathrm{TM}}$ を用いる．計算の簡単化のため $\delta(x)$ は，Fig.1 に示すようにステップ幅が l の N ステップで階段近似する．このとき，PML 材料は，各層の厚みが l で誘電率 $\bar{\bar{\varepsilon}}_{\mathrm{PML}}$ と透磁率 $\bar{\bar{\mu}}_{\mathrm{PML}}$ が要素内の位置に依らず値が一定の N 層媒質となる．また，今回は各層を 1 個の有限要素で分割を行っているので，N は分割数と等しい．以上から本計算では，$\delta(x)$ の階段近似による反射と波数の離散化による反射とが共に含まれている．

4. 波数の離散化誤差とそれによる反射

PML 材料表面では，原理的に平面波は無反射で直進するが，PML 材料内の波数は，離散化により離散化誤差を含み変化するため反射が生ずる．この現象を多層媒質平面境界での反射で考える．一様均質 ($\delta(x)=$ (一定)) とした入射側と透過側の半無限 PML 材料の平面境界での電界反射係数 $\tilde{R}_{it}$ は，入射側離散化波数を $\tilde{k}_i$，透過側離散化波数を $\tilde{k}_t$ とすると

$$\tilde{R}_{it} = (-1)^p \frac{\tilde{k}_i/s_i - \tilde{k}_t/s_t}{\tilde{k}_i/s_i + \tilde{k}_t/s_t} \tag{13}$$

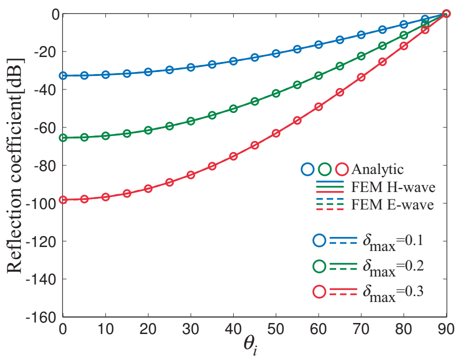
となる．ここで，$s_i = 1-\mathrm{j}\delta_i$，$s_t = 1-\mathrm{j}\delta_t$ であり，一定とする．また，H 波入射では $p=0$，E 波入射では $p=1$ である．なお，非一様な場合 (m $\neq 0$) には，$\delta(x)$ を階段近似し，各層内で $\delta(x)$ を一定として，多層媒質での反射として扱う．

Fig.1 において，PML 材料を一様 (m=0) とした場合の境界 Γ_1 での電界反射係数 $\tilde{R}$ は，式 (13) において，$\tilde{k}_i = k_i\cos\theta_i$，$s_i=1$ とし，全要素内の離散化波数は $\tilde{k}_t$ なので

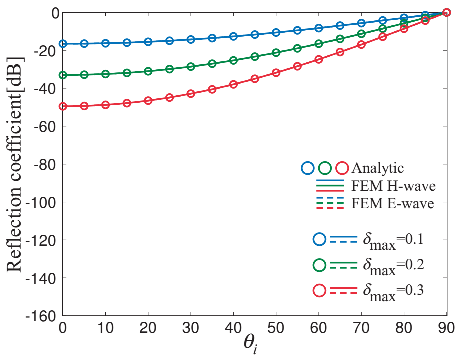
$$\tilde{R} = \frac{\tilde{R}_{it} + R_{\mathrm{PEC}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\tilde{k}_t L}}{1 + \tilde{R}_{it}R_{\mathrm{PEC}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\tilde{k}_t L}} \tag{14}$$

となる．ここで，R_{PEC} は完全導体での電界反射係数であり H 波，E 波入射ともに $R_{\mathrm{PEC}}=-1$ である．なお，$\tilde{k}_t \sim k_i\cos\theta_i s_t$ では，$\tilde{R}_{it}=0$ となり，式 (13)，(14) と式 (6) から求まる反射係数は，$|\tilde{R}| \sim |R|$ となる．

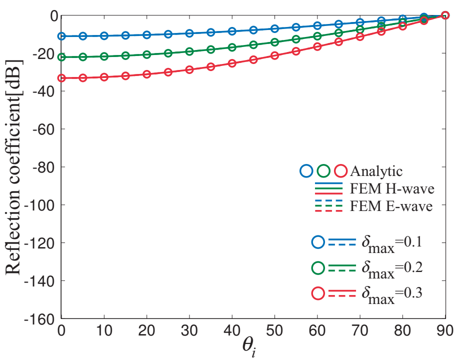
離散化波数は，半無限一様均質媒質を Fig.2 に示す n 次ラグランジュ節点要素で分割を行うと，要素の補間関数から節点間距離 h と媒質内伝搬定数の関数として求まることが知られている [15]． いま，一様均質 ($\delta(x)=$ (一定)) とした半無限 PML 材料へ，波数の大きさ k_i の平面波が入射角 θ_i で入射する問題



(a) m=0

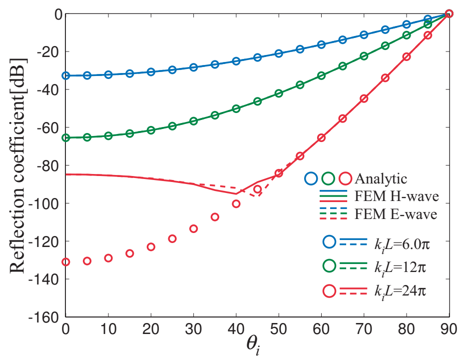


(b) m=1

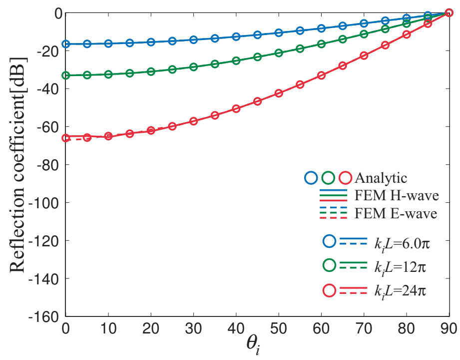


(c) m=2

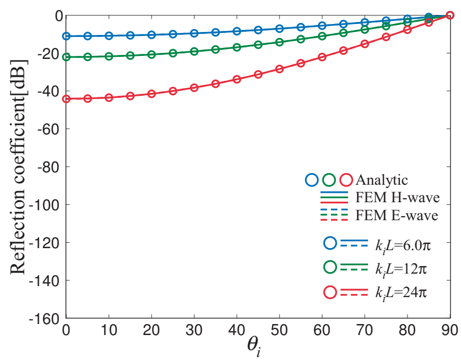
Fig5 Dependences of reflection coefficient on incident angle and maximum loss tangent



(a) m=0



(b) m=1



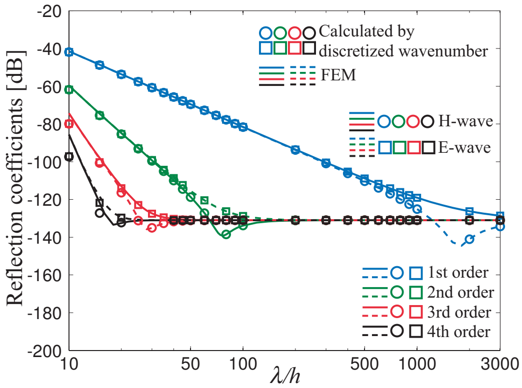
(c) m=2

Fig6 Dependences of reflection coefficient on incident angle and maximum loss tangent

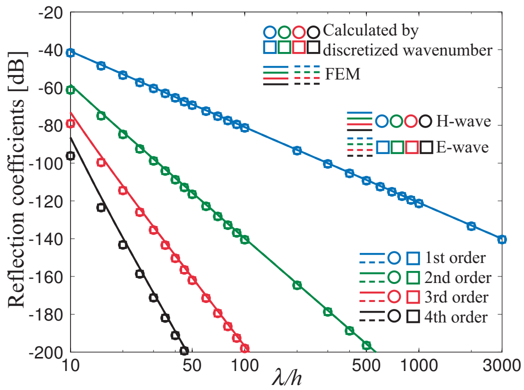
を考え，1 次から 4 次要素で分割を行ったときの PML 材料内の離散化波数 $\tilde{k}_{\mathrm{PML}}$ を調べたものを Table1 に示す．ここで，$k_{\mathrm{PML}} = k_i(1-\mathrm{j}\delta)\cos\theta_i$ である．具体的に，入射角 $\theta_i = 0°$，吸収係数 $\delta = 0.3$ として要素の補間関数が 1 次，2 次，3 次，4 次の位相定数 (Re($\tilde{k}_{\mathrm{PML}}$)) と減衰定数 (-Im($\tilde{k}_{\mathrm{PML}}$)) の相対誤差の λ/h 依存性を調べたものを Fig.3 に示す．ここで，λ は $\lambda/h = 2\pi/(k_i h)$ を満足する PML 材料内波長である．このとき，分割数 N は $N = \frac{k_i L}{2n\pi}\frac{\lambda}{h}$ であり，整数となるよう規格化 PML 厚み $k_i L$ を決定する．補間関数の次数に関わらず λ/h の増加に対して位相定数，減衰定数ともに相対誤差が指数関数的に減衰していること，補間関数の次数が高い方が収束が速いことが確認できる． Fig.4 は電界反射係数の大きさを式 (13) から計算したものである．Fig.3 の波数の相対誤差と Fig.4 の反射係数は，λ/h に関して同様の挙動を示すことから，PML 材料表面での反射が波数の離散化誤差の減少により低減していることが確認出来る．

5．吸収パラメータと反射係数の関係

有限要素解と離散化波数を用いた解析解との比較を行う前に，厚み，最大吸収係数，吸収係数分布関数の次数と電界反射係数の関係を調べる． Fig.5，Fig.6 は，Fig.1 において，層数 $N = 120$ とし，式 (6) による解析解 (○，○，○) と H 波入射



(a) $\delta_{\max} = 0.1$



(b) $\delta_{\max} = 0.2$

Fig.7　Dependence of reflection coefficient on λ/h for m=0 and $\theta_i = 0°$

(—, —, —)，E 波入射 (---, ---, ---) の有限要素解の電界反射係数の大きさの入射角 θ_i 依存性を，吸収係数分布関数の次数 (a)m=0，(b)m=1，(c)m=2 として調べたものである．要素の補間関数の次数は 2 次とした．Fig.5 では規格化 PML 厚み $k_iL = 6.0\pi$ と固定し，最大吸収係数 $\delta_{\max} = 0.1, 0.2, 0.3$ と変化させ，Fig.6 では最大吸収係数 $\delta_{\max} = 0.1$ と固定し，規格化 PML 厚み $k_iL = 6.0\pi, 12\pi, 24\pi$ と変化させ計算を行った．Fig.5，Fig.6 から，吸収係数分布関数の次数 m に関わらず，最大吸収係数 $\delta_{\max}$ と規格化 PML 厚み k_iL の増加とともに電界反射係数の大きさが減少していること，調べた中では，m=0 のときに電界反射係数がもっとも小さいことが確認できる．また，H 波 (実線)，E 波 (破線) 入射では，Fig.6(a) の入射角が 30° から 50° の範囲において相違が見られることを除けば，良く一致していることも確認できる．Fig.6(a) において，入射角が 0° から 50° の範囲で有限要素解が式 (6) の解析解から大きくずれているが，これは離散化波数による反射を無視しているためである．これらの結果から，吸収係数分布関数として 0 次関数を用いたほうが，これまでの PML 材料の最適化に関する報告であった 2 次や 5 次関数を用いるより，反射を抑えられると考えられる．

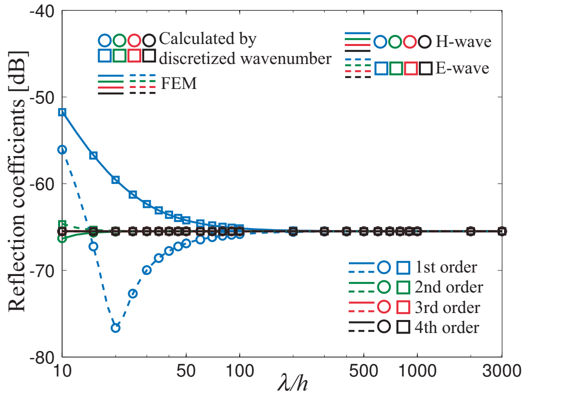


Fig.8　Dependence of reflection coefficient on λ/h for $\theta_i = 60°$, m=0 and $\delta_{\max} = 0.1$

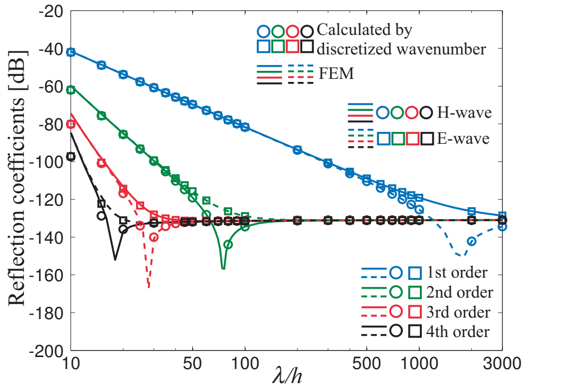


Fig.9　Dependence of reflection coefficient on λ/h for $\theta_i = 0°$, m=1 and $\delta_{\max} = 0.2$

6. 離散化波数を用いた解析解と有限要素解との比較

これ以降の計算は，H 波と E 波入射，規格化 PML 厚み $k_iL = 24\pi$，補間関数の次数を 1 次，2 次，3 次，4 次として行う．

Fig.7 は，入射角 $\theta_i = 0°$，吸収係数分布関数の次数 m=0，最大吸収係数 (a)$\delta_{\max} = 0.1$，(b)$\delta_{\max} = 0.2$．有限要素解と離散化波数 $\tilde{k}_{\mathrm{PML}}$ から計算した解析解の電界反射係数の λ/h 依存性を調べたものである．Fig.7(a) では，式 (6) から求まる反射係数の大きさ -1.3098×10^2[dB] へ収束していることが確認できる．また，有限要素解 (H 波:(—,—, —,—)，E 波:(---, ---, ---, ---)) と離散化波数から計算した解析解 (H 波:(○, ○, ○, ○)，E 波:(□, □, □, □)) が良く一致していることも確認できる．しかしながら，有限要素解は，補間関数の次数によって H 波入射と E 波入射の結果が解析解の結果と入れ換わっている．この理由は現段階では，明らかにできていない．

Fig.8 は，入射角 $\theta_i = 60°$，吸収係数分布関数の次数 m=0，最大吸収係数 $\delta_{\max} = 0.1$ とし，Fig.9 は，入射角 $\theta_i = 0°$，吸収係数分布関数の次数 m=1，最大吸収係数 $\delta_{\max} = 0.2$ として，有限要素解と離散化波数 $\tilde{k}_{\mathrm{PML}}$ から計算した電界反射係数の λ/h 依存性を調べたものである．式 (6) から電界反射係数の大きさは，

入射角が $\theta_i = 60^\circ$ の場合には，$\theta_i = 0^\circ$ の場合の半分となり，吸収係数分布関数の次数が m=1 の場合には，m=0 の場合の半分となることがわかる．Fig.8 では，Fig.7(a) で設定したパラメータでの反射係数の大きさの半分の値 -6.5490×10^1[dB] へ収束しており，Fig.9 では，Fig.7(b) で設定したパラメータでの反射係数の大きさの半分の値 -1.3098×10^2[dB] へ収束している事が確認できる．また，H 波入射と E 波入射の結果において，Fig.8，Fig.9 でも，Fig.7 と同様に有限要素解において，補間関数の次数によって結果が入れ換わっていることが確認ができる．また，Fig.7，Fig.8，Fig.9 で，ある λ/h の範囲で相違が見られることを除けば，両者の結果が良く一致していることが確認できる．

7. むすび

本論文では，有限要素解析における PML 材料の最適化を目的として，有限要素解を用いずに最適化を行えるように，PML 材料の離散化に起因する反射を，分散解析から求まる離散化波数から評価する方法を提案した．具体的に，等方性媒質とその PML 材料の平面境界に平面電磁波が入射する散乱問題の解析を行い，有限要素解と離散化波数から計算した解析解との比較から，有限要素解での補間関数の次数によって，H 波と E 波入射の結果が入れ換わることを除けば，両者の結果がだいたい一致していることを確認した．このことから，PML 材料の離散化誤差に起因する反射は，離散化波数から計算できる解析解から見積もることができると考えられる．

PML 材料の最適化に関する報告では，吸収係数分布関数に 2 次や 5 次の多項式を用いた報告がある．次数を 0 次，1 次，2 次と変化させ反射係数の比較を行ったところ，0 次のときにもっとも反射係数が小さくなった．これは，設定した吸収パラメータの最適化の必要性を示唆しているものと考えられる．

今後は，有限要素解に見られた，補間関数次数によって H 波と E 波入射の結果が入れ換わる原因を明らかにし，離散化波数から，有限要素解析における PML 材料の厚み，最大吸収係数，吸収係数分布関数，有限要素分割の最適化についての検討を行う．

参考文献

(1) Qing-Hua Qin：The Trefftz Finite and Boundary Element Method, (2000), WIT Press.

(2) 佐藤慎悟，長谷川弘治：多層格子による平面波散乱特性のハイブリッド・トレフツ有限要素法解析， 計算数理工学論文集， **5**(2005)， pp. 113–118.

(3) 佐藤慎悟，長谷川弘治：3 次元 2 重周期構造による平面波散乱特性のハイブリッドトレフツ有限要素法解析， 信学技報， **106**(2006)， pp. 181–186.

(4) 佐藤慎悟，長谷川弘治：周期構造による平面波散乱特性のハイブリッドトレフツ有限要素法解析の拡張， 信学技報， **107**(2007)， pp.25. 25–30.

(5) 佐藤慎悟，長谷川弘治：多層周期構造による平面波散乱特性の有限要素解析法の比較， 計算数理工学論文集， **7**(2008)， pp. 219–224.

(6) J.P. Berenger：A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves， J. Comput. Phys.， **114**(1993)， pp. 185–200.

(7) W.C. Chew and W.H. Weedon：A 3D perfectly matched medium for modified Maxwell's equations with stretched coordinates， Microwave Opt. Technol. Lett.， **7**(1994)， pp. 599–604.

(8) F.L. Teixeira and W.C. Chew：Complex space approach to perfectly matched layers:a review and some new developments, Int. J. Numer. Model.， **13**(2000)， pp. 441–455.

(9) W.C. Chew, J.M. Jin and E. Michielssen:Complex coordinate stretching as a generalized absorbing boundary condition， Microwave Opt. Technol. Lett.， **15**(1997)， pp. 363–369.

(10) F.L. Teixeira and W.C. Chew：Unified analysis of perfectly matched layers using differential forms， Microwave Opt. Technol. Lett.， **20**(1999)， pp. 124–126.

(11) Z.S. Sacks, D.M. Kingsland, R. Lee and J.F. Lee：A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition， IEEE Trans. Antennas Propagat.， **43**(1995)， pp. 1460–1463.

(12) J.Y. Wu, D.M. Kingsland, J.F. Lee and R. Lee：A comparison of anisotropic PML to Berenger's PML and its application to the finite-element method for EM scattering, IEEE Trans. Anten. Prop.， **45**(1997) pp. 40-50.

(13) W.C. Chew and J.M. Jin：Perfectly matched layers in the discretized space:an analysis and optimization, Electromagnetics， **16**(1996)， pp. 325–340.

(14) C. Michler, L. Demkowicz, J. Kurtz and D. Pardo：Improving the performance of perfectly matched layers by means of hp-adaptivity， Numer. Methods Partial Differ. Equ.， **23**(2007)， pp. 832–858.

(15) W.R. Scott, Jr：Erros due to spatial discretization and numerical precision in the Finite-Element Method, IEEE Trans. Anten. Prop.， **42**(1994)， pp. 1565–1570.

(16) Jianming Jin：Finite Element Method in Electromagnetics, (2002)， John Wiley & Sons, Inc.