

ポアソン方程式に対する格子ボルツマン法の精度評価

ACCURACY ANALYSIS OF LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR THE POISSON EQUATION

瀬田 剛¹⁾

Takeshi SETA

1) 富山大学大学院理工学研究部 (工学) (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)

This paper analyzes the accuracy of two-dimensional lattice Boltzmann method (LBM) for the Poisson equation. By modifying the forcing term and the definition of the physical quantity, the LBM eliminates the error term depending on the relaxation time. The calculations for the Poisson equation with sinusoidal source show that the LBM obtains the second order convergence rate in space and that there is good agreement between the numerical and the analytical solutions. I investigate the computational efficiency by comparative study with the finite difference method (FDM) including the Jacobi, the Gauss-Seidel, and the SOR methods. The computational results for the Helmholtz equation make clear that the approximate relaxation time makes the LBM faster than the SOR method, or more accurate than the FDM. In addition, there is a trade-off between the efficiency and the accuracy provided by the adjustment of the relaxation time in the LBM.

Key Words: Lattice Boltzmann Method, Poisson Equation, Accuracy Analysis

1. はじめに

近年, 格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM)⁽¹⁾ は, 非圧縮性流体解析において流れ関数⁽²⁾ や圧力^(3, 4) 等のポアソン方程式の計算にも用いられるようになってきている. LBM による電気浸透流解析において, 連続の式とナビエ・ストークス方程式 (NS 方程式) は LBM によって解析し, 電気ポテンシャルに対するポアソン方程式は有限差分法 (Finite Difference Method, FDM) によって解析する手法⁽⁵⁾ と, 電気ポテンシャルも LBM によって解析する手法⁽⁶⁾ とがある. ポアソン方程式の計算に対し, FDM の方が LBM より計算効率が高いが, LBM を用いる利点として, NS 方程式に対する LBM と同じアルゴリズムを使用できる簡便さや, 複雑形状をした境界条件の設定の容易さ, 高い並列計算効率等が挙げられる. 本論文では, Chapman-Enskog 展開を用い, ポアソン方程式に対する従来手法^(6, 7, 8) の問題点を明らかにし, その問題を解決した LBM を提案する. ソース項が正弦関数の場合と, ヘルムホルツ方程式の 2 種類のベンチマーク問題を用い, 本モデルの空間精度と計算効率について検証する.

2. ポアソン方程式に対する格子ボルツマン法

2.1. Chapman-Enskog 展開⁽⁹⁾

LBM では, Fig.1 の矢印で示される離散化速度に対応する分布関数 $f_k(\mathbf{x}, t)$ が,

$$f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \delta_t, t + \delta_t) - f_k(\mathbf{x}, t) = -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\tau} + F_k, \quad (1)$$

に従い時間発展する. ここで, \mathbf{c}_k は離散速度ベクトル, δ_t は無次元時間刻み幅, k は離散速度の方向に対するインデックス, τ は緩和時間, $f_k^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ は平衡分布関数, F_k は外力項である. 式 (1) に対し 2 次の項までのテーラー展開を行うと,

$$\delta_t(\partial_t + \mathbf{c}_k \cdot \nabla) f_k + \frac{1}{2} \delta_t^2 (\partial_t + \mathbf{c}_k \cdot \nabla)^2 f_k = -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\tau} + F_k, \quad (2)$$

が得られる. 分布関数 f_k の非平衡部分 $f_k^{(n)} (n > 0)$ や, 時間に対するマルチ・スケール t_1, t_2 を用い,

$$\begin{aligned}
f_k &= f_k^{(0)} + \varepsilon f_k^{(1)} + \varepsilon^2 f_k^{(2)} + \dots, \\
\partial_t &= \varepsilon \partial_{t1} + \varepsilon^2 \partial_{t2}, \quad \nabla = \varepsilon \nabla_1 + \varepsilon^2 \nabla_2, \\
R &= \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2, \quad F_k = \varepsilon F_{k1} + \varepsilon^2 F_{k2},
\end{aligned} \quad (3)$$

のように, Chapman-Enskog 展開を行う. ここで, ε は Knudsen 数に相当する微小量である⁽¹⁰⁾. 式 (3) を式 (2) に代入すると, $O(\varepsilon)$ のオーダーにおいて,

$$\varepsilon \delta_t (\partial_{t1} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_1) f_k^{(0)} = -\varepsilon \left(\frac{f_k^{(1)}}{\tau} + F_{k1} \right), \quad (4)$$

が, $O(\varepsilon^2)$ のオーダーにおいて,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \left[\delta_t (\partial_{t2} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_2) + \frac{\delta_t^2}{2} (\partial_{t1} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_1)^2 \right] f_k^{(0)} \\
+ \varepsilon^2 \delta_t (\partial_{t1} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_1) f_k^{(1)} = -\varepsilon^2 \left(\frac{f_k^{(2)}}{\tau} + F_{k2} \right), \quad (5)
\end{aligned}$$

が得られる. 式 (4) により式 (5) の $f_k^{(1)}$ を消去すると, 式 (5) は,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \left[\delta_t (\partial_{t2} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_2) + \frac{\delta_t^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \tau \right) (\partial_{t1} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_1)^2 \right] f_k^{(0)} \\
+ \tau \varepsilon^2 \delta_t (\partial_{t1} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_1) F_{k1} = -\varepsilon^2 \left(\frac{f_k^{(2)}}{\tau} + F_{k2} \right), \quad (6)
\end{aligned}$$

となる. 流体解析に対する LBM では, 密度を $\rho = \sum_k f_k$, 運動量を $\rho \mathbf{u} = \sum_k f_k \mathbf{c}_k$ のように定義し, 式 (4), (6) に対し k に関する総和を取ることにより連続の式を, 式 (4), (6) に \mathbf{c}_k を掛けた後 k に関する総和を取ることにより NS 方程式を, それぞれ, 導出する⁽⁹⁾. ポアソン方程式に対する LBM では $\sum_k f_k^{(0)} = u$, $\sum_k f_k^{(0)} \mathbf{c}_k = \mathbf{0}$ のように定式化し, 式 (4), (6) から拡散係数 χ , ソース項 $-\chi R$ を有する拡散方程式,

$$\partial_t u = \chi \nabla^2 u - \chi R, \quad (7)$$

が導出される. LBM では式 (7) の定常解をポアソン方程式,

$$\nabla^2 u = R, \quad (8)$$

の解として用いる⁽⁷⁾. 連続の式と NS 方程式の 2 式を解析する LBM⁽¹⁾ と異なり, ポアソン方程式に対する LBM では, 1 つの方程式だけが導出されるため, 式 (4), (6) に対し k の総和を取るだけでよく, 平衡分布関数 $f_k^{(0)}$ も高次に展開する必要がない. 以下に, ポアソン方程式 (8) に対する代表的な LBM を整理し, 各手法の問題点を明示する.

2.2. 平林らのモデル⁽⁷⁾

平林らは, Fig.1 の 1~4 の矢印で示されるように, 離散速度が, $\mathbf{c}_1 = (c, 0)$, $\mathbf{c}_2 = (0, c)$, $\mathbf{c}_3 = (-c, 0)$, $\mathbf{c}_4 = (0, -c)$ で定義される D2Q4 モデルを用いた. ここで c は離散速度の大きさを表す. 平衡分布関数と外力項を,

$$f_k^{(0)} = \frac{u}{4} \quad (k = 1-4), \quad F_k = 0 \quad (k = 1-4), \quad (9)$$

のように定式化し, 変数 u の定義式を,

$$u = \sum_{k=1}^4 f_k - \tau \delta_t \chi R, \quad (10)$$

とする. なお, 平林らは $\delta_t = 1$ としたため, 文献⁽⁷⁾ には式 (10) の右辺の δ_t が明記されていない. 式 (10) に式 (3) を代入すると,

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^4 (f_k^{(0)} + \varepsilon f_k^{(1)} + \varepsilon^2 f_k^{(2)} + \dots) \\
&\quad - \tau \delta_t \chi (\varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \dots), \quad (11)
\end{aligned}$$

となり,

$$\sum_{k=1}^4 f_k^{(0)} = u, \quad \sum_{k=1}^4 f_k^{(n)} = \tau \delta_t \chi R_n \quad (n > 0), \quad (12)$$

の関係が得られる. 式 (4) について k に関する総和を取り, 式 (9) から得られる $\sum_k f_k^{(0)} = u$, $\sum_k f_k^{(0)} \mathbf{c}_k = \mathbf{0}$ の関係を用いると,

$$\varepsilon \partial_{t1} u = -\varepsilon \chi R_1, \quad (13)$$

が得られる. 同様に式 (6) の総和を取り, $\sum_k f_k^{(0)} \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k = \frac{c^2}{2} u \mathbf{I}$ を用いると,

$$\varepsilon^2 \left[\partial_{t2} u + \delta_t \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \left(\partial_{t1} \partial_{t1} u + \frac{c^2}{2} \nabla_1^2 u \right) \right] = -\varepsilon^2 \chi R_2, \quad (14)$$

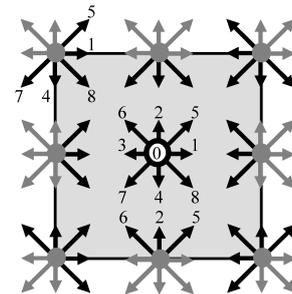


Fig. 1 Schematic of lattice nodes.

が得られる．ここで I は単位行列である．式 (14) の左辺第 2 項に，式 (13) を代入すると

$$\varepsilon^2 \left[\partial_{t2} u + \delta_t \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \left(-\partial_{t1} (\chi R_1) + \frac{c^2}{2} \nabla_1^2 u \right) \right] = -\varepsilon^2 \chi R_2, \quad (15)$$

が得られる．式 (13) と式 (15) を足すと，式 (3) より，

$$\partial_t u = \chi \nabla^2 u - \chi R - \delta_t \chi \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \partial_t \varepsilon R_1, \quad (16)$$

$$\chi = \frac{\delta_t c^2}{2} \left(\tau - \frac{1}{2} \right), \quad (17)$$

が得られる．以上より，平林らのモデルには， $O(\varepsilon)$ のオーダーで作用する R_1 に関する誤差項 $-\frac{\delta_t^2 c^2}{2} (\tau - \frac{1}{2})^2 \partial_t \varepsilon R_1$ が存在することが分かる．また，M. Wang らは，平林らのモデルは非線形ポアソン方程式に対して数値的に不安定であることを指摘している (6) ．

2.3. Z. Chai らのモデル (8)

Z. Chai らは，離散速度が， $\mathbf{c}_0 = (0, 0)$ ， $\mathbf{c}_1 = (c, 0)$ ， $\mathbf{c}_2 = (0, c)$ ， $\mathbf{c}_3 = (-c, 0)$ ， $\mathbf{c}_4 = (0, -c)$ で定義される D2Q5 モデルを用い，平衡分布関数と外力項を，

$$f_0^{(0)} = -u, \quad f_k^{(0)} = \frac{u}{4} \quad (k = 1-4), \quad (18)$$

$$F_0 = 0, \quad F_k = \frac{\delta_t^2 c^2}{8} \left(\frac{1}{2} - \tau \right) R \quad (k = 1-4), \quad (19)$$

のように定式化し，変数 u の定義式を，

$$u = \sum_{k=1}^4 f_k, \quad (20)$$

としている．Z. Chai らは，式 (18) より $\sum_{k=0}^4 f_k = 0$ となることから，式 (4)，(6) から，ポアソン方程式 (8) を直接導出できると述べている．しかし，この考えは誤りである．まず第一に，Chapman-Enskog 展開において， $F_k = \varepsilon^2 F_{k1}$ の関係を用い， $O(\varepsilon^2)$ のオーダーのみに外力が作用するとした誤った仮説を取り入れている．更に，式 (1) に従い時間発展する f_k の総和から導かれる保存式系には，式 (7) で示されるような時間項が存在するはずである．また，式 (20) から明らかのように，変数 u の計算に静止粒子の寄与が全くなく，Z. Chai らのモデルは，D2Q4 モデルに基づくモデルである．Z. Chai らのモデルから静止粒子に対する分布関数を削除し，式 (18)-(20) から保存式系の導出を行うと，

$$\partial_t u = \chi \nabla^2 u - \chi R + \frac{\delta_t \chi}{2} \partial_t \varepsilon R_1, \quad \chi = \frac{\delta_t c^2}{2} \left(\tau - \frac{1}{2} \right), \quad (21)$$

が得られる．Z. Chai らのモデルには， $\frac{\delta_t^2 c^2}{4} (\tau - \frac{1}{2}) \partial_t \varepsilon R_1$ の誤差項が存在する．

2.4. M. Wang らのモデル (6)

M. Wang らは，Fig.1 に示されるように，離散速度が， $\mathbf{c}_0 = (0, 0)$ ， $\mathbf{c}_1 = (c, 0)$ ， $\mathbf{c}_2 = (0, c)$ ， $\mathbf{c}_3 = (-c, 0)$ ， $\mathbf{c}_4 = (0, -c)$ ， $\mathbf{c}_5 = (c, c)$ ， $\mathbf{c}_6 = (-c, c)$ ， $\mathbf{c}_7 = (-c, -c)$ ， $\mathbf{c}_8 = (c, -c)$ で定義される D2Q9 モデルを用い，平衡分布関数を，

$$f_k^{(0)} = \begin{cases} 0 & (k = 0) \\ u/6 & (k = 1-4), \\ u/12 & (k = 5-8) \end{cases} \quad (22)$$

外力項を，

$$F_k = \delta_t \left(\frac{1}{2\tau} - 1 \right) \omega_k R, \quad \omega_k = \begin{cases} 4/9 & (k = 0) \\ 1/9 & (k = 1-4), \\ 1/36 & (k = 5-8) \end{cases} \quad (23)$$

のように定式化し，変数 u の定義式を，

$$u = \sum_{k=0}^8 \left(f_k - \frac{\delta_t}{2} \omega_k R \right), \quad (24)$$

としている．式 (22)-(24) を用いると，式 (4)，(6) から，

$$\partial_t u = \chi \nabla^2 u - R, \quad \chi = \frac{2\delta_t c^2}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right), \quad (25)$$

が得られる．M. Wang らのモデルでは，誤差項が存在しないが， $\chi = 1$ を満足するため，緩和時間が $\tau = \frac{3}{2c^2\delta_t} + \frac{1}{2}$ の関係を常に満足しなければならない．

2.5. 新しいLBMの提案

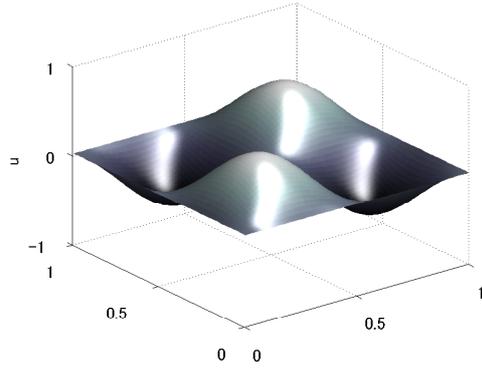
誤差項が存在しない M. Wang らのモデルを修正し，緩和時間が固定されない LBM を提案する．なお，計算効率を向上させるため，離散速度数の少ない D2Q4 モデルを用いる．平衡分布関数は，平林らのモデルと同様に，

$$f_k^{(0)} = \frac{u}{4} \quad (k = 1-4), \quad (26)$$

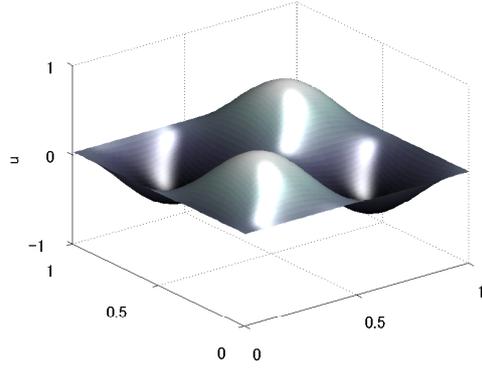
とする．式 (23)，(24) を D2Q4 モデルに対応するように修正し，外力項と変数 u の定義式に χ を導入する．

$$F_k = \frac{\delta_t}{4} \left(\frac{1}{2\tau} - 1 \right) \chi R \quad (k = 1-4), \quad (27)$$

$$u = \sum_{k=1}^4 \left(f_k - \frac{\delta_t}{8} \chi R \right). \quad (28)$$



(a) Numerical solution



(b) Analytical solution

Fig. 2 Solution of the Poisson equation (34). $\kappa = 2\pi$.

M. Wangらのモデルからの改良点は以上である．式(26)-(28)を用いると，式(4)，(6)から，

$$\partial_t u = \chi \nabla^2 u - \chi R, \quad \chi = \frac{\delta_t c^2}{2} \left(\tau - \frac{1}{2} \right), \quad (29)$$

が得られる．式(29)には，誤差項が存在せず，式(25)と異なりソース項 R に χ が掛けられている．式(29)の時間項に対して前進差分近似 $\partial_t u \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$ を適用すると，

$$u^{n+1} = u^n + \chi \Delta t (\nabla^2 u^n - R^n), \quad (30)$$

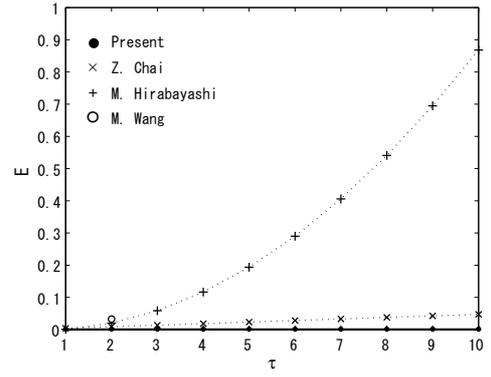
となることから明らかなように， τ ($\tau > \frac{1}{2}$) の関数である χ の値を適切に設定することで，実質的な時間刻み幅 $\chi \Delta t$ を変更でき，計算の高速化が図られる．

3. 数値計算

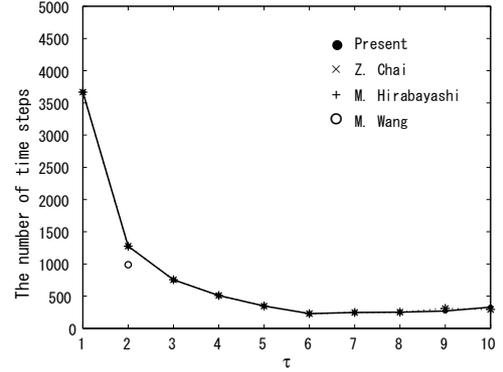
3.1. 境界条件の設定

ディリクレ境界条件の設定方法は，M. Wangらによって提案された手法⁽⁶⁾を用いる． f_1, f_2, f_3, f_4 が存在する D2Q4 モデルでは，Fig.1 に示されるように直線状の境界において1つの分布関数のみが未知である．例えば，Fig.1 の下壁において $u = U_s$ と設定する場合，式(28)より分布関数 f_2 は，

$$f_2 = U_s - (f_1 + f_3 + f_4) + \frac{\delta_t}{2} \chi R, \quad (31)$$



(a) The relative error



(b) The number of time steps

Fig. 3 The dependence of the relative error and of the convergence time on the relaxation time for Eq.(34).

によって決定できる．また，Fig.1 の左上角において，D2Q4 モデルでは，分布関数 f_1 と f_4 が未知である．式(28)より，

$$U_0 = U_s - (f_2 + f_3) + \frac{\delta_t}{2} \chi R, \quad U_0 = f_1 + f_4, \quad (32)$$

の関係が得られる．ここで，式(26)で示される平衡分布関数の重み関数の割合に比例して， f_1 と f_4 は，

$$f_1 = f_4 = \frac{U_0}{2}, \quad (33)$$

のように設定される．残りの3箇所の壁と角に対して，同様の手法で境界条件が設定される．

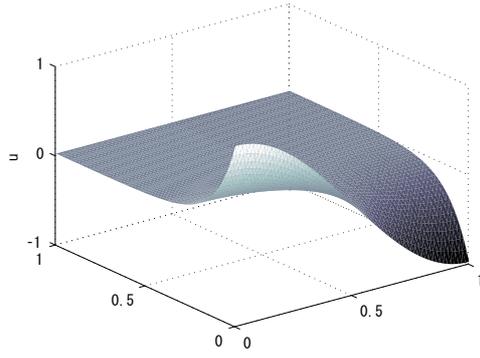
3.2. 正弦関数でソース項が与えられるポアソン方程式

ソース項が波数 κ の正弦波で与えられるポアソン方程式について検証する．

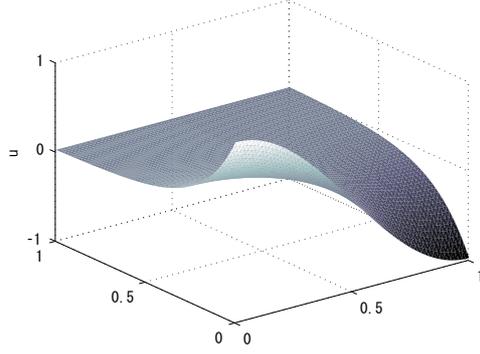
$$\nabla^2 u = -\kappa^2 \sin \kappa x \sin \kappa y. \quad (34)$$

境界条件を，

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (35)$$



(a) Numerical solution



(b) Analytical solution

Fig. 4 Solution of the Helmholtz equation (37). $\lambda = 4$.

とした場合，式 (34) の厳密解は，

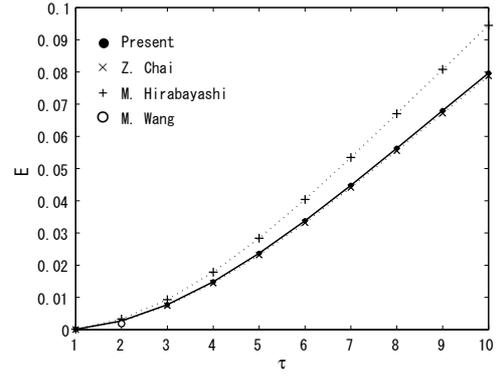
$$\hat{u}(x, y) = \frac{1}{2} \sin \kappa x \sin \kappa y, \quad (36)$$

で与えられる．初期条件は全ての領域で $u = 0$ とし，分布関数の初期条件は u の値に対応する平衡分布関数 $f_k^{(0)}$ を用い， $f_k = f_k^{(0)}$ によって与える．収束判定条件は， $\max |u^{n+1} - u^n| \leq 0.5 \times 10^{-10}$ とした． $\kappa = 2\pi$ ， $\tau = 8$ ，格子点数を 64×64 とした場合の本モデルの計算結果を Fig.2 に示す．本モデルの計算結果は，式 (36) の厳密解とよい一致を示すことが分かる．

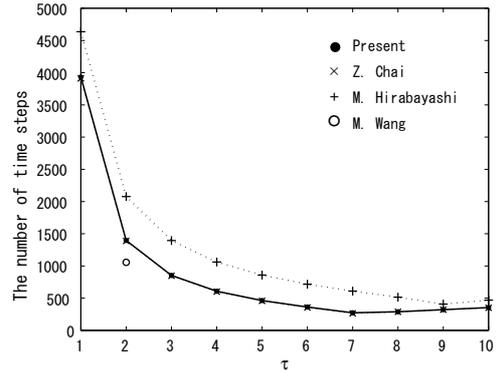
緩和時間 τ に対する相対誤差 $E = \sum |u - \hat{u}| / \sum |\hat{u}|$ と収束時間との関係を Fig.3 に示す．ここで， $\kappa = 2\pi$ ， 64×64 である．本モデルでは緩和時間の関数である誤差項が除去されているため，解の精度が緩和時間に依存しないことが Fig.3(a) から分かる．また，M. Wang らのモデルでは，緩和時間が固定されているが，本モデルでは，緩和時間を変更することで計算を高速化できることが Fig.3(b) から分かる．

Table 1 The spatial convergence rates

Lattice size ($N \times N$)	E	L_2
16×16	2.560×10^{-2}	
32×32	6.419×10^{-3}	1.9958
64×64	1.606×10^{-3}	1.9990
128×128	4.015×10^{-4}	2.0000
256×256	1.003×10^{-4}	2.0005



(a) The relative error



(b) The number of time steps

Fig. 5 The dependence of the relative error and of the convergence time on the relaxation time for Eq.(37).

$L_2 = \log_2(E(N)/E(2N))$ で定義される L_2 ノルムを用い，本モデルの空間精度を算出する．Table 1 に各格子点数に対する相対誤差 E と L_2 ノルムとを示す．Table 1 より，本モデルが空間 2 次精度を有していることが分かる．

3.3. ヘルムホルツ方程式

ソース項が u の関数であるヘルムホルツ方程式，

$$\nabla^2 u = \lambda^2 u, \quad (37)$$

について検証する．境界条件が，

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \frac{\sinh \mu(1-y)}{\sinh \mu}, & u(1, y) &= -\frac{\sinh \mu(1-y)}{\sinh \mu}, \\ u(x, 0) &= \cos \pi x, & u(x, 1) &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

で与えられた場合，厳密解は，

$$\hat{u}(x, y) = \cos \pi x \frac{\sinh \mu(1-y)}{\sinh \mu}, \quad (39)$$

となる．ただし， $\mu = \sqrt{\lambda^2 + \pi^2}$ である．初期条件は， $u = 0$ とし，収束判定条件は， $\max |u^{n+1} - u^n| \leq 10^{-10}$ とする．以

Table 2 The computational efficiency

Method	Computation time [s]	Time steps	E
Present ($\tau = 1$)	8.824	3,932	6.587×10^{-5}
Present ($\tau = 8$)	0.583	289	5.632×10^{-2}
Jacobi	0.977	4,635	1.322×10^{-4}
Gauss-Seidel	0.710	2,915	1.322×10^{-4}
SOR	0.561	1,882	1.322×10^{-4}

下の計算では, $\lambda = 4$, 格子点数は 64×64 とする. 本モデルの計算結果を Fig.4 に示す. Fig.4 において, 本モデルは式 (39) の厳密解とよい一致を示している.

ヘルムホルツ方程式 (37) に対して, 緩和時間 τ を変えた場合の, 相対誤差 E と収束時間の変化を Fig.5 に示す. 本モデルでは緩和時間の変更による計算時間の短縮は可能であることが Fig.5(b) によって示されているが, Fig.5(a) において, Z. Chai らのモデルと同様に解が緩和時間に依存している. 平林らによって指摘されたように⁽⁷⁾, $O(\varepsilon^4)$ のオーダーにおいて, τ の関数である誤差項が存在するためと推測される.

FDM と本モデルとの計算効率について比較した結果を Table 2 に示す. Table 2 において, $\tau = 1$ とした本モデルと Jacobi 法を比較したところ, 時間ステップ数がほぼ等しくても計算時間は LBM の方が長い. これは, LBM では 1 つの格子点上に複数の離散速度が存在するため, FDM と比較し 1 時間ステップ当たりの繰り返し計算数が多く, 計算効率が悪くなるためである. また, 本モデルでは $\tau = 8$ とすることで, SOR 法とほぼ等しい計算速度が得られるが, $\tau = 1$ とした本モデルの相対誤差 E との比較から, 計算精度と計算時間とはトレードオフの関係があることが分かる.

最後に, ノルム $\max|u^{n+1} - u^n|$ の時間変化を Fig.6 に示す. $\tau = 8$ の場合, 実質的な時間刻みが大きいため, 計算の最初に大きな振動が発生している. また, $\tau = 1$ において, 本モデルのノルムはヤコビ法とほぼ等しい時間変化を示している. $\tau = 1$, ソース項 R を定数とすると, LBM のスキームはヤコビ法と等しくなる.

4. おわりに

$O(\varepsilon^2)$ のオーダーにおいて, 誤差項が存在せず, 緩和時間を任意に設定可能な, ポアソン方程式に対する LBM を提案した. ソース項が正弦波で与えられるポアソン方程式の計算において, 本モデルが空間 2 次精度を有し, 計算精度が緩和時間 τ に依存しないことが示された. FDM の代表的な計算手法であるヤコビ法, ガウス・ザイデル法, SOR 法を用い, ヘルムホルツ方程式を計算し, 本モデルと比較検証を行った. 本モデルでは緩和時間を適切に設定することで, SOR 法と等しい計算速度が得られたが, 計算効率と計算精度とはトレードオフの関係があることが示された. 今後, 本モデルの 3 次元計算への拡張と, $O(\varepsilon^4)$ のオーダーの誤差項の検証を行う予定である. なお, 本研究は, 科学研究費 (No.20560150) の支援のもとで行われた. ここに謝意を表する.

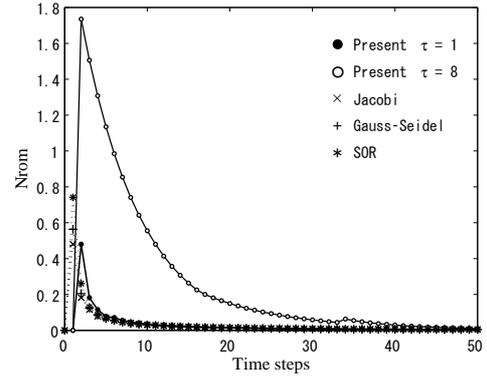


Fig.6 Error norm versus calculation time.

参考文献

- (1) Chen, S. and Doolen, G. D.: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 329–364.
- (2) Chen, S., Tölke, J., and Krafczyk, M.: A new method for the numerical solution of vorticity-streamfunction formulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **198**(2008), pp. 367–376.
- (3) Inamuro, T., Ogata, T., Tajima, S., and Konishi, N.: A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows with large density differences, *J. Comput. Phys.*, **198**(2004), pp. 628–644.
- (4) 齊木善唯, 瀬田剛: 格子ボルツマン法による非圧縮性流体解析, *機論 B*, **74**(2008), pp. 2124–2131.
- (5) Melchionna, S. and Succi, S.: Electrorheology in nanopores via lattice Boltzmann simulation, *J. Chem. Phys.*, **120**(2004), pp. 4492–4492.
- (6) Wang, M., Wang, J., and Chen, S.: Roughness and cavitations effects on electro-osmotic flows in rough microchannels using the lattice Poisson-Boltzmann methods, *J. Comput. Phys.*, **226**(2007), pp. 836–851.
- (7) Hirabayashi, M., Chen, Y., and Ohashi, H.: The Lattice BGK Model for the Poisson Equation, *JSME Int. J. Ser. B*, **44**(2001), pp. 45–52.
- (8) Chai, Z. and Shi, B.: A novel lattice Boltzmann model for the Poisson equation, *Appl. Math. Model.*, **32**(2008), pp. 2050–2058.
- (9) Guo, Z., Zheng, C., and Shi, B.: Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method, *Phys. Rev. E*, **65**(2002), pp. 046308-1–046308-6.
- (10) Sterling, J. D. and Chen, S.: Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods, *J. Comput. Phys.*, **123**(1996), pp. 196–206.