

多重極モーメントを用いた注目領域を解析するための 効率的境界要素法 (2次元静弾性問題への適用)

EFFICIENT BOUNDARY ELEMENT METHOD USING MULTIPOLE MOMENTS FOR FOCUSED DOMAIN (APPLICATION TO 2D ELASTOSTATIC PROBLEM)

滝口 真也¹⁾, 天谷 賢治²⁾

Shinya TAKIGUCHI and Kenji AMAYA

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: takiguchi.s.ab@m.titech.ac.jp)
2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: kamaya@a.mei.titech.ac.jp)

This paper presents the application of efficient boundary element method using multipole moments for focused domain, which is developed by Yamagishi, *et. al.* to compute unknown quantities only in a specific domain efficiently, to two dementional elastostatic problems. In this method, whole boundaries are divided into near boundaries which are near to focused domain and far boundaries which are sufficiently far from it. Then, boundary integrals which contain the unknown quantities on the far boundaries are expressed approximately as low order multipole moments. Thus this method decreases the number of unknowns and boundary integral equations set up, and calculation amount drastically. When unknown quantities are required only in a specific domain, especially on large-scale boundary value problems, this method enable us to compute them efficiently. The capability of this method extended to two dementional elastostatic problems is verified with some numerical experiments.

Key Words: Focused Sub-Domain, Boundary Element Method, Elastostatic Problem, Computational Mechanics

1. はじめに

偏微分方程式の境界値問題に対する代表的な数値解法の一つに境界要素法があり, その高速解法である高速多重極境界要素法は大規模な問題の効率的解法として広く用いられている⁽¹⁾. 境界要素法は通常, 解析領域全ての未知量を同程度の精度で求める手法である. しかし, 実際には目的に応じて特定の, すなわち注目領域の未知量のみを必要とする場合も少なくない. 具体的には, 船舶等の構造物の一部における防食効果を見積もるための腐食・防食解析や, 応力集中部の強度評価を行うための弾性解析等が考えられる. このような場合には, 注目領域の未知量のみを通常の境界要素法と同程度の精度でより高速に求めることができると都合が良い.

以上を背景に, 山岸らは2次元ポテンシャル問題に対して, 境界を注目領域に近い近傍境界と, 十分離れた遠方境界に分け, 多重極モーメントを利用して注目領域の未知量のみを効率的に計算する手法を提案している⁽²⁾.

本研究では, この山岸らの手法, 多重極モーメントを利用した注目領域を解析するための効率的境界要素法を2次元静弾性問題に適用する. また, 実際に数値解析を行って, その有効性を検証する.

2. 2次元静弾性問題への適用

本章では, 多重極モーメントを用いた注目領域を解析するための効率的境界要素法 (E-BEM) を2次元静弾性問題へ適用する際の定式化を示す.

2.1. 境界値問題の設定

簡単のため, 図1のように変位が全て既知である境界 Γ で囲まれた2次元の閉領域 Ω における静弾性問題を考える. すなわち, 変位が $u(z) (= u_1(z) + iu_2(z))$ が解析領域 Ω 内で Navier の方程式⁽³⁾ を満たし, かつ境界 Γ 上では

$$u(z) = u'(z) \quad z \in \Gamma \quad (1)$$

を満たす. また, 必要な未知量を注目領域 Ω^{Focused} の変位 $u(z)$ とする. ここで, i は虚数単位, z は位置ベクトル $\boldsymbol{x} =$

$\{x_1 \ x_2\}^T$ の複素数表示 ($z = x_1 + ix_2$) である. Ω^{Focused} から十分離れた遠方境界 $\Gamma^{\text{Far}} (= \Gamma_{\text{Dir}}^{\text{Far}} + \Gamma_{\text{Neu}}^{\text{Far}} \subseteq \Gamma)$ および多重極モーメント (詳細は後述) の中心 z_c は, $\forall z_0 \in \Omega^{\text{Focused}}$ が $\forall z \in \Gamma^{\text{Far}}$ に対して次式を満たすように決定される.

$$|z - z_c| \ll |z_0 - z_c| \quad (2)$$

一方, 近傍境界 $\Gamma^{\text{Near}} (= \Gamma \cap \overline{\Gamma^{\text{Far}}})$ は Ω^{Focused} に近く, $\exists z_0 \in \Gamma^{\text{Near}}$ に対して $\forall z \in \Gamma^{\text{Far}}$ が式 (2) を満たす. なお, 本論文では境界上の変位 u が全て既知の問題を取り扱うが, 表面力 $q(z) (= q_1(z) + iq_2(z))$ が既知の問題や混合境界条件の問題についても同様の定式化が可能である.

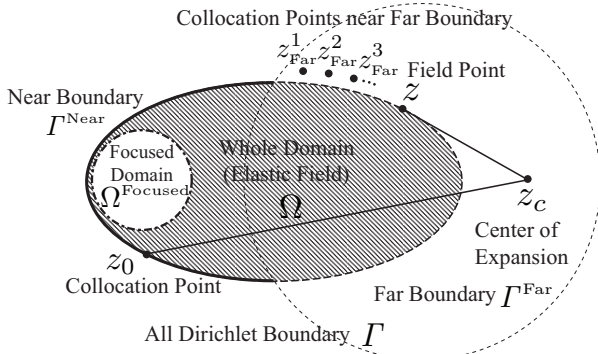


Fig. 1 Model of Analysis

2.2. 境界積分方程式の近傍境界と遠方境界の分割

観測点及びソース点の座標をそれぞれ z, z_0 とすると, 境界積分方程式 (Somigliana の公式 (3)) は次式となる.

$$C_{jk}(z_0)u_k(z_0) = \text{Re} \left[\int_{\Gamma} u_j^*(z, z_0) \cdot \overline{q(z)} |dz| - \int_{\Gamma} q_j^*(z, z_0) \cdot \overline{u(z)} |dz| \right] \quad (3)$$

ただし,

$$u_j^*(z, z_0) = -\frac{1}{4\pi\mu(1+\kappa)} \left\{ \kappa p_j \log |z - z_0|^2 - \overline{p_j} \cdot \frac{z - z_0}{z - z_0} - p_j \right\} \quad (4)$$

$$q_j^*(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \frac{np_j}{z - z_0} + \frac{n\overline{p_j} + \kappa n p_j}{z - z_0} + \frac{n\overline{p_j}(z - z_0)}{(z - z_0)^2} \right\} \quad (5)$$

$$C_{jk}(z) = \begin{cases} \delta_{jk} & z \in \Omega \\ \delta_{jk}/2 & z \in \Gamma \quad (\Gamma \text{ is smooth.}) \\ 0 & z \in (\Omega + \Gamma) \end{cases} \quad (6)$$

であり, μ はせん断弾性係数, κ は Poisson 比 ν により決まるパラメータで, 平面ひずみの時 $\kappa = 3 - 4\nu$, 平面応力の時, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, i は虚数単位である. p_j は $j = 1$ の時 1, $j = 2$ の時 i となる定数, \overline{z} は z の共役複素数, $\text{Re}[z]$ は z の実部, n は $z \in \Gamma$ における法線方向ベクトルの複素数表示, δ_{jk} は Kronecker のデルタである. ここでは境界全ての変位

を拘束する問題を対象としているため, $z_0 \in \Gamma$ の時, 式 (3) において未知量 $q(z)$ を含んでいるのは右辺第 1 項の境界積分である. この境界積分を, Γ^{Near} と Γ^{Far} に分けると,

$$C_{jk}(z_0)u_k(z_0) = \text{Re} \left[\int_{\Gamma^{\text{Near}}} u_j^*(z, z_0) \cdot \overline{q(z)} |dz| + \int_{\Gamma^{\text{Far}}} u_j^*(z, z_0) \cdot \overline{q(z)} |dz| - \int_{\Gamma} q_j^*(z, z_0) \cdot \overline{u(z)} |dz| \right]. \quad (7)$$

2.3. 遠方境界における境界積分の多重極展開

式 (4) を次のように変形する.

$$u_j^*(z, z_0) = -\frac{1}{4\pi\mu(1+\kappa)} \left[\kappa p_j \left(\log |z_0 - z_c|^2 + \log \left| 1 - \frac{z - z_c}{z_0 - z_c} \right|^2 \right) - \overline{p_j} \cdot \frac{(z_0 - z_c) - (z - z_c)}{z_0 - z_c} \left\{ 1 - \frac{\overline{z - z_c}}{z_0 - z_c} \right\}^{-1} - p_j \right] \quad (8)$$

z_c は多重極展開の中心となる. ここで式 (2) の関係が成り立つので, Taylor 展開を適用すると, 式 (8) は,

$$u_j^*(z, z_0) \approx -\frac{1}{4\pi\mu(1+\kappa)} \left[\kappa p_j \left\{ \log |z_0 - z_c|^2 - \sum_{\ell=1}^L \frac{(z - z_c)^\ell}{\ell(z_0 - z_c)^\ell} - \sum_{\ell=1}^L \frac{(z - z_c)^\ell}{\ell(z_0 - z_c)^\ell} \right\} - \overline{p_j} \left\{ \sum_{\ell=0}^L \frac{(z_0 - z_c)(z - z_c)^\ell}{(z_0 - z_c)^{\ell+1}} - \sum_{\ell=0}^{L-1} \frac{(z - z_c)(\overline{z - z_c})^\ell}{(z_0 - z_c)^{\ell+1}} \right\} - p_j \right]. \quad (9)$$

上式により, 式 (7) 右辺第 2 項の Γ^{Far} における境界積分は, 次式のように表される.

$$\int_{\Gamma^{\text{Far}}} u_j^*(z, z_0) \cdot \overline{q(z)} |dz| \approx \sum_{\ell=0}^L M_\ell(z_c) P_\ell^j(z_0) + \sum_{\ell=1}^L N_\ell(z_c) Q_\ell(z_0, p_j) + \sum_{\ell=1}^{L-1} O_\ell(z_c) R_\ell^j(z_0) \quad (10)$$

ただし,

$$M_\ell(z_c) = \int_{\Gamma^{\text{Far}}} (z - z_c)^\ell \cdot \overline{q(z)} |dz| \quad (11)$$

$$N_\ell(z_c) = \int_{\Gamma^{\text{Far}}} (\overline{z - z_c})^\ell \cdot \overline{q(z)} |dz| \quad (12)$$

$$O_\ell(z_c) = \int_{\Gamma^{\text{Far}}} (z - z_c)(\overline{z - z_c})^\ell \cdot \overline{q(z)} |dz| \quad (13)$$

であり, $M_\ell(z_c)$, $N_\ell(z_c)$, $O_\ell(z_c)$ の係数をそれぞれ $P_\ell^j(z_0)$, $Q_\ell^j(z_0)$, $R_\ell^j(z_0)$ とした. 次式の条件

$$|z_0 - z_c| \geq 3|z - z_c| \quad (14)$$

が成り立つ時, 式 (10) の無限級数は $L = 15$ 程度で十分収束することが知られている (1).

2.4. ソース点を近傍境界上に配置した境界積分方程式

ソース点 z_0 が Γ^{Near} 上, 観測点 z が Γ^{Far} 上にある場合には, z_0, z は式 (2) を満たす. 従って, 境界積分方程式, 式 (7)

は式 (10) により,

$$C_{jk}(z_0)u_k(z_0) \approx \text{Re} \left[\int_{\Gamma^{\text{Near}}} u_j^*(z, z_0) \cdot \overline{q(z)} |dz| - \int_{\Gamma} q_j^*(z, z_0) \cdot \overline{u(z)} |dz| + \sum_{\ell=0}^L M_\ell(z_c) P_\ell^j(z_0) + \sum_{\ell=1}^L N_\ell(z_c) Q_\ell^j(z_0) + \sum_{\ell=1}^{L-1} O_\ell(z_c) R_\ell^j(z_0) \right] \quad (15)$$

となる.

2.5. ソース点を遠方境界の近傍に配置した境界積分方程式

まず, ソース点 z_0 を解析領域 Ω の外かつ Γ^{Far} 近傍に配置した通常の境界積分方程式を, 多重極モーメントの数である $3L$ 立式する. 配置するソース点の座標を $z_{\text{Far}}^1, z_{\text{Far}}^2, \dots, z_{\text{Far}}^{3L}$ とすると, 通常の境界積分方程式, 式 (3) は,

$$\text{Re} \left[\int_{\Gamma} u^*(z, z_{\text{Far}}^v, p_j) \cdot \overline{q(z)} |dz| - \int_{\Gamma^{\text{Near}}} q^*(z, z_{\text{Far}}^v, p_j) \cdot \overline{u(z)} |dz| - \int_{\Gamma^{\text{Far}}} q^*(z, z_{\text{Far}}^v, p_j) \cdot \overline{u(z)} |dz| \right] = 0 \quad (16)$$

Γ^{Far} を離散化すると, 第3項は $\mathbf{G}'_{\Gamma^{\text{Far}}} \mathbf{q}_{\text{Far}}$ の形でマトリクス表示できる. ここで, 式 (11),(12),(13) についても同様に離散化すると, 次式のようにマトリクス表示できる.

$$\begin{Bmatrix} M \\ N \\ O \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} I \\ \bar{I} \\ J \end{Bmatrix} \mathbf{q}_{\text{Far}} = \mathbf{S} \mathbf{q}_{\text{Far}} \quad (17)$$

式 (17) における \mathbf{S} のムーア・ペンローズの一般逆行列⁽⁴⁾ を \mathbf{S}^+ とすると, 式 (16) 左辺第3項は

$$\mathbf{G}'_{\Gamma^{\text{Far}}} \mathbf{q}_{\text{Far}} \approx \mathbf{G}'_{\Gamma^{\text{Far}}} \mathbf{S}^+ \begin{Bmatrix} M \\ N \\ O \end{Bmatrix} \quad (18)$$

2.6. マトリクス方程式

式 (15) を離散化した式と, 式 (16) を離散化し, 式 (18) によって Γ^{Far} の未知量を含む境界積分を低次の多重極モーメント $M_\ell(z_c)$, $N_\ell(z_c)$, $O_\ell(z_c)$ で表した式を連立すると, 次式となる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{G}'_{\Gamma^{\text{Near}}} & \mathbf{G}'_{\Gamma^{\text{Far}}} \mathbf{S}^+ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{\text{Near}} \\ M \\ N \\ O \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}'_{\Gamma} \end{bmatrix} \mathbf{u}' \quad (19)$$

式 (19) を解くことにより, Γ^{Near} の未知量 q 及び多重極モーメント $M_\ell(z_c)$, $N_\ell(z_c)$, $O_\ell(z_c)$ を求める.

2.7. 注目領域における未知量の計算

式 (19) を解くことで, 式 (15) の右辺は全て既知数となる. ゆえに, z_0 を Ω^{Focused} 内にとれば, $C_{jj}(z_0) = 1$ となり, Ω^{Focused} 内の未知量 u を精度良く計算できる.

3. 解析例

本章では, 多重極モーメントを用いた注目領域を解析するための効率的境界要素法 (E-BEM) を静弾性問題に適用し

Table 1 Mechanical Property of SS400

Young's Modulus	208 [GPa]
Transverse Elastic Modulus	80 [GPa]
Poisson's Ratio	0.3

た解析例を示す. 解析には, 表 1 に示す一般構造用圧延鋼材 (SS400) の物性値を用い, “平面歪み” とした.

3.1. 計算精度の検証

図 2 のように, 外周が円, 内周が正方形である 2 次元線形弾性体に対し, 境界それぞれに一樣引張り変位 $|u'|$ を与える問題を考える. 必要な未知量 u を含む注目領域 Ω^{Focused} を図 3 に示すように定義する. $\forall z_0 \in \Omega^{\text{Focused}}$ が $\forall z \in \Gamma^{\text{Far}}$ に対して式 (14) を満たすように, 多重極展開の中心 z_c を外周の円及び内周の正方形の中心とし, 外周の円, 内周の正方形を, それぞれ近傍境界 Γ^{Near} , 遠方境界 Γ^{Far} とした. また, 各多重極モーメント M_ℓ, N_ℓ, O_ℓ の数を $L = 15$ とした. Γ^{Far} の近傍に配置するソース点 $z_{\text{Far}}^v (v = 1, 2, \dots)$ の位置を図 3 に示した. 中心 z_c , 半径 0.9[m] の円上に, $3L = 45$ のソース点 z_{Far}^v が等間隔に配置されている. 外周の Γ^{Near} を 1000 の線分一定要素で, 内周の Γ^{Far} を 5000 の線分一定要素で要素分割した. 以上の条件の下, 効率的境界要素法 (E-BEM) と通常の境界要素法 (BEM) で解析を行った. 得られた Γ^{Near} における表面力 q を図 4 に示した. E-BEM と BEM で得られた表面力 q は良く一致しており, E-BEM により Γ^{Near} 上の未知量が十分な精度で計算できていることが分かる. 図 5 には解析領域 Ω 内の $\theta = 0$ での変位 $u(z_0)$ の実部および虚部を示した. なお, 横軸のパラメータ η は次式により与えられる.

$$\eta(z_0) = \min \left\{ \left| \frac{z_0 - z_c}{z - z_c} \right| \middle| z \in \Gamma^{\text{Far}} \right\} \quad (20)$$

この解析例では, Ω は $1/\sqrt{2} \leq \eta \leq 5/\sqrt{2}$, Ω^{Focused} は $3/\sqrt{2} \leq \eta \leq 5/\sqrt{2}$ となる. 遠方境界付近 ($\eta \approx 1/\sqrt{2}$) で, E-BEM と BEM の計算結果の間に大きな差異があるものの, Ω^{Focused} では両者は良く一致しており, E-BEM によって注目領域の未知量が十分な精度で求められていることが分かる. Γ^{Far} 付近では, z_0, z, z_c の位置関係が式 (14) を満たさず, 式 (10) のように Γ^{Far} 上の未知量を含む境界積分を低次の多重極モーメントで表すことはできない. このため, 効率的解法では遠方境界付近において計算結果に誤差が生じている.

3.2. 計算時間の比較

前節と全く同様の問題に対して, 境界の要素分割数を変化させて計算し, 要した時間を効率的境界要素法 (E-BEM) と通常の境界要素法 (BEM) で比較した. Γ^{Near} である外周の要素数を 1000 で固定した. Γ^{Far} である内周の要素数を 1000 から 10000 要素まで変化させた. 各多重極モーメントの数 L および Γ^{Far} の近傍に配置するソース点 z_{Far} の位置は前節通りである. 計算に使用した CPU は AMD Opteron 880 2.4GHz, 搭載メモリは 32GB である. 図 6 に結果を示す. BEM の計

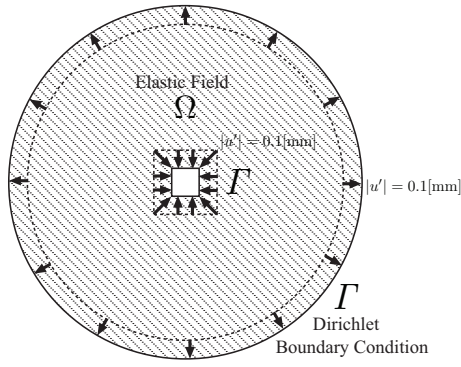


Fig. 2 Boundary Condition of Example

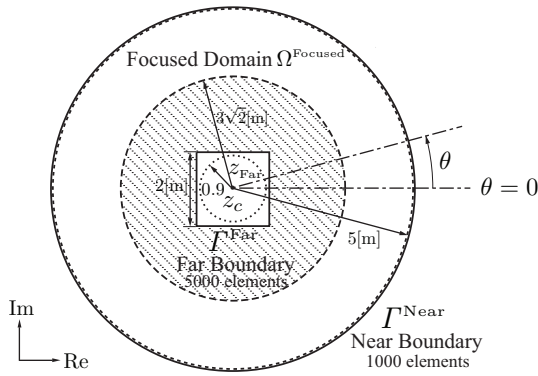


Fig. 3 Model of Example

算量が $O(N^3)$, E-BEM の計算量 $O(N)$ となっており, Γ^{Far} の要素分割数が増加するほど, E-BEM が有効となることが分かる.

4. 結言

本研究では, 山岸らの提案した, 多重極モーメントを用いた注目領域を解析するための効率的境界要素法を 2次元静弾性問題に適用し, その有効性を検証した. 実際に簡単な例題に対してこの効率的境界要素法による数値解析を行い, 計算精度と計算時間を通常の境界要素法と比較した. 2次元静弾性問題においても, この効率的解法によって注目領域の未知量を通常の境界要素法と同程度の精度でより高速に, 効率的に求めることができることを確認した.

参考文献

- (1) Liu Y., Nishimura N. : The fast multipole boundary element method for potential problems : A tutorial, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **30**(2006), pp. 371–381.
- (2) 山岸寛, 天谷賢治 : 多重極展開と一般逆行列を用いた境界要素法による注目領域の高速解法, *計算数理工学論文集*, **8**(2008), pp. 371–381.
- (3) 結城良治, 木須博行 : 境界要素法による弾性解析(1987), 培風館.
- (4) 久保司郎 : 逆問題, (1992), 培風館.

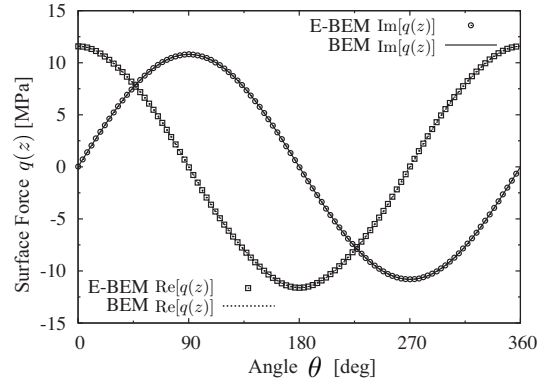


Fig. 4 Surface Force $q(z)$ on Near Boundary

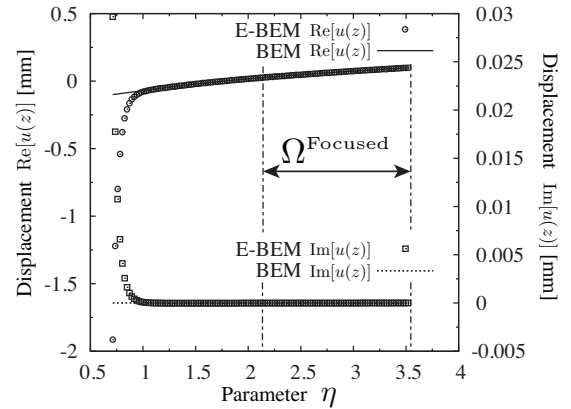


Fig. 5 Displacement $u(z)$ ($\theta = 0$)

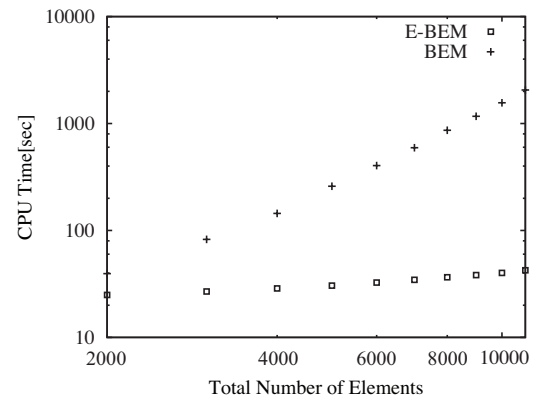


Fig. 6 Comparison of CPU time between this method and Normal BEM