

基本解の時間線形性を利用した動弾性時間域 BIEM の メモリ使用量と計算コストの削減に関する研究

A study on the reduction of the memory requirements and the computational time for elastodynamic TD-BIEM using the temporal linearity of the fundamental solution

吉川 仁¹⁾, 西村 直志²⁾

Hitoshi YOSHIKAWA and Naoshi NISHIMURA

1) 京都大学学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yosikawa@media.kyoto-u.ac.jp)

2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

In this paper, we attempt to reduce the memory requirements and the computational time for elastodynamic TD-BIEM (Time Domain Boundary Integral Equation Method) by focusing on the form of the fundamental solution. The fundamental solution has the linear behavior with respect to time in the interval between the arrival time of P-wave and S-wave. Therefore, if the influence matrix at a time step is calculated and stored once, the influence matrix at the next time step is easily obtained from the stored value. Using this idea, we can reduce the memory requirements and the computational time for elastodynamic TD-BIEM.

Key Words: TD-BIEM, elastodynamics, reduction of memory requirements, reduction of computational time

1. 研究背景・目的

波動方程式や動弾性方程式などの時間に依存する微分方程式を時間域境界積分方程式法(時間域 BIEM)⁽¹⁾で解く際、基本解を用いることで境界積分方程式が空間と時間の畳み込み積分の形で得られる。時間域 BIEM では境界積分方程式を空間内挿関数、時間内挿関数を用いて離散化し代数方程式

$$A(\Delta t)x(n\Delta t) = b(n\Delta t), \quad (1)$$

を得る。ここで、 Δt はタイムステップ幅、 $n\Delta t$ は代表時刻、 x は未知ベクトル、 b は既知ベクトルである。離散化された各代表時刻 $n\Delta t$, ($n = 1, \dots, N_t$) において代数方程式を時間ステップ数 N_t 回解く必要がある。また、各代表時刻において得られる代数方程式の既知ベクトルは、過去の解からの影響の和、つまり影響係数と過去の解との行列ベクトル積の和の形で計算される。このため、自由度や時間ステップ数の大きな大規模問題では、代数方程式 (1) の既知ベクトルを求めるために、膨大な量の影響係数を計算しストアする必要がある。

また、離散化された境界積分方程式の影響係数は、ソースと観測点間の距離と時間差により波動の影響が及ぶ非ゼロ成分のみをストアする。スカラー波動問題では、基本解が時

間に関してデルタ関数の形をしており、各代表時刻で求められる影響係数行列は、どの時刻においても同じバンド幅を持つ。なお、3次元波動方程式の基本解 G は、

$$G(x, y, t) = \frac{\delta(t)}{4\pi r}, \quad (2)$$

である。ここで、 $r = |x - y|$ である。しかし、3次元動弾性問題では、基本解の形から明らかなように、ソースから観測点への影響は、P 波の到達と共に表れ S 波と共に通り過ぎる。多くの弾性材料では、P 波は S 波の 2 倍程度の速さで伝播する。つまり、ソースと観測点の時間差が大きい影響係数行列は非ゼロとなる成分が多くなり、計算に時間を要しストアするには多くのメモリを要する。各代表時刻の影響係数行列は、時間差が大きくなるにつれ、非ゼロ成分のバンド幅が広がる。なお、3次元動弾性方程式の基本解 Γ は等方弾性体の場合、

$$\Gamma_{ij}(x, y, t) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\delta(t-r/c_T)}{r} \delta_{ij} - c_T^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\frac{(t-r/c_T)H(t-r/c_T)}{r} - \frac{(t-r/c_L)H(t-r/c_L)}{r} \right) \right], \quad (3)$$

である。ここで、 μ はラメ定数、 c_L, c_T はそれぞれ P 波速度、S 波速度、 $H(t)$ は Heaviside 関数である。

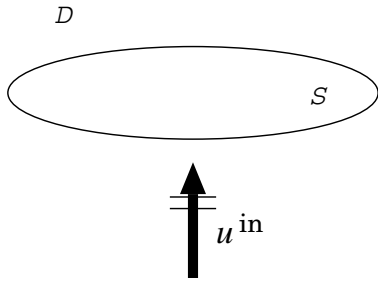


Fig. 1 Scattering problem of plane waves by a crack.

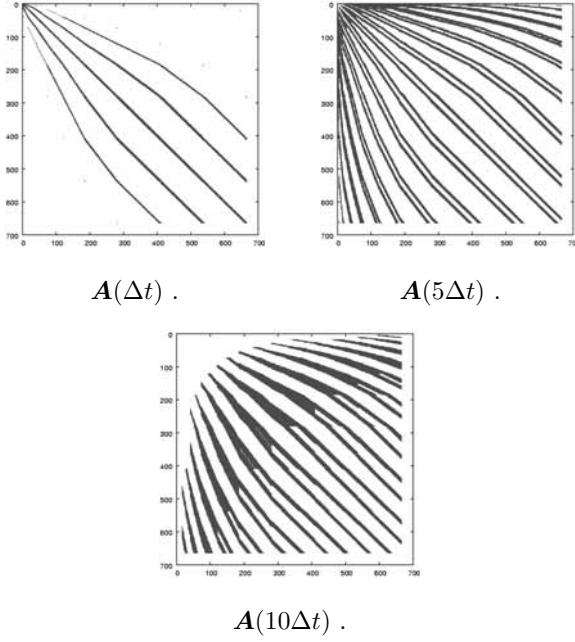


Fig. 2 Nonzero components of the influence matrix in TD-BIEM for scalar waves.

Fig.1 の様な 3 次元無限領域 D に存在する円形クラック S による平面波入射波 u^{in} の散乱問題を、スカラー波動問題と動弾性問題として解いた時に必要となる各代表時刻における影響係数行列 ($A(\Delta t)$, $A(5\Delta t)$, $A(10\Delta t)$) の非ゼロ成分を、それぞれ Fig.2 と Fig.3 に示す。Fig.3 から、動弾性時間域 BIEM で必要となる影響係数行列のバンド幅が時間と共に広がっているのが見て取れる。

この問題を解決するために、Walker ら^(2, 3, 4) が cast forward と呼ばれる手法を提案し、影響係数行列と過去の解との行列ベクトル積を行うタイミングを工夫し、影響係数 $A(\ell)$, ($\ell = \frac{N_t+1}{2} + 1, \dots, N_t$) のストアを不要とした。著者ら^(5, 6) は、cast forward を動弾性問題に適用しメモリ使用量を削減した。しかし、cast forward は行列ベクトル積演算を行うタイミングを変えるだけであるため、計算コストは従来の時間域 BIEM と変わらない。そのため、本論文では、3 次元動弾性問題における時間域 BIEM において必要となるメモリ使用量と計算コストを減らす事を目的とし、それらを減らすアルゴリズムを開発する。

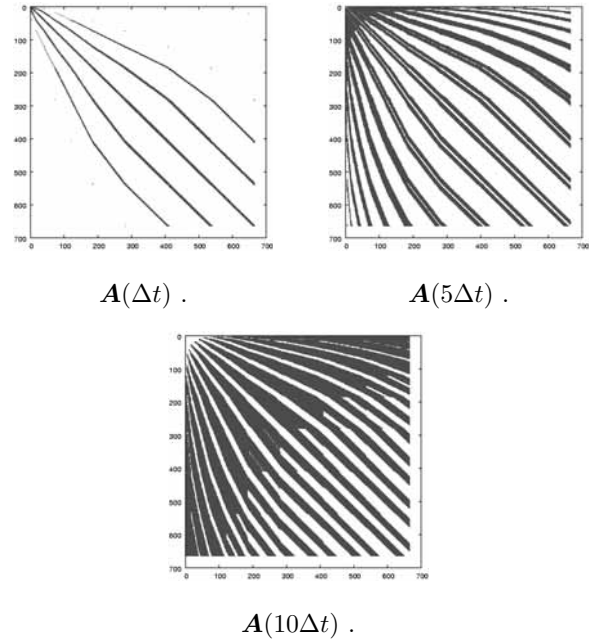


Fig. 3 Nonzero components of the influence matrix in TD-BIEM for elastodynamics.

2. 動弾性問題における時間域境界積分方程式法

動弾性問題における時間域 BIEM の例として、3 次元無限弾性領域 D に存在する円形クラック S による平面波 u^{in} の散乱問題を考え、変位 u に関する次の初期値境界値問題を解く (Fig.1)。

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u = \rho \ddot{u} \quad \text{in } D \setminus S \times (t > 0), \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = \dot{u}|_{t=0} = 0 \quad \text{in } D,$$

$$T u^\pm = 0 \quad \text{on } S \times (t \geq 0),$$

$$\varphi = u^+ - u^- = 0 \quad \text{on } \partial S,$$

$$\text{radiation condition for } u - u^{\text{in}} \text{ as } |x| \rightarrow \infty,$$

ここで、 λ, μ はラメ定数、 ρ は密度、 T はトラクション作用素、 $+$ ($-$) はクラックの単位法線ベクトル n の正(負)からの極限值、 $'$ は時間微分、 φ はクラックの開口変位を表す。このとき、式 (4) から次の境界積分方程式が得られる。

$$0 = T u^{\text{in}} + \text{p.f.} \int_S T \Gamma_I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \varphi(\mathbf{y}, t) dS \quad \mathbf{x} \text{ on } S, \quad (5)$$

ここで、 $*$ は時間に関する畳み込み積分 $f(t) * g(t) = \int f(t-s)g(s)ds$ であり、p.f. は発散積分の有限部分を表す。また、 Γ_I は二重層核であり、動弾性問題の基本解 Γ を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} \Gamma_{Iij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= C_{jklm} \frac{\partial}{\partial y_l} \Gamma_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) n_k \\ &= -\lambda \Gamma_{il,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) n_l \\ &\quad - \mu \Gamma_{ik,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) n_k - \mu \Gamma_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) n_k, \end{aligned}$$

ここで、 $(\)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ 、 $c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ 、 $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ である。時間域の境界積分方程式法では、積分方程式 (5) を時間内挿

関数 $M^\ell(t)$ 、空間内挿関数 $N^q(x)$ を用いて離散化して解く。離散化された境界積分方程式を次式に示す。

$$\begin{aligned} & - \sum_q A_{ij}^{pq}(\Delta t) \phi_j(\mathbf{x}^q, n\Delta t) \\ & = \text{T}u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}^p, n\Delta t) \\ & + \sum_q \sum_{\ell=1}^{n-1} A_{ij}^{pq}((n+1-\ell)\Delta t) \phi_j(\mathbf{x}^q, \ell\Delta t), \quad (6) \end{aligned}$$

$$A_{ij}^{pq}(\ell\Delta t) = \int_S \int \text{T}\Gamma_{ij}(\mathbf{x}^p, \mathbf{y}, \tau) M^\ell(\tau) N^q(\mathbf{y}) d\tau dS, \quad (7)$$

ここで、点 \mathbf{x}^p は境界要素 S_p の代表点である。

3. メモリ使用量、計算コスト削減のためのアルゴリズム改良
時間域の BIEM を解く際、代数方程式 (6) の影響係数行列 A^{pq} を式 (7) の積分により計算しストアする必要がある。空間内挿関数 N^q の台であるソース要素 S_q から発生する時間幅 ΔT (時間内挿関数 M^ℓ の台) を持つ弾性波動が、観測点 \mathbf{x}^p に到達し通過し終わるまでの間、影響係数 $A^{pq}(\ell\Delta t)$ は非ゼロの値を持つ。時間域 BIEM では、メモリ使用量を減らすため通常、係数行列の非ゼロ成分のみを計算しストアする。動弾性問題を扱う場合、ソース要素 S_q と観測点 \mathbf{x}^p との影響係数は P 波の到達から S 波の通過までが非ゼロとなる。

影響係数行列の非ゼロ成分の計算量、ストアに必要なメモリ量を減らすために、動弾性問題の基本解 (式 (3)) に着目する。式 (3) から明らかなように、ソース点 \mathbf{y} から観測点 \mathbf{x} への影響は P 波到達時間 $t = \frac{r}{c_L}$ から S 波の到達時刻 $t = \frac{r}{c_T}$ までが非ゼロとなる。さらに、P 波到達時刻から S 波到達時刻まで $\frac{r}{c_L} \leq t \leq \frac{r}{c_T}$ では、基本解は

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{c_T^2}{4\pi\mu} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \frac{t - r/c_L}{r}, \quad (8)$$

となり時間 t に関して線形である。基本解の時間について線形な特徴を活かし、代数方程式の影響係数 $A^{pq}(\ell\Delta t)$ を求める。

非ゼロの影響係数が計算される時間区間に次の様に 4 つの時刻 t_1, t_2, t_3, t_4 を設定する。

- 時刻 t_1 : 観測点 \mathbf{x}^p に最も近いソース要素 S_q の内点から時刻 $t = 0$ に発生した波動の P 波成分が観測点 \mathbf{x}^p に到達する時刻。
- 時刻 t_2 : 観測点 \mathbf{x}^p に最も遠いソース要素 S_q の内点から時刻 $t = \Delta T$ に発生した波動の P 波成分が観測点 \mathbf{x}^p に到達する時刻。
- 時刻 t_3 : 観測点 \mathbf{x}^p に最も近いソース要素 S_q の内点から時刻 $t = 0$ に発生した波動の S 波成分が観測点 \mathbf{x}^p に到達する時刻。
- 時刻 t_4 : 観測点 \mathbf{x}^p に最も遠いソース要素 S_q の内点から時刻 $t = \Delta T$ に発生した波動の S 波成分が観測点 \mathbf{x}^p を通過する時刻。

(0, 0.114, 0)

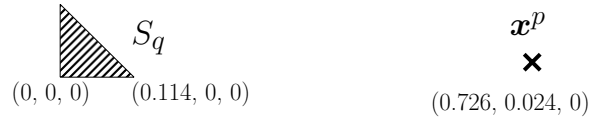


Fig. 4 Source element S_q and observation point \mathbf{x}^p .

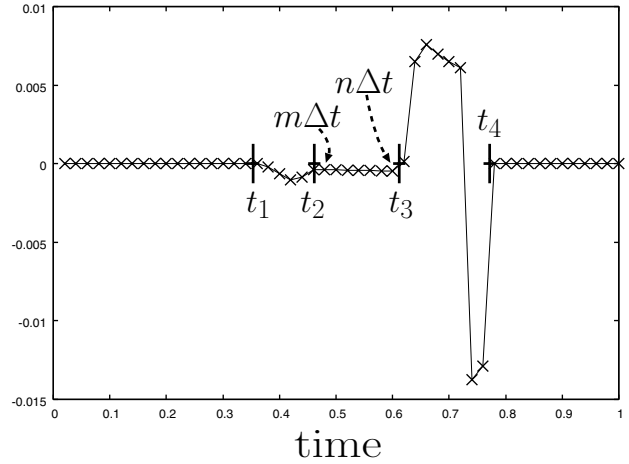


Fig. 5 Influence coefficients $A_{32}^{pq}(t)$.

このとき、 $t_2 < t_3$ 且つ $t_2 < m\Delta t$, $n\Delta t < t_3$ となる整数 $m, n (m < n)$ が存在すれば、影響係数 $A_{ij}^{pq}(m\Delta t)$ を計算しメモリにストアすれば、影響係数 $A_{ij}^{pq}(\ell\Delta t)$, ($\ell = m+1, \dots, n$) はストアされている値 $A_{ij}^{pq}(m\Delta t)$ と時間線形性より次式で容易に計算可能であり、また得られた値をメモリにストアする必要もない。

$$\begin{aligned} A_{ij}^{pq}(\ell\Delta t) &= A_{ij}^{pq}(m\Delta t) + (\ell - m)\Delta A_{ij}^{pq}, \\ & (\ell = m+1, \dots, n), \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 ΔA_{ij}^{pq} は時間に関して定数である。このアイデアをコードに組み込み動弾性問題の計算コストと使用メモリの削減を目指す。

検証のため、Fig.4 に示す同一面上のソース要素 S_q と観測点 \mathbf{x}^p との影響係数成分 $A_{32}^{pq}(t)$ を Fig.5 にプロットした。ここで、弾性波速度はそれぞれ、 $c_L = \sqrt{3}$, $c_T = 1$ とし、時間ステップ幅は $\Delta t = 0.02$ とした。また、ソース要素 S_q からは $\Delta T = 2\Delta t$ の台を持つ波動が発信されるとした。影響係数は、時刻 $t_1 \leq t \leq t_4$ で非ゼロの値となっている。また、Fig.5 の時刻 $t_1 \leq t \leq t_3$ 付近を拡大し Fig.6 に示した。 $t = \ell\Delta t$, ($\ell = m, \dots, n$) において線形の挙動が確認できる。

4. 数値結果

3次元無限弾性領域 D の $x_3 = 0$ 上に存在する半径 $a = 1$ の円形クラック S による平面波 \mathbf{u}^{in} による散乱問題を解いた (Fig.1)。なお、入射波によるトラクションが

$$\left\{ \text{T}u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) \right\}_3 = H(t - x_3/c_L), \quad (10)$$

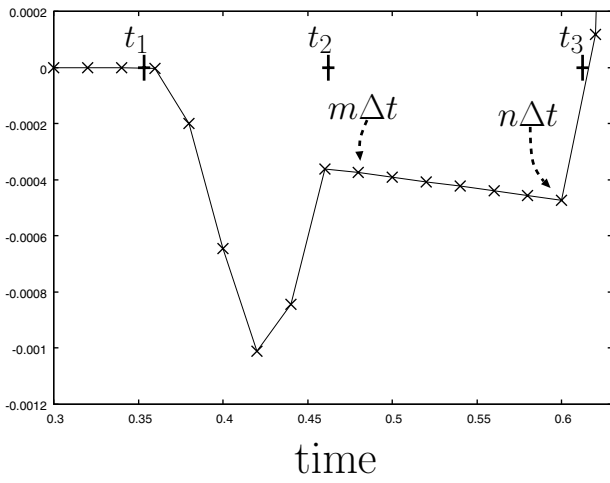


Fig. 6 Influence coefficients $A_{32}^{pq}(t)$ (Close up of Fig.5).

となるような平面波を用いた。弾性波速度はそれぞれ、 $c_L = \sqrt{3}$, $c_T = 1$ とした。円形クラックを 2712 要素 (DOF:8136) に分割し、時間ステップ幅を $\Delta t = 0.02$ として、25 ステップと 50 ステップの計算を行った。離散化には、区分線形の時間内挿関数 $M^\ell(t)$ 、区分一定の空間内挿関数 $N^q(x)$ を用いた。なお、区分線形の時間内挿関数 $M^\ell(t)$ を用いた場合、式 (9) は、

$$A_{ij}^{pq}(\ell\Delta t) = \ell\Delta A_{ij}^{pq}, (\ell = m + 1, \dots, n), \quad (11)$$

となり、基本解の時間線形性を用いた影響係数の計算は非常に容易となる。クラックの開口変位の時間変動を Fig.7 に示す (1)。

使用メモリ、計算コストを従来の時間域 BIEM と cast forward 時間域 BIEM と cast forward に本論文で提案する手法を加えた時間域 BIEM(表中の cf+proposed) で比較し、それぞれ Table 1, Table 2 に示す。cast forward では、従来の時間域 BIEM と計算コストに殆ど差はないが、本提案手法により削減出来ていることがわかる。メモリ使用量も cast forward 時間域 BIEM よりもさらに削減できている。また、タイムステップ数が大きい程、その効果は顕著である。

Table 1 Memory requirements.

	original	cast forward	cf+proposed
$N_t = 25$	1.80GB	436MB(24.2%)	389MB(21.6%)
$N_t = 50$	7.62GB	1.80GB(23.6%)	1.17GB(15.4%)

Table 2 Computational time.

	original	cast forward	cf+proposed
$N_t = 25$	188sec	182sec(96.8%)	130sec(69.1%)
$N_t = 50$	715sec	669sec(93.6%)	337sec(47.1%)

5. 結論

3次元動弾性問題の基本解の時間線形性を利用したアルゴリズムを組み込むことにより、時間と共に非ゼロ成分が増大

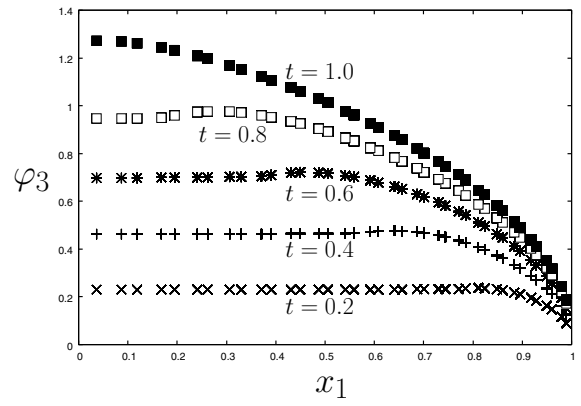


Fig. 7 Opening displacement of the crack.

する動弾性時間域境界積分方程式法の影響係数の計算量、メモリ使用量を削減した。

本論文では、例題としてクラック問題を取り扱った。有限のサイズのクラック問題では、ある程度の時間が経過すれば、クラック内のソース要素からの影響は、すべての観測点を通り過ぎてしまい、影響係数行列はいずれゼロ行列となる。論文中に挙げた例では、 $t = 2.0$ 、つまり $A^{pq}(\ell\Delta t)$, ($\ell = 100, \dots$) はゼロ行列である。有限サイズの境界を持つ問題に対しては、本手法の有効性はある程度で頭打ちとなる。しかし、時間の経過と共にソース要素からの影響範囲に含まれる観測点の数が増大する無限の境界を持つ様な問題には、本手法は非常に有効である。今後は、無限境界を持つ問題に本手法を適用し、その有効性を確認する必要がある。

参考文献

- (1) 小林昭一 他: 波動解析と境界要素法, (2000), 京都大学学術出版会.
- (2) Walker, S.P.: Scattering analysis via time-domain integral equations: Methods to reduce the scaling of cost with frequency, IEEE Ant. Prop. Mag., **39** (1997), pp. 13–20.
- (3) Walker, S.P. and Lee, B.H.: Reduced-cost methods for large time domain integral equation scattering analyses, Commun. Num. Meth. Eng., **14** (1998), pp. 751–761.
- (4) Dodson, S.J., Walker, S.P. and Bluck, M.J.: Costs and cost scalings in time domain integral equation analysis of electromagnetic scattering, IEEE Ant. Prop. Mag., **40** (1998), pp. 12–21.
- (5) 吉川仁、西村直志、小林昭一: 3次元時間域動弾性問題における境界積分方程式法のアルゴリズム改良と並列化, 土木学会応用力学論文集5(2002), pp. 199–206.
- (6) H. Yoshikawa and N. Nishimura: An improved implementation of time domain elastodynamic BIEM in 3D for large scale problems and its application to ultrasonic NDE Electronic Journal of Boundary Elements **1**, Issue 2 (2003), pp. 201–217.