

軸力を受けるレールの波動伝播解析

WAVE PROPAGATION IN AN AXIALLY LOADED RAIL

清水 紗希¹⁾, 阿部 和久²⁾, 相川 明³⁾, 紅露 一寛⁴⁾

Saki SHIMIZU, Kazuhisa ABE, Akira AIKAWA and Kazuhiro KORO

- 1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
 2) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)
 3)(財) 鉄道総合技術研究所 (〒 185-8540 国分寺市光町 2-8-38, E-mail:aikawa@rtri.or.jp)
 4) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

Wave modes propagating in a rail subjected to an axial load due to temperature stress are analyzed. The railway track is modeled by an infinite beam discretely supported by sleepers. Due to the periodicity represented by the sleeper space, the equation of motion of the infinite rail is reduced to that of a unit cell by virtue of the Floquet theorem. The wave propagation modes can be attained by way of an eigen problem with respect to the axial load, the wave number and the frequency. Sensitivity of axial loads to the wave number and the frequency is investigated based on the dispersion analysis. Through those analyses, it is discussed that which modes are suitable for evaluation of axial load.

Key Words: axial load, rail, temperature stress, dispersion analysis

1. はじめに

鉄道軌道のロングレール化は、乗り心地向上や道床沈下など軌道破壊の抑制に有効であり、そのため多くの在来線区においてもその導入が進められている。本来レールは温度変化によって膨張・収縮を受ける。しかし、まくらぎに締結されているため、自由な伸縮がある程度拘束される。特にロングレールの場合、その両端部付近を除く中間域では伸縮がほぼ完全に抑制される。その結果、レールには長手方向に大きな圧縮または引張の軸力が作用することとなる。日照によるレールの温度上昇は、軌道座屈の原因となる。一方、寒冷地の冬季間に発生するレールの温度低下は引張軸力を発生させ、ひいてはレール破断を惹き起こす恐れがある。

以上に述べた様なことから、ロングレールの軸力管理は軌道保守上非常に重要となる。なお、まくらぎは列車走行によって軌道長手方向に変位(ふく進)し得る。そのため、レール軸力は一般に温度変化以外の影響も受け、軌道に沿って均一とはならない。したがって、敷設時からのレール温度変化だけによる軸力管理は不可能であり、また限られた箇所での測定では十分とは言えない。この様なことから、これまでに様々な軸力測定法が検討されて来た⁽¹⁾⁽²⁾。

現在一般的に行われているのは、レール継目の遊間を測りレールの伸縮量を測定し、軸力に換算する方法であるが、ロ

ングレール内の不均一な軸力分布は、この方法では把握しきれない。また、直接レールにひずみゲージを貼り付けて軸力を測定する方法もある。しかし、この場合はゲージの長期間の使用および使用環境での感度について信頼性を欠き、ゲージが破損せずに誤作動した場合には誤った評価がなされる恐れがある。他にも、応力の作用による強磁性材料の磁気的性質の変化を検出し軸力に換算する透磁率測定法や、超音波の伝わり方の偏り(音響異方性)を検出し軸力に換算する音響弾性測定法などが考案されている。

これらの軸力測定法に共通した問題点として、軸力のない状態での初期値の測定を必要とする点が挙げられる。このため、すでに敷設された状態のレールの軸力は測定できず、初期状態の既知な箇所しか測定できない。

初期値を必要としない測定法としては、本研究で扱うレールたわみ法⁽¹⁾や、向上法⁽³⁾⁽⁴⁾が挙げられる。向上法は、レールを一定区間まくらぎから解放し、その中央部を吊り上げて反力を測定し、それを軸力に換算する方法である。しかし、この方法は引張軸力が作用しているときにしか測定できず、圧縮軸力は測定できない。

そこで本研究では、レールを伝わる波動の伝播特性と軸力との関係に着目し、初期軸力を事前情報として必要としない軸力測定法の可能性について基礎的検討を行う。なお、当該法については、実験による検討が先行研究としてなされており、その適用可能性が示唆されている⁽⁵⁾。しかし、その理

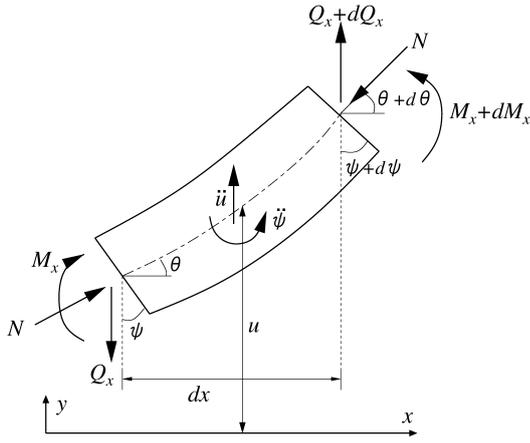


Fig. 1 Beam element and acting forces

論的背景については議論がなされておらず、十分な理解には至っていない。また、軸力下での離散支持ばりの振動解析が、有限長モデル⁽⁶⁾や、無限長モデル⁽⁷⁾を対象になされている。特に文献⁽⁷⁾では、強制加振による卓越応答が解析対象とされている。しかし、解析例は必ずしも鉄道軌道を対象としてはおらず、そのためまくらぎの影響なども考慮されていない。そこで、本研究では軌道モデルでの解析に基づき、理論的側面からレールの軸力測定原理について考察する。

以下ではまず、離散支持された無限長レールを、軸力を受けるはりのたわみ振動の運動方程式に基づき記述する。次にそれを構成する周期構造の最小単位であるユニットセルを離散化した後、Floquet 原理⁽⁸⁾を適用し、円振動数 ω と Floquet 波数 κ および軸力 N に関する固有値問題を導出する。この固有値問題を解くことで、周波数 $f(\omega)$ と Floquet 波数 κ および軸力 N との関係(分散曲面)を求めていく。そして、その特徴をふまえ、軸力測定に適する振動モードについて検討する。なお、本研究では鉛直方向のレールたわみ振動と、水平方向振動の2ケースを対象に解析を行う。

2. 軸力を受けるはりのたわみ振動問題

本研究では、レールを Timoshenko ばりでモデル化する。Fig.1 のように、軸力 N (圧縮を正) の下で円振動数 ω で振動しているはりを考える。ただし、座標軸および断面力の向きは Fig.1 のとおりとする。

微小部分 dx におけるたわみ方向のつりあい式、およびモーメントのつりあい式から次の運動方程式を得る。

$$GAK \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) - N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A \omega^2 u = 0 \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + GAK \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) + \rho I \omega^2 \psi = 0 \quad (2)$$

ここで、 G ははりのせん断弾性係数、 K は断面のせん断係数である。 A は断面積、 ρ は密度、 E はヤング係数、 I は断面二次モーメント、 u ははりのたわみ、 ψ は断面の回転角である。

次に、重み付き残差式により式(1)と式(2)の弱定式化を行い、 u を3次、 ψ を2次多項式で補間する TIM7 要素⁽⁹⁾

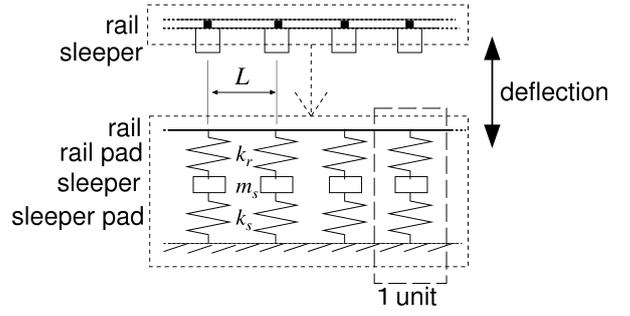


Fig. 2 Rail model for vertical vibration

により離散化の後、次式を得る。

$$[\bar{\mathbf{W}}]^T [\mathbf{K} - N\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}] \{\mathbf{U}\} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\int_0^l \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで $\{\mathbf{W}\}$ は任意の仮想節点変位ベクトル、 $\{\bar{\mathbf{W}}\}$ はその複素共役である。 $[\mathbf{K}]$ はレールの剛性行列、 $[\mathbf{M}]$ は質量行列、 $\{\mathbf{U}\}$ は節点変位ベクトルである。また、一要素当りの行列 $[\mathbf{C}]$ における N_i 、 N_j はたわみ u の補間関数であり、3次 Hermite 多項式により与えられる。なお、 l は要素長である。

3. 軸力を受けるレールの分散特性の解析

レールをまくらぎにより離散支持された無限周期構造によりモデル化する。なお、Fig.2 は鉛直方向振動をモデル化した場合を示しており、 k_r は軌道パッドのバネ定数、 m_s はまくらぎの質量、 k_s は防振パッドのバネ定数である。なお、Floquet 原理⁽⁸⁾より、周期構造における定常応答解は次の周期性をもつ。

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_0 e^{-i\kappa L}, \quad \bar{\mathbf{w}}_L = \bar{\mathbf{w}}_0 e^{i\kappa L} \quad (4)$$

ここで、 L は周期長(まくらぎ間隔)、 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_L$ は当該周期構造を与える1ユニット(Fig.2)の左右レール端における節点変位ベクトル、 $\bar{\mathbf{w}}_0, \bar{\mathbf{w}}_L$ は1ユニットの左右レール端の仮想節点変位ベクトルの共役、 κ は Floquet 波数と呼ばれるパラメータである。

式(4)を式(3)に適用し、パッド類の剛性とまくらぎ質量の影響をさらに反映させ、 $\mathbf{u}_L, \bar{\mathbf{w}}_L$ を消去して次式を得る。

$$[\mathbf{K}' - N\mathbf{C}' - \omega^2 \mathbf{M}'] \{\mathbf{U}'\} = 0 \quad (5)$$

ここで、 (\prime) は式(4)の条件を課して行列を整理したため、もとの行列とは一致しないことを表している。なお、 $[\mathbf{K}]$ を例に、その成分を示すと次のようである。

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{0M} & \mathbf{K}_{0L} \\ \mathbf{K}_{M0} & \mathbf{K}_{MM} & \mathbf{K}_{ML} \\ \mathbf{K}_{L0} & \mathbf{K}_{LM} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}'] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} + \mathbf{K}_{LL} + 2\mathbf{K}_{0L} \cos \kappa L & \mathbf{K}_{0M} + \mathbf{K}_{MLE} e^{i\kappa L} \\ \mathbf{K}_{M0} + \mathbf{K}_{MLE} e^{-i\kappa L} & \mathbf{K}_{MM} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Table 1 parameters of 50kgN rail

mass density(kg/m ³)	$\rho = 7880$
cross-sectional area(m ²)	$A = 64.05 \times 10^{-4}$
Young's modulus(GPa)	$E = 206$
Poisson's ratio	$\nu = 0.33$
geometrical moment of inertia(m ⁴)	$I = 1960 \times 10^{-8}$ (vertical vibration) $I = 322 \times 10^{-8}$ (horizontal vibration)
shear factor	$K = 0.394$ (vertical vibration) $K = 1.382$ (horizontal vibration)

ここで、 \mathbf{K}_{ij} はユニットセル左端節点、中間節点および右端節点に対応する部分行列である。

式 (3) における行列 \mathbf{K} , \mathbf{C} , \mathbf{M} は実対称行列であるので、式 (5) の係数行列は Hermite 行列となる。この固有値問題を解くことで、円振動数 ω と Floquet 波数 κ と軸力 N との関係 (分散曲面) を求める。以下の解析では、Floquet 波数 κ と軸力 N を所定の範囲内で順次変化させながら、円振動数 ω についての固有値問題を解き、その結果より分散曲面を求める方法を用いる。

4. 鉛直方向振動の場合

実際のレール加振では、鉛直方向と水平方向に力を加える 2 つの方法が考えられる。現場測定においては、インパルスハンマーの使用を考えた場合、鉛直加振の方がより容易と思われる。そこで、まず鉛直方向振動の場合について検討する。

4.1. 解析条件

Fig.2 で示したように、バネで離散支持された無限長レールを軌道モデルとして設定する。各パッド類のバネ定数は、軌道パッド $k_r = 110\text{MN/m}$ 、防振パッド $k_s = 30\text{MN/m}$ とする。まくらぎ間隔は $L=0.6\text{m}$ とし、PC まくらぎを想定してレール一本当たりのまくらぎ (1/2 本) 質量を 100kg と設定した。レールは 50kgN レールを想定し、各種物性値を Table1 のように設定した。なお、レールの離散化は 1 ユニットの 12 要素で一様分割して与えた。

4.2. 解析結果

周波数 f と Floquet 波数 κ および軸力 N との関係は 3 次元空間中の曲面として与えられる。そこで、軸力を 0 から 5MN 毎に 25MN まで変化させたときの、周波数 f と無次元化した Floquet 波数 κL との関係を Fig.3 に示す。

いずれの分散曲線も、軸力の増加に伴い、低周波数側へシフトする傾向にあり、原理的には軸力を振動応答特性から評価可能であることが理解できる。Fig.3 において、分散曲線の傾きが 0 となる箇所の内、周波数や波数の変化に軸力の

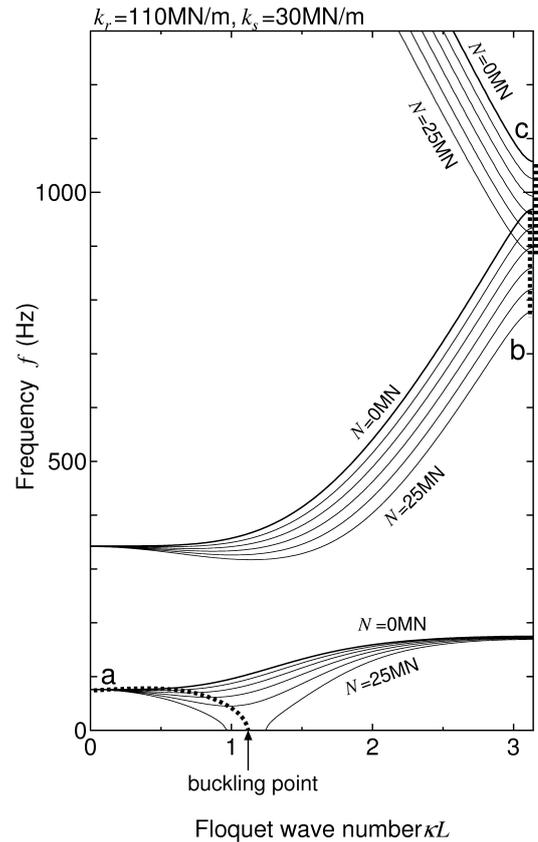


Fig.3 Influence of axial load on dispersion curves (vertical vibration)

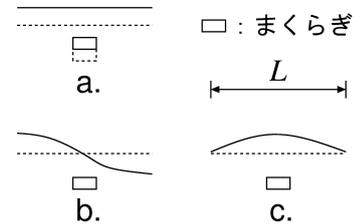


Fig.4 Standing wave modes (vertical vibration)

影響が認められるものを a, b, c で分類する。これらの箇所は、定在波モードに対応しており、レールに振動を加えたときは、これらのモードが卓越して現れるため、測定しやすいモードを与える。そのため、軸力測定にはこれらの振動モードを利用するのがよいと考えられる。

各振動モードを Fig.4 に示す。a の振動モードはレールとまくらぎとが一体化してほとんどたわみ変形を伴わない振動である。b は波長 $2L$ の下、まくらぎ位置を節として振動するモードであり、通常 pinned-pinned resonance と呼ばれるものである。c は波長 $2L$ で、まくらぎ位置を腹として振動するモードを与える。なお、a を含む分散曲線で与えられるモードは、まくらぎ振動を伴うものとなるが、b, c を含む高周波帯のモードは、主にレールが振動するものとなっている (10)。

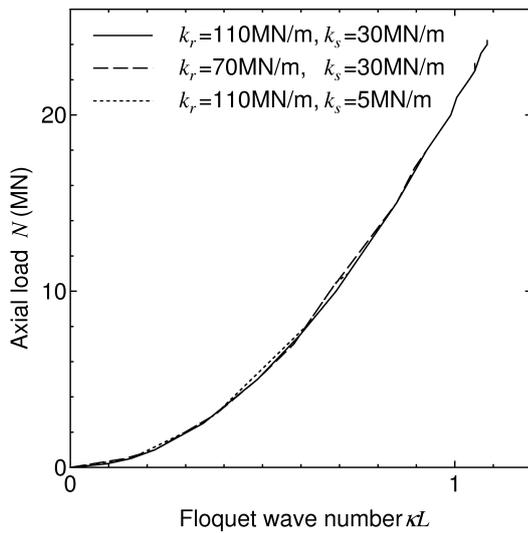


Fig. 5 Influence of stiffness of pads on relation between wave number and axial load (mode a)

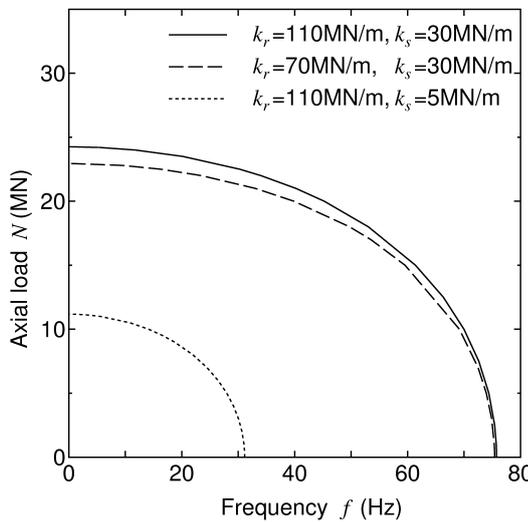


Fig. 6 Influence of stiffness of pads on relation between frequency and axial load (mode a)

4.3. パッド類のバネ定数が分散曲面に及ぼす影響

パッド類の剛性にはバラツキが存在するが、その程度は必ずしも明らかではない。そのため、実際の測定においては、これらの影響を受けにくいモードを利用することが望ましいと考えられる。そこで、パッド類のバネ定数が分散特性に及ぼす影響をみるために、軌道パッドのバネ定数を $k_r=70\text{MN/m}$ 、および防振パッドのバネ定数を $k_s=5\text{MN/m}$ に変更した各ケースについて解析を行った。

まず、aの振動モードについて考える。この振動モードは、軸力の増加につれて、たわみ変形をほとんど伴わない振動から、たわんだままで静止する状態(座屈)へと至る。Fig.3に破線で示したこの曲線を、Floquet波数-軸力の断面に射影したものをFig.5に、周波数-軸力の断面に射影したものをFig.6にそれぞれ示す。また、これらの図より軸力に対する感度をみると、軸力の小さいうちはFloquet波数の方が感度が

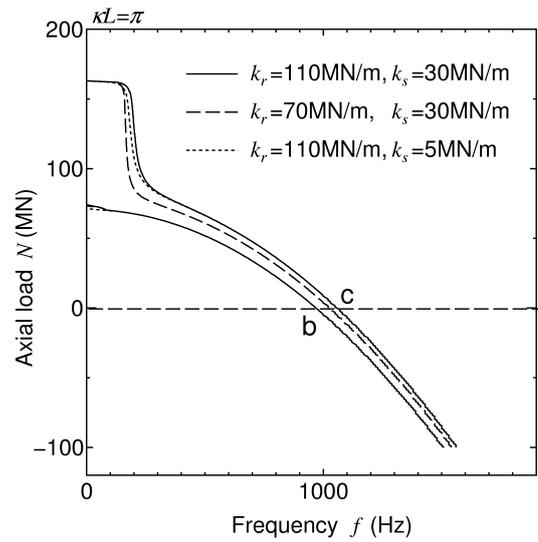


Fig. 7 Influence of stiffness of pads on relation between frequency and axial load (mode b, c)

よく、大きくなるにつれて周波数の方が感度が相対的によくなることわかる。なお、Floquet波数-軸力の関係はバネ定数の影響をほとんど受けないが、周波数-軸力の関係はその影響が顕著に現れており、この点で軸力測定には前者の方が適していると言える。ただし、実際の測定において波数(波長)を精度良く求めることは容易でなく、そのため何らかの工夫が必要である。

次に、b, cの各振動モードについて調べる。b, cの振動モードの分散曲面を $\kappa = \pi/L$ において周波数-軸力の断面に射影したものをFig.7に示す。図より、bの振動モードは全くバネ定数の影響を受けていないことがわかる。これは、まくらぎ位置が節となるため、まくらぎに全く変位を生じないことによる。一方、cのモードはパッド類、特に軌道パッドのバネ定数の影響をより多く受けている。

また、これらの振動モードは、軸力に対する周波数の感度が比較的高く、Fig.7では $N=0\sim 30\text{MN}$ の範囲においてそれぞれ1MN当り7Hz、および6Hz程度となっている。以上より、鉛直加振においては、パッド類の影響を受けず、測定の容易なモードbの周波数-軸力関係が、軸力評価に最も適していることがわかる。

5. 水平方向振動の場合

レールは、水平たわみに対する曲げ剛性の方が、鉛直たわみのそれより小さく、水平座屈が先行して起こる。そのため、軸力増加に対するモード周波数の低下は、水平振動の方がより顕著に現れるものと思われる。そこで、水平加振についても検討する。

5.1. 解析条件

Fig.8に示すように軌道系の水平(横)方向振動に対して、バネで離散支持された無限長レールモデルを考える。レールとまくらぎとは一体化しているものとする。ただし、軌きょう剛性は無視している。道床横抵抗力は、鉛直加振の場合と

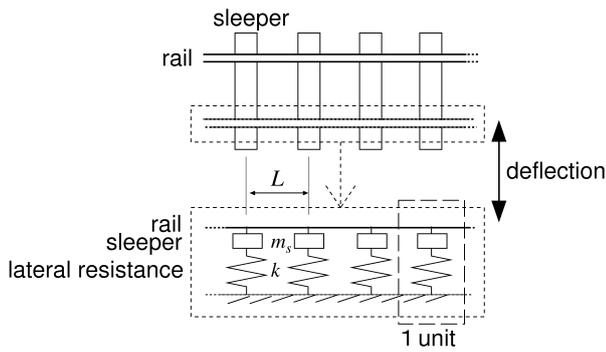


Fig. 8 Rail model for horizontal vibration

同様に線形バネで与え、バネ定数を $6\text{MN/m}^{(11)}$ とする。まくらぎ間隔、まくらぎ質量は鉛直方向加振と同条件とし、レールの離散化も1ユニットを12要素で一樣分割して与えた。

5.2. 解析結果

軸力を0から1MN毎に6MNまで変化させたときの、Floquet波数 κL と周波数 f との関係を図.9に示す。鉛直加振時の分散曲線 (Fig.3) と異なり、中間のバンドが存在しないことがわかる。これは、レールとまくらぎとが一体化しているため、主にレールだけが振動するモードが存在し得ないためである。

この図において、分散曲線の傾きが0になる定在波モードをA, B, Cで分類する。鉛直加振と同様、これらのモードはレール加振時に卓越して現れるため、測定しやすいモードを与える。そのため、軸力の測定には、この3つの振動モードを利用するのがよいと考えられる。

各振動モードを図.10に示す。Aの振動モードはほとんどたわみ変形を伴わない振動である。B, Cの振動モードは共に波長は $2L$ で、Bの振動はまくらぎ位置を腹として振動するモード、Cの振動はまくらぎ位置を節として振動するモードである。

5.3. 道床横抵抗力のバネ定数が分散曲面に及ぼす影響

道床横抵抗力のバネ定数が各モードに及ぼす影響をみるために、 $k=1\text{MN/m}$ 、および $k=15\text{MN/m}$ とした場合の解析を行った。

まず、Aの振動モードについて調べる。実際に座屈が起こる際には、軸力増加と共に、当該モードは図.9に破線で示したようなルートを辿り座屈に至ると考えられる。なお、完全系における座屈荷重(軸力)は、鉛直たわみでは 24MN であるのに対し、水平たわみでは約 5MN であり、水平座屈強度の方が大幅に低いことがわかる。分散曲面をFloquet波数-軸力の断面に射影したものを図.11に、周波数-軸力の断面に射影したものを図.12に示す。軸力に対するFloquet波数の感度は軸力が小さい程相対的に良く、軸力に対する周波数の感度は逆に軸力が大きい程相対的に良くなっていることがわかる。ただし、道床横抵抗力を表現しているバネの剛性の影響が周波数-軸力関係において顕著に現れている。道床横抵抗力は場所によって大きく異なることや、一般には強い非

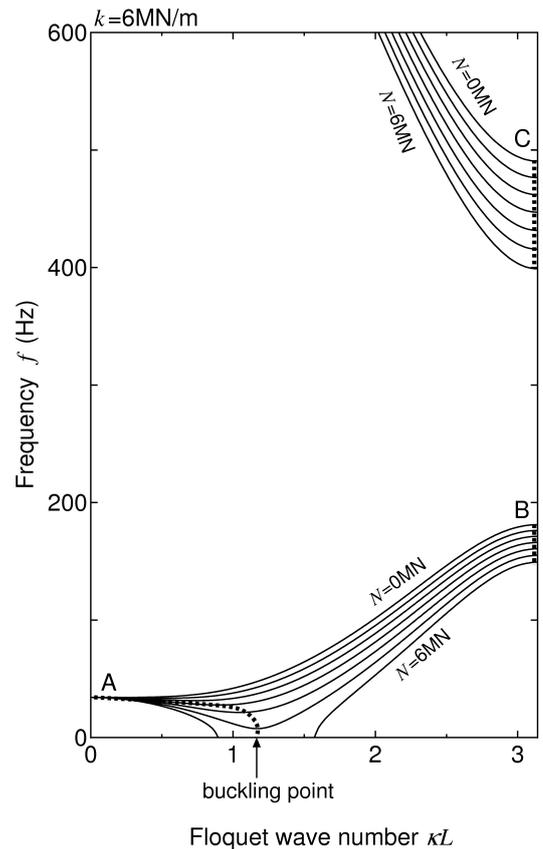


Fig. 9 Influence of axial load on dispersion curves (horizontal vibration)

線形性を有すること、さらには鉛直加振の場合と同様、波数の測定が容易でない点等に鑑みると、軸力測定に対して当該モードは適さない。

B, Cの振動モードの分散曲面を $\kappa = \pi/L$ において周波数-軸力の断面に射影したものを図.13に示す。図.10に示した様に、Bの振動モードは、まくらぎ位置が腹となるため、まくらぎ変位を伴う。よって、道床横抵抗力バネの影響が周波数-軸力関係において認められる。一方、Cの振動モードは、まくらぎ位置が節となるためにバネ定数の影響を全く受けない。さらに、当該モードの軸力に対する周波数の感度については、 $0\sim 5\text{MN}$ の範囲において1MN当り14Hzとなっており、鉛直加振の場合に比べて2倍以上の感度を有していることがわかる。

以上の結果より、現時点では水平方向加振におけるモードCが軸力測定に最も適しているものと考えられる。

6. おわりに

本研究では、軸力を受けるレールの動的問題について解析し、軸力測定の観点から、軌道系の分散特性について調べた。その結果、鉛直、水平加振とも、まくらぎ位置が節となるレールたわみモードが、パッド類や道床横抵抗力の影響を受けず、軸力測定に適していることを確認した。また、当該モードにおける軸力に対する周波数感度については、水平加振の方が鉛直加振に比べ2倍以上高く、現時点では水平加振

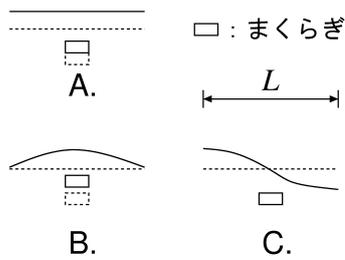


Fig. 10 Standing wave modes (horizontal vibration)

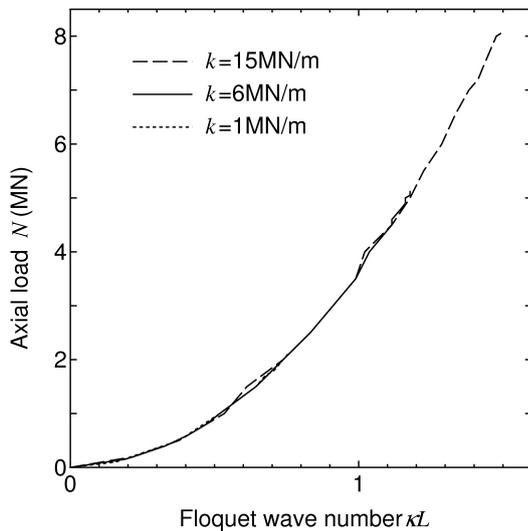


Fig. 11 Influence of stiffness of lateral resistance on relation between wave number and axial load (mode A)

が最適との結論に至った。

ただし、水平方向加振は、レールの小返り振動の抑制などに多少の工夫を要する。また、今回のモデル化では、レール・まくらぎから成る軌きょう剛性など、レール締結部の影響は考慮していない。今後はこの点も含め、鉛直、水平加振それぞれの可能性についてより詳細な検討を進めていきたい。

参考文献

- (1) 佐藤正男, 山本陽一: 軌道に敷設されたレールの軸力測定器の開発 (第一報), 鉄道技術研究所速報, No.82-12, 1982.1.
- (2) 柏谷賢治: 磁気レール軸力計とその適用法, 新線路, **49.3**, 23-25, 1995.
- (3) 佐藤吉彦: 向上法によるスラブ軌道レール軸力の測定, 平成 14 年鉄道技術連合シンポジウム講演論文集, 47-50, 2002.
- (4) 高井秀之: 非常識? 保線の常識! その 31: レールの軸力は測れない!?, 新線路, **60.11**, 36, 2006.
- (5) 大宮孝夫 他: ロングレール内軸力に関する基礎的研究, 土木学会第 60 回年次学研講演会, IV, 267-268, 2005.
- (6) Kukla, S.: Free vibrations of axially loaded beams with concentrated masses and intermediate elastic supports, *J. Sound Vibr.*, **172**, 449-458, 1994.

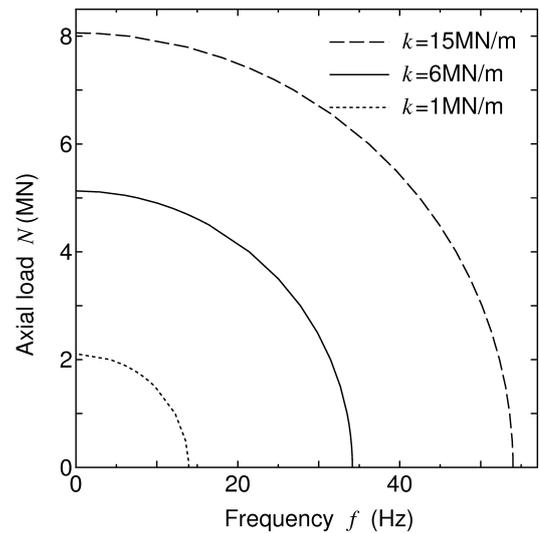


Fig. 12 Influence of stiffness of lateral resistance on relation between frequency and axial load (mode A)

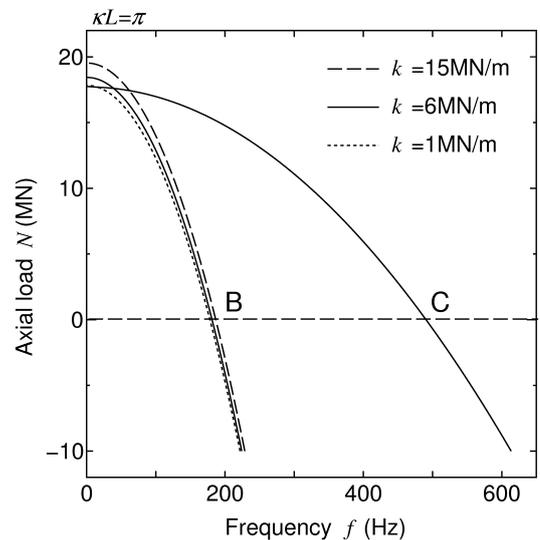


Fig. 13 Influence of stiffness of lateral resistance on relation between frequency and axial load (mode B, C)

- (7) Luo, Y.: Frequency analysis of infinite continuous beam under axial loads, *J. Sound Vibr.*, **213**, 791-800, 1998.
- (8) Delph, T.J., Herrmann, G. and Kaul, R.K.: Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: Antiplane strain, *J. Appl. Mech.*, **45**, 343-349, 1978.
- (9) Nickel, R.E. and Secor, G.A.: Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **5**, 243-253, 1972.
- (10) 阿部和久, 古屋卓穂, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, **10**, 1029-1036, 2007.
- (11) 片岡宏夫, 柳川秀明, 高原正樹: 列車荷重を考慮したロングレールの座屈安定性解析, 鉄道総研報告, Vol.17, No.2, 5-10, 2003.