計算数理工学論文集 Vol. 9 (2009 年 12 月)，論文 No. 12-091211 JASCOME

走行車輪と軌道系の定常連成応答解析

STEADY-STATE INTERACTION ANALYSIS OF A RAILWAY TRACK AND A RUNNING WHEEL

佐成屋 淳 [1)]，阿部 和久 [2)]，紅露 一寛 [3)]

Atsushi SANARIYA, Kazuhisa ABE and Kazuhiro KORO

1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
2) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)
3) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper attempts to analyze steady state solutions of moving wheel / infinite railway track interaction. The railway track is modeled by an infinite beam supported by springs discretely. The steady state solution is constructed by means of the temporal Fourier transform. In order to cope with the discontinuity in the angle of deflection of Timoshenko beam due to a moving load, in the transformed domain, the steady state response of the infinite rail is described in the form of Fourier series. The moving contact force is also given by a Fourier series to assure the periodicity. The solving equations are given by infinite simultaneous equations for the Fourier coefficients of the contact force. The steady state solution obtained by the present method is compared with time domain solution given by a conventional method. Through numerical analyses, the efficiency of the developed method is evidenced. Moreover, it is found that, since the conventional method cannot attain the exact steady state solution of infinite track, that is involved in the difficulty in setting of computational conditions.

Key Words: running wheel, steady-state interaction solution, periodically supported rail

1. はじめに

列車走行による鉄道軌道の動的応答特性の把握は，列車の乗り心地の改善や地盤振動の低減，軌道破壊の抑制などの観点から非常に重要となる．これらの諸課題に対して適切な対策を講じ，その効果を事前評価する目的で，数値モデルによる解析が積極的になされてきている (1)．

なお，上述のとおり鉄道軌道における振動は，一般に列車走行により発生する．そのため，走行荷重に対する軌道振動応答の評価が有用な知見を与える．走行荷重下での軌道振動解析には，これまで様々な解法が提案されてきた．その中で，軌道系を有限要素により離散化する手法が最も広く用いられている．しかしこの場合，通常はレールに打ち切り端が存在する有限長モデルが用いられることとなる．なお，レール振動を積分表現式 (2) により記述すれば，レールを無限長ばりとして表現することができるが，離散まくらぎ支持モデルによる場合は，有限個のまくらぎしか考慮できないため，結局無限長軌道の再現は本質的に不可能である．

走行車輪 (車両) と軌道との連成応答特性の把握には，等間隔に支持されたレールと車輪との定常応答の評価が基本的事項となる．上述のような有限軌道モデルを用いた時間域解析による場合，減衰を適切に設定したとしても，定常解に十分近い結果を得るために必要とされる軌道区間長の設定には曖昧さが残る．

なお，Floquet 変換 (3, 4) を用いれば，無限長の離散支持レールの解析が，それを構成している最小周期単位 (ユニットセル) の離散化により実現可能となる．著者ら (5) は，Floquet 解析法を用いて定点加振を受ける無限長軌道の定常応答解析を，有限要素 (はり要素) の枠組みの下で実施した．また，走行荷重に対する無限軌道の定常応答解析法も，既往の研究において試みられている (6, 7)．さらに著者ら (8) は，任意の変動走行荷重に対する軌道系の定常応答解析法を，はり要素による離散化に基づき構成した．また合わせて，当該問題を記述する運動方程式の空間方向に Floquet 変換を施したもの

2009 年 9 月 30 日受付，2009 年 11 月 5 日受理

と，時間方向に Fourier 変換を施したものとが同一の式を与え，これにより当該問題がユニットセルの離散化により求解可能となることを示した．

上述の各解析法において，走行荷重は全て既知量として扱われている．一方，走行車輪と軌道系との連成問題では，両者間の接触力は未知量となる．勿論，文献 [8] の手法に依っても，走行車輪との連成解析法を構成することは原理的に可能である．ただし，レールを Timoshenko ばりによりモデル化する場合，移動して行く接触力の作用位置においてたわみ角が常に不連続となる．はり要素による離散化の下，この不連続性を逐次再現することは容易でない [8]．

そこで本論文では，はりのたわみを Fourier 級数により与え上述の不連続性を表現可能とすることで，走行車輪・軌道系連成解析法の構築を試みる．以下では，まず文献 [8] と同様の手順により定常問題を導出し，Timoshenko ばりモデルを対象とした具体的定式化を示す．続いて，時間域 Green 関数を用いた既往の解法 [9] による結果との比較を通し，提案手法の妥当性や，有限軌道モデルによる解析法の問題点などについて検討する．

2. 解析手法の構成

2.1. 移動荷重に対するレールの定常応答解

Fig.1 に示す様に，剛な道床上に軌道パッドが離散的に配置され，無限長のレールを支持している直結軌道を対象とする．その上を一定走行速度 c で移動する変動荷重 $F(t)$ が作用する問題を考える．なお，荷重 $F(t)$ は次式の様に構造物の周期長 L (まくらぎ間隔) に律動するものとする．

$$F(t) = F(t + \frac{nL}{c}), \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

レールを Timoshenko ばりでモデル化すると，レールの運動方程式は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &GAK\frac{\partial}{\partial x}(\psi - \frac{\partial u}{\partial x}) + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (k_s u + \eta\frac{\partial u}{\partial t})\delta_L(x) \\ &\quad = F(t)\delta(x - ct), \\ &GAK(\psi - \frac{\partial u}{\partial x}) + \rho I\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EI\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，x はレール軸方向の座標，t は時刻，$u(x,t)$ はレールのたわみ，$\psi(x,t)$ はレール断面の回転角，ρ は質量密度，A は断面積，I は断面二次モーメント，G はせん断弾性係数，K はせん断係数，E はヤング率，k_s, η は支持点のバネ定数および減衰係数，$\delta_L(x)$ はレール支持点に特異点をもつ周期長 L のデルタ関数，$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である．

式 (2) の t に関する Fourier 変換より次式を得る．

$$\begin{aligned} &GAK\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}) - \rho A\omega^2\hat{u} + (k_s + i\eta\omega)\hat{u}\delta_L(x) \\ &\quad = \frac{1}{c}F(\frac{x}{c})e^{-i\omega\frac{x}{c}}, \\ &GAK(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}) - \rho I\omega^2\hat{\psi} - EI\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$(\hat{\ })$ は Fourier 変換を意味する．なお，上述の様に周期長 L に律動する走行荷重下における定常状態では，速度 c

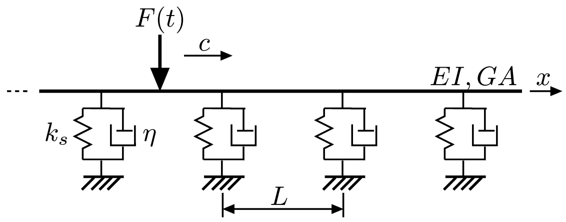

Fig. 1　Periodic structure subjected to a moving load

での移動座標系の下で周期性を得るので，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} u(x,t) &:= u(x + nL, t + \frac{nL}{c}), \\ \psi(x,t) &:= \psi(x + nL, t + \frac{nL}{c}) \end{aligned} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4}$$

すると，定常解 u の t についての Fourier 変換 $\hat{u}$ は次の周期性を満たす．

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega t}dt \\ \text{式 (4)} \rightarrow &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x + nL, t + \frac{nL}{c})e^{-i\omega t}dt \\ (\tau = t + \frac{nL}{c}) \rightarrow &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x + nL, \tau)e^{-i\omega(\tau - \frac{nL}{c})}d\tau \\ &= e^{i\frac{\omega}{c}nL}\hat{u}(x + nL, \omega) \end{aligned} \tag{5}$$

式 (5) より，当然 $0 \leq \tilde{x} \leq L$ についても，次式が成り立つ．

$$\hat{u}(\tilde{x},\omega) = e^{i\frac{\omega}{c}nL}\hat{u}(\tilde{x} + nL, \omega) \tag{6}$$

また，$\hat{\psi}$ についても同様に，次の周期性が成り立つ．

$$\hat{\psi}(\tilde{x},\omega) = e^{i\frac{\omega}{c}nL}\hat{\psi}(\tilde{x} + nL, \omega) \tag{7}$$

一方，走行荷重 $F(t)$ は，式 (1) の周期性を持つ．そこで，荷重位置を $x = ct$ とすると，$F(t)$ は $0 \leq \tilde{x} \leq L$ において，Fourier 級数により次のように表現できる．

$$F(\frac{\tilde{x}}{c}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2n\pi}{L}\tilde{x}} \tag{8}$$

ここで，$F_n = 1$, $F_m = 0$ $(m \neq n)$, $(m,n \in \mathbb{Z})$ に対する式 (3) の解を $\hat{u}_n$ および $\hat{\psi}_n$ とおく．また，式 (6), (7) を満たすように，$\hat{u}_n$ および $\hat{\psi}_n$ を次式により与える．

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(\tilde{x},\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^n(\omega)e^{i(\frac{2m\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\tilde{x}}, \\ \hat{\psi}_n(\tilde{x},\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m^n(\omega)e^{i(\frac{2m\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\tilde{x}} \end{aligned} \tag{9}$$

さらに，$\delta_L(\tilde{x})$ を次の Fourier 級数により与える．

$$\delta_L(\tilde{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tilde{x} - nL) = \frac{1}{L}\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2l\pi}{L}\tilde{x}} \tag{10}$$

なお，式 (10) より次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \delta_L(\tilde{x})\sum_m a_m^n e^{i\frac{2m\pi}{L}\tilde{x}} &= \frac{1}{L}\sum_l\sum_m a_m^n e^{i\frac{2(m-l)\pi}{L}\tilde{x}} \\ &= \frac{1}{L}\sum_m\sum_l a_{m+l}^n e^{i\frac{2m\pi}{L}\tilde{x}} \\ &= \frac{1}{L}\sum_l a_l^n \sum_m e^{i\frac{2m\pi}{L}\tilde{x}} \end{aligned} \tag{11}$$

以上の準備の下，式 (8), (9), (11) を式 (3) に代入して，共通項 $e^{-i\frac{\omega}{c}\tilde{x}}$ を除くと次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\sum_m\{[GAK(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})^2-\rho A\omega^2]a_m^n+\frac{k_s+i\eta\omega}{L}\sum_l a_l^n \\
&\quad +GAKb_m^n i(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})\}e^{i\frac{2m\pi}{L}\tilde{x}}=\frac{1}{c}e^{i\frac{2n\pi}{L}\tilde{x}}, \\
&\sum_m\{[GAK-\rho I\omega^2+EI(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})^2]b_m^n \\
&\quad -GAKi(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})a_m^n\}e^{i\frac{2m\pi}{L}\tilde{x}}=0
\end{aligned} \tag{12}$$

したがって，m に関する各項において次の方程式を得る．

$$\begin{aligned}
&[GAK(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})^2-\rho A\omega^2]a_m^n+\frac{k_s+i\eta\omega}{L}\sum_l a_l^n \\
&\quad +GAKb_m^n i(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})=\frac{1}{c}\delta_{nm}, \\
&[GAK-\rho I\omega^2+EI(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})^2]b_m^n \\
&\quad =GAKi(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})a_m^n
\end{aligned} \tag{13}$$

ここで，δ_{nm} は Kronecker のデルタである．さらに，

$$\begin{aligned}
R_m(\omega) &:= GAK(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})^2-\rho A\omega^2, \\
S_m(\omega) &:= GAKi(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c}), \\
T_m(\omega) &:= GAK-\rho I\omega^2+EI(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})^2
\end{aligned} \tag{14}$$

と定義すると，式 (13) は次式の様に書ける．

$$\begin{aligned}
&R_m a_m^n+\frac{k_s+i\eta\omega}{L}\sum_l a_l^n+S_m b_m^n=\frac{1}{c}\delta_{nm}, \\
&T_m b_m^n=S_m a_m^n
\end{aligned} \tag{15}$$

式 (15) より，b_m^n を消去し，a_m^n についてまとめると次式を得る．

$$a_m^n=\frac{\frac{1}{c}\delta_{nm}-\frac{k_s+i\eta\omega}{L}\sum_l a_l^n}{X_m} \tag{16}$$

ここで，X_m は次式により定義している．

$$X_m(\omega):=R_m+\frac{{S_m}^2}{T_m} \tag{17}$$

式 (16) の両辺を m について和をとると次式を得る．

$$\begin{aligned}
\sum_m a_m^n &= \frac{1}{c}\sum_m\frac{\delta_{nm}}{X_m}-\frac{k_s+i\eta\omega}{L}\sum_m\frac{1}{X_m}\sum_l a_l^n \\
&= \frac{1}{c}\frac{1}{X_n}-\frac{k_s+i\eta\omega}{L}\sum_l\frac{1}{X_l}\sum_m a_m^n
\end{aligned} \tag{18}$$

これを $\sum a_m^n$ について解くと次式を得る．

$$\sum_m a_m^n=\frac{1}{c\cdot X_n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k_s+i\eta\omega}{L}\sum_l\frac{1}{X_l}} \tag{19}$$

式 (19) を式 (16) に代入すると，最終的に a_m^n の具体式を得る．

$$a_m^n(\omega)=\frac{1}{cX_m}\left[\delta_{nm}-\frac{1}{X_n}\cdot\frac{1}{\frac{L}{k_s+i\eta\omega}+\sum_l\frac{1}{X_l}}\right] \tag{20}$$

式 (20) を式 (9) に代入して $\hat{u}_n$ が決定できる．また断面回転角の係数 b_m^n は，式 (15) 第 2 式に式 (20) を代入することで得られる．

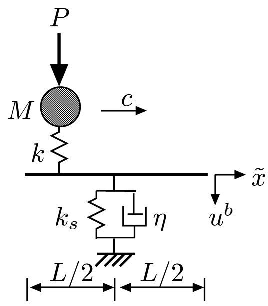

Fig. 2　Unit cell of a wheel-railway track system

$u_n(\tilde{x},t)$ および $\psi_n(\tilde{x},t)$ は，それぞれ $\hat{u}_n,\hat{\psi}_n$ の逆 Fourier 変換により求めることができる．以下では，u_n の導出過程を示す．

$$\begin{aligned}
u_n(\tilde{x},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}_n(\tilde{x},\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_m a_m^n(\omega)e^{i(\frac{2m\pi}{L}-\frac{\omega}{c})\tilde{x}}e^{i\omega t}d\omega
\end{aligned} \tag{21}$$

ここで，車輪 (荷重) 位置を $\tilde{x}=ct$ とおき，$u_n^b(t):=u_n(ct,t)$ と定義すると，車輪位置のレールたわみは次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
u_n^b(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_m a_m^n(\omega)e^{i\frac{2m\pi}{L}ct}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_m e^{i\frac{2m\pi}{L}ct}\int_{-\infty}^{\infty}a_m^n(\omega)d\omega
\end{aligned} \tag{22}$$

ここで，

$$A_m^n(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}a_m^n(\omega)d\omega \tag{23}$$

とおくと，$u_n^b(t)$ は次式により与えられる．

$$u_n^b(t)=\sum_m A_m^n e^{i\frac{2m\pi}{L}ct} \tag{24}$$

また，最終的なレールたわみ応答 $u^b(t)$ は，u_n^b により次式で与えられる．

$$u^b(t)=\sum_n F_n u_n^b=\sum_n\sum_m F_n A_m^n e^{i\frac{2m\pi}{L}ct} \tag{25}$$

2.2. 車輪の運動方程式と車輪・レール間の接触力

次に，車輪の運動について考える．Fig.2 に示すように，車輪には車輪重量を含む一定の上載荷重 P が作用しているものとする．すると車輪変位 $w(t)$ は，接触力 F を構成する各調和成分に対する応答の一次結合により次式で与えられる．

$$w(t)=w_0+\sum_{m\neq 0}\frac{F_m}{M}(\frac{L}{2m\pi c})^2e^{i\frac{2m\pi}{L}ct} \tag{26}$$

ここで，w_0 は定数項，M は車輪質量である．

また，車輪・レール間の接触点におけるバネ定数を k とすると，次式が成り立つ．

$$F(t)=k\left[w(t)-u^b(t)\right] \tag{27}$$

Table 1　Parameters of rail

mass density (kg/m^3)	7880
Young's modulus (GPa)	206
Poisson's ratio	0.33
cross-sectional area (m^2)	64.05×10^{-4}
geometrical moment of inertia (m^4)	1.96×10^{-5}
shear factor	0.34

式 (27) に式 (8), (25), (26) を代入し $F_0 = P$ とすると，最終的に未知量 F_n に関する次の無限連立方程式を得る．

$$w_0 = \frac{P}{k} + \sum_n F_n A_0^n, \tag{28}$$

$$\left[1 - \frac{k}{M}\left(\frac{L}{2m\pi c}\right)^2\right] F_m + k \sum_{n\neq 0} F_n A_m^n = -kPA_m^0 \tag{29}$$

$$, \quad (m \neq 0)$$

実際の解析では，式 (29) を有限項で打ち切り，それを解いて F_n を求める．また，一旦 F_n が求まれば，式 (28) より w_0 を得る．さらに，式 (8) より接触力 $F(t)$ を，式 (25) より荷重作用位置におけるレールたわみなどを求めることができる．

3. 解析例

3.1. 解析条件

Fig.1 に示した様に，剛な道床上にパッドを介して敷設された無限長レールを解析対象とする．支持間隔は $L = 0.6$m, パッドは Voigt モデルで表現し，バネ定数，減衰係数はそれぞれ $k_s = 110$MN/m, $\eta = 1.1$MN·s/m と設定した．その他の条件を Table 1 に示す.

3.2. 単位荷重に対する定常応答

本手法の妥当性を確認する目的で，まず単位荷重 $P = 1$N に対する定常応答解析を行った．荷重走行速度は $c = 30$m/s, 100m/s の 2 ケースとした．荷重作用位置におけるレールたわみを Fig.3, Fig.4 に示す．図中，横軸は荷重作用位置を示しているが，Fig.2 に示すように中央部 (0.3m) が支持位置となっている．

図には比較のため，時間域解法 [9] により求めた応答も合わせて示した．こちらの解析では，速度 $c = 30$m/s に対して時間増分 5×10^{-5}s とし，また速度 $c = 100$m/s に対しては時間増分 1×10^{-5}s として，有限区間に支持点を 51 点 (30m 区間) 設け，十分定常状態に至った後の応答を抽出した．なお，この解析手法においては時間域の Green 関数を用いているが，これは等間隔 gl で無限に配置された単位インパルスに対する応答解により構成している．したがって，当該 Green 関数は空間周期長 gl の周期解で与えられ，その結果 Fourier 級数により容易に導出可能となる．そのため，この周期長 gl を，隣接領域からの影響が無視できる程度に長く設定する

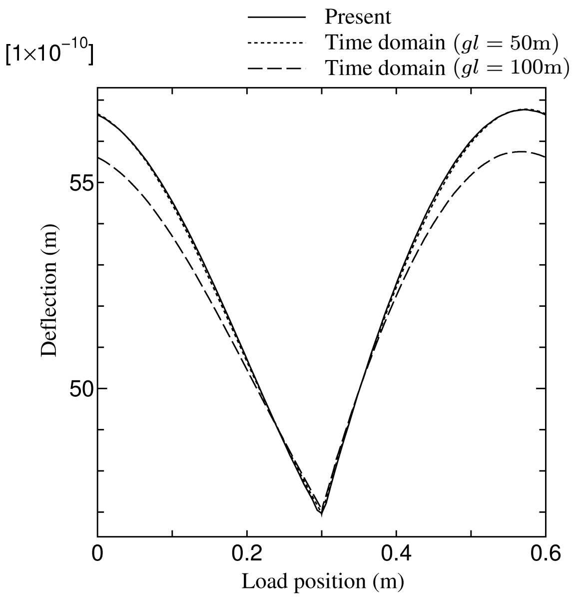

Fig. 3　Rail deflection at loading position (c=30m/s)

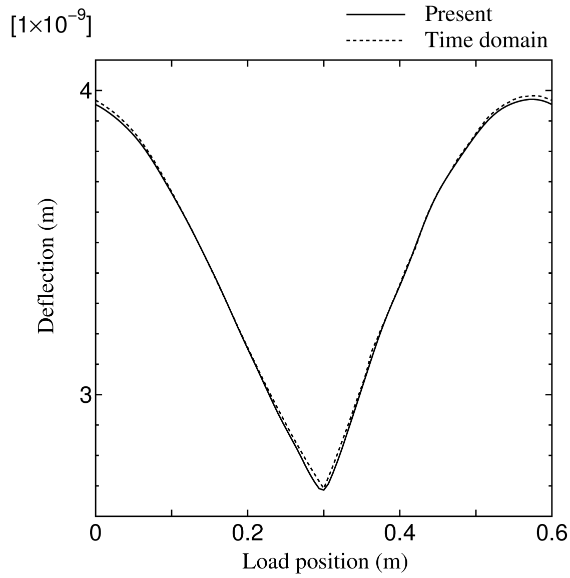

Fig. 4　Rail deflection at loading position (c=100m/s)

必要がある．また，既往の解法における当該周期長の影響を確認する目的で，Fig.3 には時間域 Green 関数の周期長 gl を 50m と 100m とした 2 ケースによる結果も合わせて示した．図では $gl = 100$m の結果が他と異なっている．この点については後程言及する．Fig.4 においても，既往の解法における周期長の影響は Fig.3 と同様な傾向を示したため，ここでは，$gl = 50$m とした結果のみ示している．さらに，本手法による解析では，解析結果に基づき逆 Fourier 変換の際，周波数増分を 1Hz とし，積分域を $|\omega| = 2000$Hz で打ち切った．また，Fourier 級数項においては，$|n| \leq 32$ として計算した．さらに，式 (29) の連立方程式は，精度を確認の上 65 項までとした．なお，時間域 Green 関数による解析では，計算に約 1 時間 30 分を要した．これに対し本解析に要した時間はわずか 2 分程度と短いものであった．

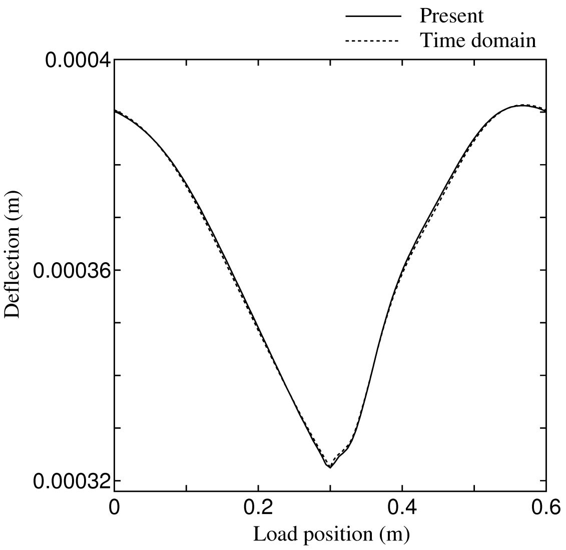

Fig. 5　Rail deflection at loading position (c=30m/s)

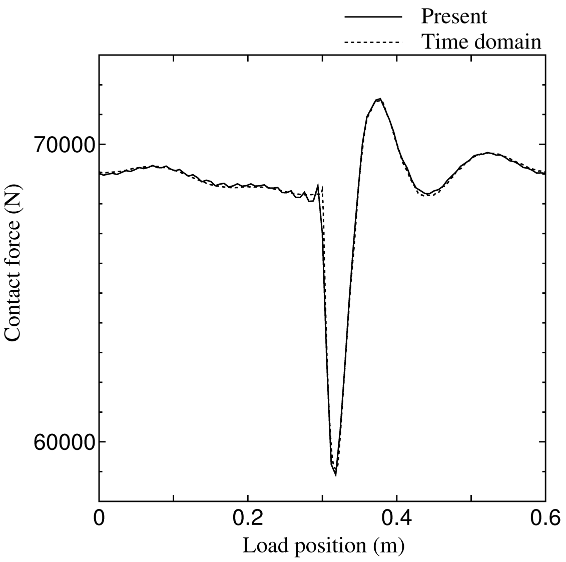

Fig. 6　Wheel / rail contact force (c=30m/s)

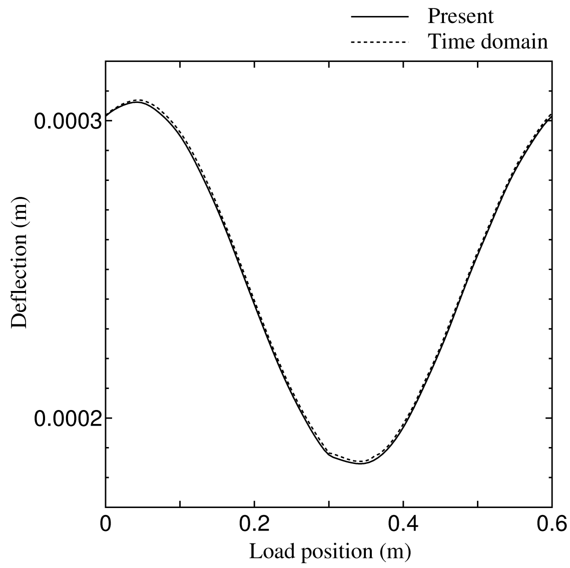

Fig. 7　Rail deflection at loading position (c=100m/s)

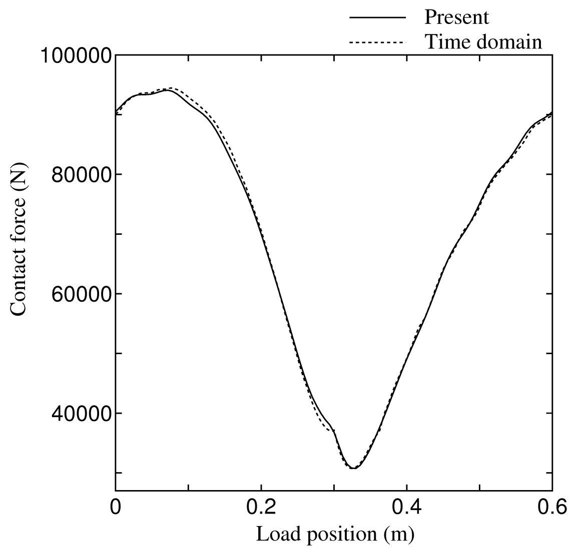

Fig. 8　Wheel / rail contact force (c=100m/s)

3.2.1　単位荷重に対するレールたわみの評価

Fig.3, Fig.4 において，本手法の解析結果と既往の結果 (gl=50m) とを比較すると，走行速度によらず両者は良好な一致を示しており，本手法の妥当性が確認できる．さらに，両図においてレールたわみは非対称な応答を示しており，最大たわみを与える位置は支間中央部からずれていることも確認できる．また，荷重作用位置のレールたわみが支持点通過時に急変動している様子が確認できる．これは，Timoshenko ばりにおけるせん断たわみの影響によるものであるが，文献 [8] の有限要素による解法では当該挙動が再現不可能であった．

3.2.2　既往の解法における解析結果の評価

既往の解法における周期長 gl が結果に及ぼす影響を，Fig.3 において確認する．gl=50, 100m における応答は完全な一致を示さず，支間中央部 $(0, 0.6\text{m})$ において大きな差異が認められる．本来ならば時間域 Green 関数の周期長 gl は前述したように長くとる必要があるが，本解析では gl=50m の結果が本手法との良好な一致を示しており，むしろ長くとり過ぎることによる精度低下が認められる．これは，レール支持点を有限区間にのみ配置していることが影響しているものと考えられる．以上より，文献 [9] の手法により定常応答解を得るためには，周期長 gl の設定に注意を要することがわかる．一方，本手法によれば，無限長レールにおける定常解を確実に得られるという利点がある．

3.3. 走行車輪と軌道系の定常連成応答

次に，1 車両の重量を 1 車輪あたりに換算した値に基づき，上載荷重を $P = 68600\text{N}$ と設定し，走行車輪との連成解析を実施した．なお，車輪質量 $M = 350\text{kg}$, 接触ばね $k = 2\text{GN/m}$ と設定した．走行速度は $c = 30\text{m/s}, 100\text{m/s}$ の 2 ケースとして解析を行った．荷重作用位置におけるレールたわみを Fig.5,

Fig.7 に，接触力を Fig.6, Fig.8 に示す．各図には比較のため，gl=50m の下で文献 [9] の時間域解法により求めた応答も示した．また，この解析および本手法による解析共，**3.2** と同一の解像度で計算を行った．

3.3.1　車輪連成下におけるレールたわみの評価

Fig.5, Fig.7 により，本手法と既往の手法とにおけるレールたわみ応答に関する解析結果を比較すると，走行速度によらず両者は良好な一致を示していることがわかる．このことから，本手法によれば，走行車輪と無限長レールとの連成解析においても適切に定常解を得られることが確認できる．また，車輪直下のレールたわみは，まくらぎ通過前後で非対称な応答を示している．なお，最大および最小たわみを与える位置は車輪走行速度により異なり，速度増加と共に，より後方へと移動している様子が確認できる．さらに，c =100m/s での変動幅は 30m/s でのそれの約 2 倍となっており，速度が速くなるにつれて，レールたわみの変動量も大きくなる傾向が認められる．ただし，レールたわみの平均値は c =100m/s の方が小さい．これは，レールの慣性の影響がより顕著に表れていることによるものと考えられる．

3.3.2　車輪・レール間の接触力の評価

Fig.6, Fig.8 に示した接触力の応答においては，たわみ応答と比較して従来法と本手法との差異が高周波成分において多少現れているものの，概ね良好な一致が認められ，本手法の妥当性を確認することができる．また走行速度による応答の差異は，たわみ応答に比べ，より顕著となっている．c =30m/s の場合では，まくらぎ位置通過直後に接触力が急減しており，いわゆる輪重抜けが明瞭に現れている．一方，c =100m/s の場合では，顕著な輪重抜けは発生せず，全体に大きく変動している様子が認められる．

4. おわりに

本論文では，離散支持された無限軌道上を車輪が走行する場合を対象に，定常連成応答解析法を構成した．なお，レールを Timoshenko ばりによりモデル化する場合，荷重作用位置においてたわみ角が常に不連続となる．この不連続性を表現するため，はりのたわみに Fourier 級数を適用した．

次に，一定荷重が走行する場合について，時間域積分表現式による有限軌道モデルの応答結果と本解析結果とを比較し，両者が良好な一致を示すことから，本手法の妥当性を確認した．

さらに，走行車輪が移動する場合の連成解析を試みた．この場合においても，時間域積分表現式による応答との比較を行った．その結果，荷重作用位置におけるレールたわみおよび接触力共に概ね良好な一致を示したことから，本手法の妥当性を確認できた．

なお，比較に用いた時間域積分表現式による既往の解法では，時間域 Green 関数が空間方向に周期性を持つ解により構成されている．そのため，隣接域からの影響を低減させるために，Green 関数の周期長を十分長くとる必要がある．しかし，本論文で対象とした定常応答解析では，周期長を長くとり過ぎることで，むしろ精度低下を生じる傾向が認められ，適切な設定には注意を要することがわかった．一方，本手法によれば，良好な精度の下で確実に定常解を得ることができ，その有用性を確認することができた．

実際の軌道では，1 台車当り 2 車輪が連行する．この場合，一般に定常応答解が厳密には得られなくなるが，本解析による 1 車輪モデルや，軸距をまくらぎ間隔の整数倍と設定したケースでの解析によっても，基本的な応答特性を十分把握できるものと考えている．

参考文献

(1) Knothe,K.L. and Grassie,S.L. : Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle Sys. Dyn.*, **22**, 209-262, 1993.

(2) 阿部和久，古田　勝：時間域積分表現式による軌道振動解析法，構造工学論文集，**43A**, 365-372, 1997.

(3) Clouteau,D., Elhabre,M.L. and Aubry,D. : Periodic BEM and FEM-BEM coupling, *Comput. Mech.*, **25**, 567-577, 2000.

(4) Clouteau,D., Arnst,M., Al-Hussaini,T.M. and Degrande,G. : Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *J. Sound Vib.*, **283**, 173-199, 2005.

(5) 阿部和久，古屋卓稔，紅露一寛：まくらぎ支持された無限長レールの加振応答解析，計算数理工学論文集，**7**(1), 25-30, 2007.

(6) Metrikine,A.V. : The steady-state response of a periodically inhomogeneous model of a railway track to a moving load, *Envir. Vib.*, Takemiya(ed.), 103-113, 2005.

(7) Mead,D.J. : A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; Applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates, *J. Sound Vib.*, **104**, 9-27, 1986.

(8) 阿部和久，古屋卓稔，紅露一寛：走行荷重を受ける軌道系の定常応答解析，計算数理工学論文集，**8**, 7-12, 2008.

(9) 阿部和久，森岡泰助，古田　勝：Timoshenko ばりを用いた軌道振動系のモデル化，構造工学論文集，**44A**, 367-374, 1998.