

# 異方性を考慮した界面結合力モデルによる 粘着テープのはく離進展解析

ANALYSIS ON PEELING PROCESS OF ADHESIVE TAPE USING COHESIVE INTERFACE  
FORCE MODEL WITH AN ANISOTROPIC STRENGTH

増田良太<sup>1)</sup>, 井上裕嗣<sup>2)</sup>, 岸本喜久雄<sup>3)</sup>

Ryota MASUDA, Hirotsugu INOUE and Kikuo KISHIMOTO

- 1) 東京工業大学理工学研究科 (〒152-8550 目黒区大岡山 2-12-1 masu@mep.titech.ac.jp)  
2) 東京工業大学理工学研究科 (〒152-8550 目黒区大岡山 2-12-1 inoueh@mep.titech.ac.jp)  
3) 東京工業大学理工学研究科 (〒152-8550 目黒区大岡山 2-12-1 kkishimo@mep.titech.ac.jp)

To investigate the interface strength, the peel test under wide range of peel angle is necessary since peeling behavior depend on peel angle. However the mode ratio of nominal and shear deformation at peeling front between cohesive zone and adherend is not directly evaluated by the peel test. The objective of the study is to clarify the relationship between the peel angle and the mode ratio by using finite element method, the influence of the stiffness of the base material to mode ratio with cohesive interface model is also investigated. The delamination energy is obtained by predominance normal energy release ratio for peel angle from 60 to 180 degree. The influence of the anisotropic interface strength appears at peel angle of 30 degree and is larger for stiffer base material. Stable peeling is not attained for lower peeling angle than 30 degree. A method to evaluate anisotropic interface strength is proposed by using peeling test results and finite element analysis.

**Key Words** : Peel Test, Peel Angle, Interface Strength, Mode mix, Anisotropic

## 1. はじめに

粘着テープは工業用製品として幅広い分野で使われている。被着体から粘着テープをはく離するのに必要な力を測定する方法としては、はく離試験がよく知られており、JISでは90°はく離試験(JIS: K6854-1)と180°はく離試験(JIS: K6854-2)が標準試験法として規定されている。しかし、はく離力は基材の厚さや剛性などの試験条件により変化するので定量的にはく離強度を評価するには適していない。Kinloch[1]は、はく離力より基材の厚さや剛性に影響しない臨界エネルギー解放率  $G_c$  を求めることではく離強度を評価することを示唆している。一方、はく離強度は、はく離角度  $\theta$  により変化する[2-5]。大宮・岸本[6]らは、マルチステージピール試験法を提案し、広範囲のはく離角度に対してはく離強度を評価している。しかし、粘着テープは、はく離先端で曲げられるため、はく離角度とはく離先端の混合モード比が必ずしも対応しておらず、界面強度の異方性を混合モードとして測定することが困難という問題がある。

界面の結合を力学的にモデル化し、はく離の進展解析を行うことは、はく離挙動を理解する上で有用である。WeyとHutchinson[7]は種々の条件下で粘着剤の弾塑性を考慮したはく離進展解析を行っている。Ma, Kishimotoら[8, 9]は損傷力学に基づき、異方性を考慮した界面結合力モデルを定式化し、混合モード試験の結果から界面パラメータ同定することで、界面を含む構造物の強度設計と結び付ける方法を提案している。

しかし、これまでに異方性を考慮した界面結合モデルを用いて粘着テープのはく離解析を行った例はあまり報告されていない[10]。そこで本研究では、垂直とせん断モードの臨界エネルギー解放率を、異方性を表す界面結合力モデルのパラメータとして採用し、界面強度の異方性がはく離力に及ぼす影響について検討する。その際、混合モード比は、はく離先端の形状に影響されると考えられるので、基材の曲げ剛性を変えた場合についても検討を行う。この結果より、はく離試験により混合モード比も含めて界面の異方性を測定する方法について考察を加える。

## 2. 解析モデル

有限要素解析にはABAQUS (Ver.6.7)[11]を使用し、2次元の平面ひずみ状態を仮定した。図1にモデルを示す。上から基材、粘着層、被着体の3層構造となっており、初期き裂を模擬するため、左端から一定の距離まで結合要素を設けていない。はく離角度  $\theta$  の拘束変位量  $u_x, u_y$  を制御することにより変化させた。被着体の下面は完全固定、右側はx方向に変位を拘束した。図2に結合要素の応力-ひずみ関係を模擬したものを示す。簡単のために、垂直方向の関係を示している。結合要素は弾性変形が続いて、損傷の発生、軟化の過程を経て最終的に剛性を失う。変形の初期において応力は剛性率  $K$  に従って線形弾性的に増加し、限界ひずみ  $\epsilon^0$  に達すると損傷が発生するとしている。2次元の結合要素の剛性マトリクスは以下のように与えられる。

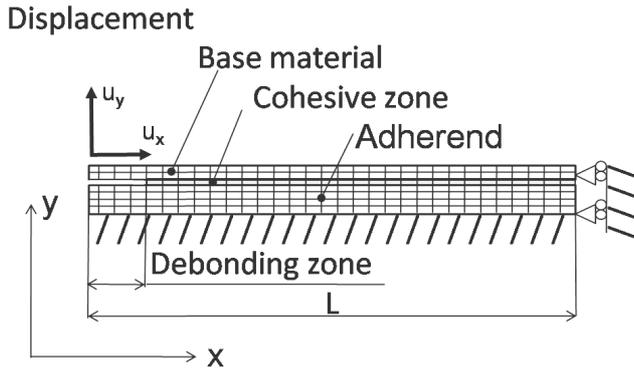


Fig.1 Finite element model of adhesive peeling

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、それぞれ  $K_{11}$  は界面に垂直方向の、 $K_{22}$  は界面に並行の剛性率である。 $K_{12}$ 、 $K_{21}$  は垂直とせん断の連成を表している。各方向に対するひずみを  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  とし、損傷発生の限界ひずみをそれぞれ  $\varepsilon_1^0$ 、 $\varepsilon_2^0$  とすると、損傷は次式のように表わされる。

$$\left\{ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0} \right\}^n + \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2^0} \right\}^n = 1 \quad (2)$$

本解析では  $n=2$  とした。損傷発生後、結合要素は軟化し、垂直とせん断モードのエネルギー解放率  $G_1$ 、 $G_2$  が次式の条件を満たしたとき完全に損傷し剛性を失うものとした。

$$\left\{ \frac{G_1}{G_{1C}} \right\}^2 + \left\{ \frac{G_2}{G_{2C}} \right\}^2 = 1 \quad (3)$$

ここで、 $G_{1C}$ 、 $G_{2C}$  (図2の斜線部分に相当) はそれぞれのモードに対する臨界エネルギー解放率である。

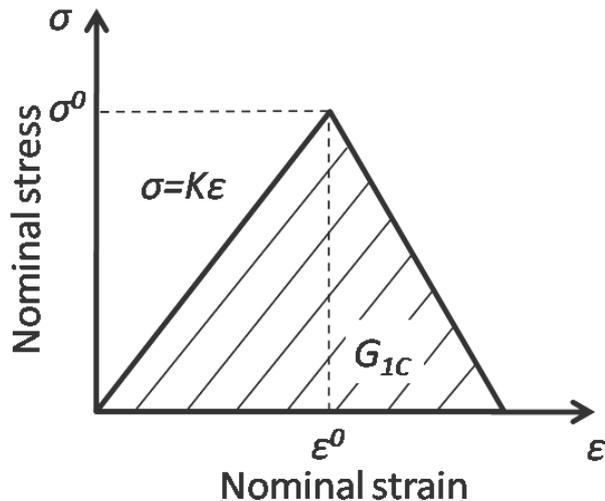


Fig. 2 Stress-strain relation for nominal deformation of cohesive element

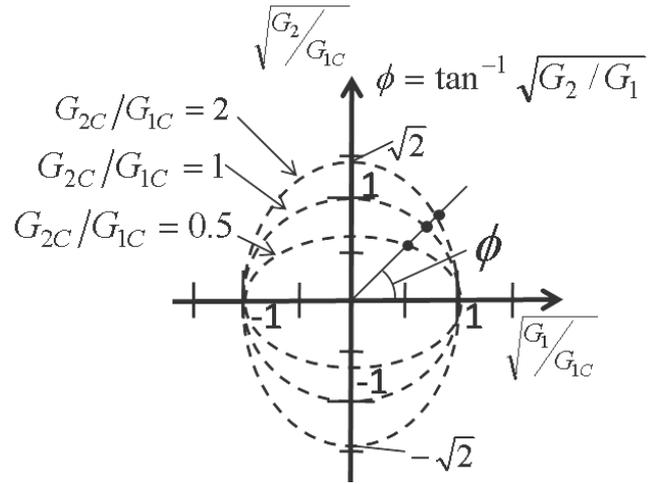


Fig. 3 Fracture boundary curves for the isotropic  $G_{2C}/G_{1C}=1$ , and the anisotropic  $G_{2C}/G_{1C}=0.5, 2$ .

$G_{1C}$ 、 $G_{2C}$  の比で界面の異方性の程度を表すことができる。図3に式(3)で与えられる破壊限界曲線を示す。縦軸、横軸ともに平方根をとっているのは横縦拡大係数との間に、

$$G_1 = \frac{K_1^2}{E'}, \quad G_2 = \frac{K_2^2}{E'} \quad (4)$$

の関係が成り立つためである。モード角  $\phi$  は、

$$\phi = \tan^{-1} \sqrt{G_2/G_1} \quad (5)$$

で定義される。 $G_{1C}$ 、 $G_{2C}$  の比を変えることで曲線の形が異なり、 $G_{1C}/G_{2C}=1$  では円に、 $G_{1C}/G_{2C}=0.5, 2$  では楕円になる。モード角が  $\phi$  のとき、点線上の●ではく離が進展し、原点から●までの長さがはく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$  となる。なお、Ma, Kishimoto と Omiya[8, 9] は破壊力学をもとに速度依存性などの項を考慮した界面結合力モデルを考案しているが、本研究では界面強度の異方性がはく離力に及ぼす影響を検討するため単純化したモデルを用いている。

解析に使用した基材と被着体の材料定数を表1に示す。被着体はアルミニウムを仮定した。結合要素の弾性マトリクス  $K$  の各成分は  $K_{11}=K_{22}=0.5$  [MPa]、 $K_{12}=K_{21}=0$  [MPa] とした。また、限界ひずみを  $\varepsilon_1^0=\varepsilon_2^0=0.5$ 、損傷開始条件の  $n$  は2とした。表2に解析条件として基材の絶対弾性係数  $E_B$ 、垂直モードとせん断モードの臨界エネルギー解放率  $G_{1C}$ 、 $G_{2C}$  の組合せを示す。

一方、定常はく離中のエネルギーバランスは以下のようになる。図4のように粘着剤が定常はく離しているとき、はく離力  $F$  がする仕事  $W_{out}$  は、はく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$ 、粘着剤に発生する弾性ひずみエネルギー  $W_e$  の変化量、基材の塑性変形によるひずみエネルギー  $W_p$  の変化量、残留応力によるエネルギーの和と等しくなり次式が成り立つ。

$$W_{out} = \Gamma(\phi) + \Delta W_e + \Delta W_p + W_{res} \quad (6)$$

Table 1 Mechanical property is used for numerical analysis

	Base material	Adherend
Elastic modulus (GPa)	$E_B$ (Table.2)	70
Poisson ratio	0.4	0.3
Thickness ( $\mu\text{m}$ )	40	100

Table 2 Value of Young's modulus  $E_B$  of base material, normal and shear of critical energy release rate  $G_{1C}$ ,  $G_{2C}$  used for numerical analysis

$E_B$ (GPa)	$G_{1C}$ (J/m <sup>2</sup> )	$G_{2C}$ (J/m <sup>2</sup> )	$G_{2C}/G_{1C}$
0.3	10.0	10.0	1
0.3	20.0	10.0	0.5
0.3	10.0	5.0	0.5
0.3	10.0	20.0	2
1.5	10.0	20.0	2
3.0	10.0	10.0	1
3.0	20.0	10.0	0.5
3.0	10.0	5.0	0.5
3.0	10.0	20.0	2
3.0	10.0	1.0	0.1

$E$ ,  $\nu$ をそれぞれ基材の縦弾性係数, ポアソン比,  $h$ を粘着剤の厚さ,  $K_{coil}$ をはく離後の基材の曲率,  $\sigma_{res}$ を基材内の残留応力とすると, 式(6)は次式のように表わすことができる.

$$\Gamma(\phi) = F_x \Delta u_x + F_y \Delta u_y - \Delta W_P - \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} K_{coil}^2 - \frac{1}{E} \left\{ \frac{F^2}{2h} \pm (\sigma_{res})^2 h \right\} \quad (7)$$

ここで,  $F_x$ ,  $F_y$ は単位幅当たりのはく離力の $x, y$ 成分,  $\Delta u_x$ ,  $\Delta u_y$ は各单位長さ粘着テープをはく離させるための基材先端の $x, y$ 方向の変位量である. はく離力 $F$ とはく離角度 $\theta$ は次式で表わされる.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (8)$$

$$\theta = \tan^{-1}(F_y/F_x) \quad (9)$$

なお, 本解析では基材は完全弾性体とし, はく離前にひずみはないとしているので, 塑性によるひずみエネルギーと残留応力の項は無視することができる. はく離エネルギー $\Gamma(\phi)$ は, はく離力 $F$ の仕事からフィルムのひずみエネルギーの変化分を引いたもので, はく離進展時のエネルギー解放率の和 $G_1+G_2$ に相等する.

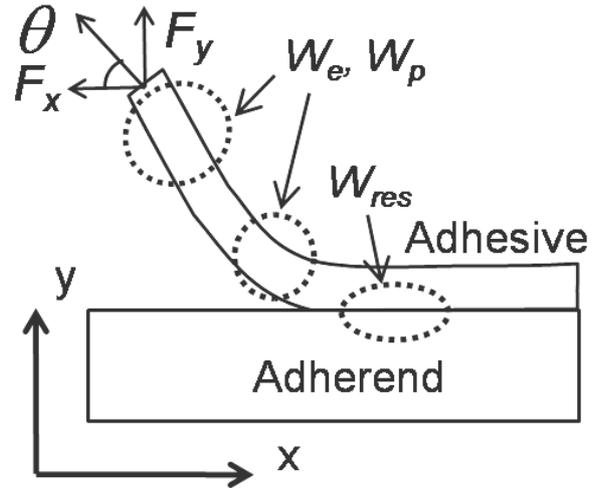


Fig.4. Peel force and energy balance during steady state peeling

### 3. 基材の要素選択

粘着テープを対象としたはく離の有限要素解析では基材のモデル化に平面ひずみ要素がしばしば用いられる[10, 12, 13]. 本研究では広範囲のはく離角度で解析を行うため, はり要素の使用についても検討した.

図5に基材に(a)平面ひずみ要素, (b)はり要素を使用した場合について変形図の代表例を示す. 結合要素は等方性( $G_{1C}=G_{2C}=10.0$  [J/m<sup>2</sup>])とし, はく離角度は $90^\circ$ とある. ここで $\Delta L$ は, はく離長さである. 両者ともにはく離先端で基材が曲げられながら, はく離が進展しており, はく離試験を再現できていることがわかる. このときのはく離距離 $\Delta L$ に対しはく離力 $F$ の変化を図6に示す. 定常はく離時のはく離力 $F$ は平面ひずみ要素では $11.5\text{N/m}$ , はり要素では,  $10.3\text{N/m}$ となっている. はく離エネルギー $\Gamma(\phi)$ は式(5)より, それぞれ平面ひずみ要素では $10.5\text{J/m}^2$ , はり要素では $10.3\text{J/m}^2$ と求められ, ほゞ両者で一致した結果が得られている.

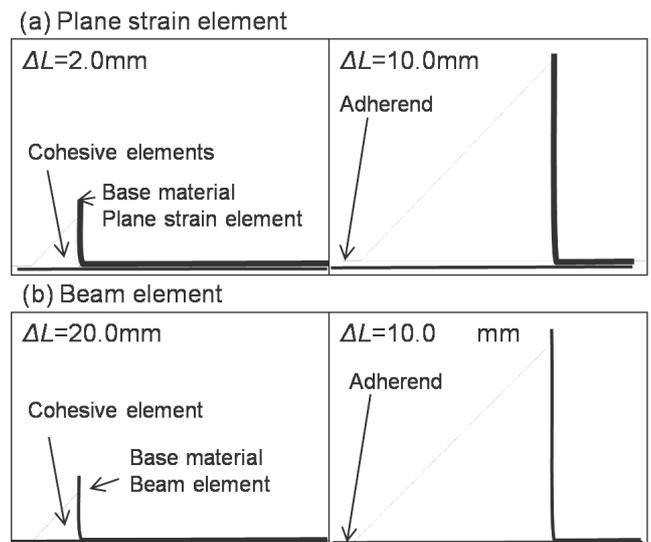


Fig.5. Deformation of base material at peel angle  $\theta=180$  degree (a) plane strain element (b) beam element

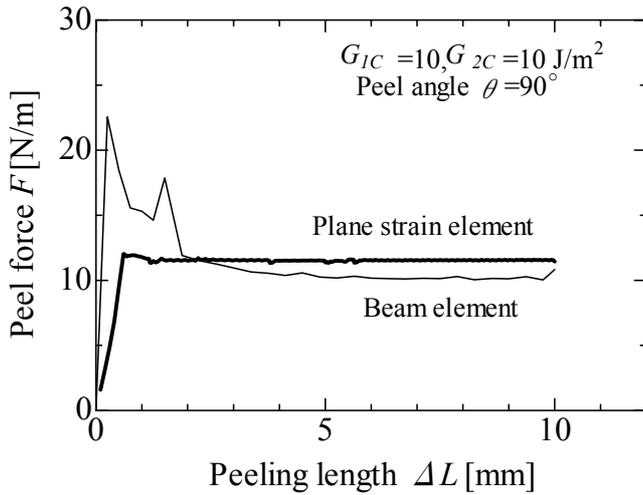


Fig.6. Peel force history for peel angle  $\theta=90$  obtained by plane strain and beam element

また、この値は臨界エネルギー解放率ともよく一致している。従って、両要素とも解析は正しく行われているといえる。

次にはく離角度  $180^\circ$  におけるはく離距離  $\Delta L$  とはく離力  $F$  の変化を図7に示す。なお、はく離角度が  $90^\circ$  を超える場合、始めに基材の先端に  $x$  方向に変位を与えると基材が座屈してしまうため、一旦  $y$  方向に変位を与え所定の位置まで基材を曲げたあと、一定のはく離角度になるように変位  $u_x$  を制御した。

平面ひずみ要素を用いた解析では定常はく離に至る以前に途中で発散し、結果は得られなかった。平面ひずみ要素では、はく離部先端での変形が大きくなるため、解析を収束させるためにはさらに細かく要素を分割する必要があると考えられる。大幅な解析時間が危惧される一方、はり要素では図7に示したように短時間で定常はく離進展の結果が得られる。以下では、はり要素を用いて行った解析結果を示す。

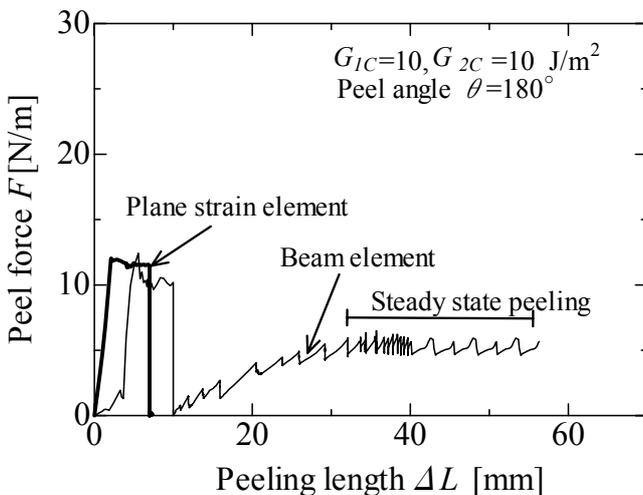


Fig.7. Peel force history obtained by plane strain and beam element for peel angle  $\theta=180$  degree.

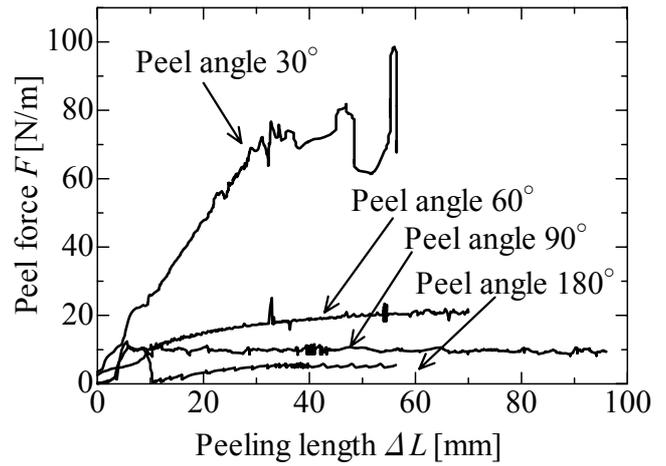


Fig.8. Peel force history for peel angle 30, 60, 90, 180 degree

#### 4. 異方性界面がはく離強度に及ぼす影響

はく離角度  $30, 60, 90, 180^\circ$  に対する、はく離距離  $\Delta L$  とはく離力  $F$  の変化を図8に示す。ここで、基材の縦弾性係数は  $E_B=0.3\text{GPa}$  とし、界面強度は等方性 ( $G_{1C}=G_{2C}=10.0\text{[J/m}^2\text{])}$  としている。  $60^\circ$  以上のはく離角度の場合には、はく離開始直後からはく離力は一定の値となっている。しかし、はく離角度が  $30$  度の場合には、はく離力が一定になるまで長い進展距離が必要であるとともに、定常状態と思われる時点でもはく離力の変動がやや大きいことがわかる。定常はく離進展におけるはく離力の平均値を以下では、はく離力  $F$  として用いる。

図9に表2に示す界面強度の組合せにおけるはく離力  $F$  とはく離角度  $\theta$  の関係を示す。基材の縦弾性係数は  $E_B=0.3\text{GPa}$  としている。この図より、はく離角度が小さいほどはく離力が大きくなる。  $G_{1C}$  の値を  $G_{1C}$  の2倍にした異方性界面 ( $G_{1C}=20.0, G_{2C}=10.0\text{[J/m}^2\text{])}$  のはく離力は、他の界面と比較して2倍ほど大きくなっている。  $G_{2C}$  を0.5倍にした界面 ( $G_{1C}=10.0, G_{2C}=5.0\text{[J/m}^2\text{])}$  は、はく離角度  $30^\circ$  で他の場合と比較して小さな値となっている。

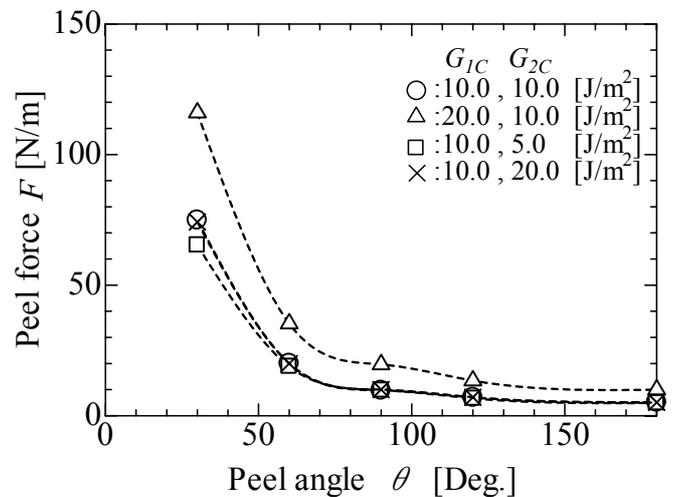


Fig.9. Peel force  $F$  dependency peel angle  $\theta$

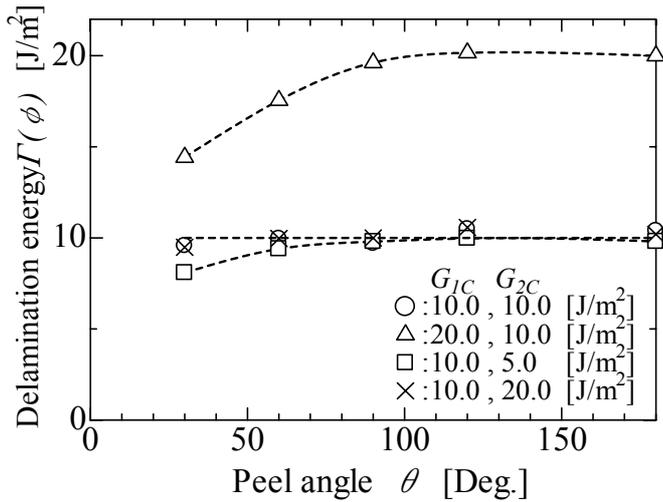


Fig.10 Peeling angle dependency of  $\Gamma(\phi)$

図 10 に式(7)より求めたはく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$  とはく離角度  $\theta$  の関係を示す。弾性ひずみエネルギー  $W_e$  は、はく離力が  $100\text{N/m}$  で  $0.8\text{J/m}^2$  程度となり、はく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$  に比べ小さな値となっている。異方性のある場合においても、 $\Gamma(\phi)$  は、はく離角度が  $90^\circ$  から  $180^\circ$  の範囲でほぼ一定の値を示して、 $G_{1C}$  の値と一致していた。はく離角度が  $60\sim 30^\circ$  では  $G_{2C}/G_{1C} = 2$  の場合に、はく離エネルギーは減少の傾向を示している。

はく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$  を垂直モードの臨界エネルギー解放率  $G_{1C}$  で正規化した値とはく離角度  $\theta$  の関係を図 11 に示す。これより、はく離角度が  $90^\circ$  から  $180^\circ$  では垂直モード  $G_I$  が支配的な状態ではく離が進展しているといえる。

はく離角度  $30^\circ$  では異方性の影響が現われている。 $G_{2C}/G_{1C} = 2$  の場合に、 $\Gamma(\phi)/G_{1C} = 0.8$  となっている。モード角  $\phi$  は、はく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$  と破壊限界曲線とより求めると約  $\phi = 23^\circ$  となり、せん断モードの割合が増加しているといえる。しかし、 $G_{1C}/G_{2C} = 0.5$  の場合にモード角  $\phi$  は変化していない。

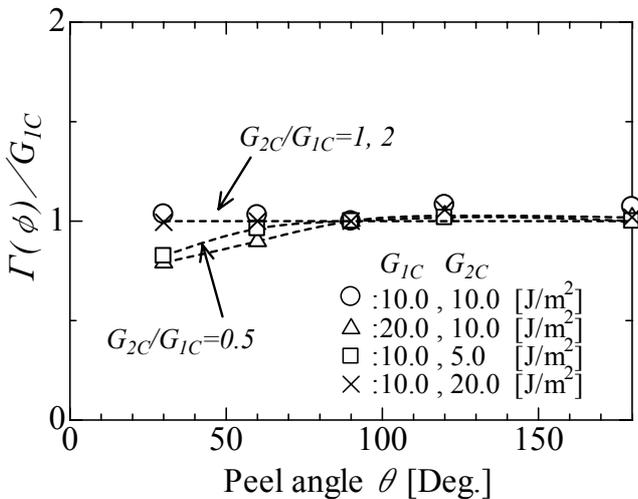


Fig.11. Ratio of the delamination energy  $\Gamma(\phi)$  by the normal critical energy release ratio  $G_{1C}$  and Peel Angle  $\theta$

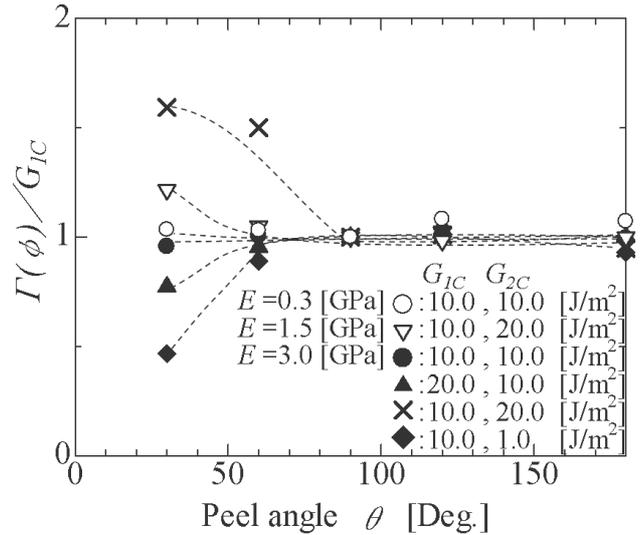


Fig.12. Peeling angle dependency of  $\Gamma(\phi)/G_{1C}$  from the different stiffness of beam material

## 5. 基材の剛性の影響

基材の剛性がはく離挙動に与える影響を検討するため、基材の縦弾性係数を変えたはく離進展解析を行った。図 12 に、はく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$  を垂直モードの臨界エネルギー解放率  $G_{1C}$  で正規化したものと、はく離角度  $\theta$  の関係を示す。剛性が変化した影響は、はく離角度  $30^\circ$  で顕著に現れている。 $G_{2C}/G_{1C}$  が大きくなるほど  $\Gamma(\phi)/G_{1C}$  の値が増加しており、基材の剛性が高くなるほど、異方性の界面強度の影響が  $\Gamma(\phi)$  の値に大きく現れている。

## 5. 異方性の測定法

図 3 の限界破壊曲線上にはく離角度  $30^\circ$  における  $\Gamma(\phi)$  の値 (原点から点線までの長さ) をプロットしたものを図 13 に示す。他のはく離角度では垂直モードの  $G_I$  が支配的になり、 $G_I = G_{1C}$  とする軸上に点が集まるため、プロットを省略している。はく離角度  $30^\circ$  では、せん断方向のエネルギー解放率  $G_2$  が増加し、モード角  $\phi$  が大きくなっている。モード角  $20^\circ$  ではく離が進展しても、はく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$  の変化量が小さくなる。それ以上にモード角  $\phi$  が大きくなると、 $\Gamma(\phi)$  の変化量が大きくなることかわかる。モード角  $30^\circ$  では、はく離エネルギー  $\Gamma(\phi)$  は  $G_{2C}/G_{1C} = 2$  で 6 割程度大きくなり、 $G_{2C}/G_{1C} = 0.5$  で 3 割程度小さくなる。異方性の程度は楕円で一次近似的できるので、混合モードに対する界面強度の異方性を求める方法として以下の手順が考えられる。

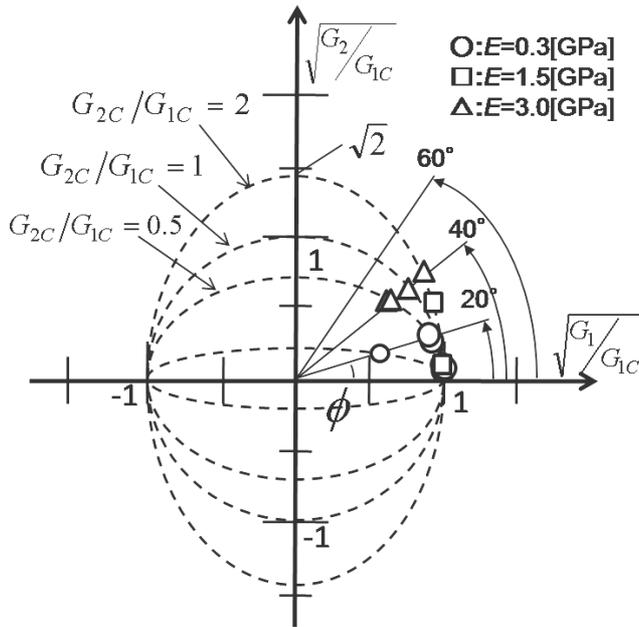


Fig.13. Fracture boundary curves for the isotropic and the anisotropic of interface strengths

1. 粘着テープのはく離試験を、はく離角度  $30^\circ$  と  $90^\circ$  で行う。ここで、はく離角度が  $90^\circ$  から  $180^\circ$  では、はく離エネルギー  $I(\phi)$  はほぼ等しくなると推測されるため試験を省略できる。垂直モードの臨界エネルギー解放率  $G_{IC}$  は、はく離角度  $90^\circ$  の結果から得られる。
2. 異方性の程度は、はく離角度  $30^\circ$  のはく離エネルギー  $I(\phi)$  を  $G_{IC}$  で割った値により検討する。  $I(\phi)/G_{IC}$  が 1 より大きければ、界面強度はせん断方向に強く、1 より小さければせん断方向に弱い。ただし、  $I(\phi)/G_{IC}$  が 1 程度でも基材の剛性を高めると、界面強度の異方性の影響が表れることがある。そこで、基材の剛性を増加させて、はく離角度  $30^\circ$  で試験を行う。
3. 使用した基材と被着体の材料定数をもとに、界面強度の異方性を考慮した結合モデルを使用して解析を行い、はく離角度  $30^\circ$  における  $I(\phi)/G_{IC}$  を求める。破壊限界曲線およびさらに基材の剛性を変えた試験を加え、図13のようにモード角  $\phi$  とはく離エネルギー  $I(\phi)$  から曲線を求める。  
なお、一方向に極端に強い界面など、破壊限界曲線が楕円ではない場合もあり得る。その場合について、更なる検討が必要であり、今後の課題である。

## 6. まとめ

本研究では界面強度の異方性がはく離力に及ぼす影響を明らかにすることを目的とし、界面結合モデルによりはく離進展解析を行った。その結果、次の結論を得た。

- (1) 基材の4節点平面ひずみ要素とはり要素を比較すると、はり要素の方が広範囲のはく離角度  $\theta$  で安定した解析を行うことができた。
- (2) はく離角度が  $60^\circ$  から  $180^\circ$  の範囲において垂直モードが支配的な定常はく離が生じる。本解析における解析条件の範囲において、はく離角度  $60^\circ$  から  $180^\circ$  でははく離の際に界面強度の異方性はほとんど生じない。

- (3) はく離角度  $30^\circ$  の場合にモード角  $\phi$  は大きくなっている。また、基材の剛性を高くするとその影響は大きくなる。これより、基材の剛性を高くしたはく離試験と、はく離進展解析を組み合わせることで混合モード比と界面の異方性を測定する方法を提案した。
- (4) はく離角度  $30^\circ$  以下では、はく離が定常状態で進展しなかった。また、せん断方向に十分に弱い界面強度 ( $G_{2C}/G_{1C}=0.1$ ) を持つ粘着剤をはく離角度  $30^\circ$  ではく離しても、せん断方向のエネルギー解放率  $G_{2C}$  が支配的になることはなかった。高いモード角  $\phi$  ではく離試験の結果が必要な場合は、せん断はく離試験のように、界面に直接せん断力を負荷するような試験を行う必要がある。

## 文 献

- (1) A.J. Kinloch, C.C. Lau and J.G. Williams, The peeling of flexible laminates, *International Journal of Fracture*, **66**, p45-70(1994)
- (2) D.H. Kaeble, Theory and Analysis of Peel Adhesion: Mechanisms and Mechanics, *Transactions of The. Society of Rheology*, **3**, p.161(1959)
- (3) L.F. Kawashita, D.R. Moore and J.G. Williams, Comparison of Peel Tests for Metal-Polymer Laminates for Aerospace Applications, *The Journal of Adhesion*, **81**, p.561-586 (2005)
- (4) K.S. Kim and N. Aravas, Elastoplastic Analysis of the Peel Test, *International Journal of Solids*, **24**, No.4, p.417-435(1988)
- (5) J.A. Williams and J.J. Kauzlarich, Peeling shear and cleavage failure due to tape prestrain, **80**, p433-458(2004)
- (6) M. Omiya, H. Inoue and K. Kishimoto, Evaluation of Interfacial Strength by Multi-stages Peel Test, *Key Engineering Materials.*, **261-263**, pp. 483-488.. (2004)
- (7) Y. Wei and J.W. Hutchinson, Interface strength, work of adhesion and plasticity in the peel test, *International Journal of Fracture*, **93**, p.315-33 (1998).
- (8) M. Omiya, K. Kishimoto and W. Yang, Interface Debonding Model and its application to the Mixed Mode Interface Fracture Toughness, *International Journal of Damage Mechanics.*, **11**, p.263-286, (2002)
- (9) F. Ma and K. Kishimoto, A Continuum Interface Debonding Model and Application to Matrix Cracking of Composites, *The Japan Society of Mechanical Engineers*, **39**, No. 4, p.496-507 (1996)
- (10) R. Masuda, H. Inoue and K. Kishimoto, Peeling rate dependency of delamination behavior of adhesives, *Advanced Materials Research*, **33-37**, p339-344(2008)
- (11) ABAQUS, Inc., ABAQUS user's documentation, version 6.7
- (12) T. Ferracin, C.M. Landis, F. Delannay and etc., On the determination of the cohesive zone properties of an adhesive layer from the analysis of the wedge-peel test, **40**, p2889-2904(2003)
- (13) G. Alfano and M.A. Crisfield, Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues, **50**, p1701-1736(2001)