計算数理工学論文集 Vol. 8 (2008 年 11 月), 論文 No. 03-081128　JASCOME

多重極展開と一般逆行列を用いた境界要素法による注目領域の高速解法

EFFICIENT BOUNDARY ELEMENT METHOD BY MULTIPOLE EXPANSION AND GENERALIZED INVERSE MATRIX FOR ANALYSING TARGET REGION

山岸　寛 [1)]，天谷　賢治 [2)]

Hiroshi YAMAGISHI and Kenji AMAYA

1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻　(〒 152-8550　東京都目黒区大岡山 2-12-1)
2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科

A new technique for boundary element analysis of potential problems using a multipole expansion to obtain the solution quickly only in a target region has been developed. The capability of the present technique was verified by numerical simulations. In this technique, the multipole expansion is applied to boundary integral equations on non-target boundaries where source points are allocated on target boundary. Those equations are expanded by multipole moments and the expansion is truncated at the term where the error bound of the higher terms is guaranteed. This technique decreases the calculation amount by introducing multipole moments as the unknown in place of the unknown in the non-target region. Boundary integral equations of the same number of multipole moments on non-target boundaries where source points are allocated on near non-target boundary are formulated. The fluxes of boundary integral equations on non-target boundaries are approximated by multipole moments using generalized inverse matrix. To demonstrate the effectiveness of the method, some example analyses were performed. When the solutions only in the target region are needed, especially in large size boundary value problems, this technique enables us to obtain them quickly and precisely.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis,Target Region, Multipole Expansion, Computational Mechanics

1. 緒言

音，腐食, 電磁波などの解析対象には開領域の境界値問題が多く，境界要素法 (BEM)[(1)] が有効である．さらに，境界要素法の高速解法として高速多重極展開法 (Fast Multipole Method:FMM)[(2)(3)] があり，大規模計算の効率的な手法として利用されている．これら手法は全ての未知数に対して同程度の精度で解を求めることを前提に考えられている．しかし，産業などにおける実際の解析では領域全体の解は必要ではなく，解析の目的に応じてある特定の領域 (以下注目領域と呼ぶ) の解のみが必要である場合が少なくない．具体的なケースとして，Fig.1 に示すような船舶などの構造物の一部における防食効果を見積もるための腐食・防食解析や応力集中部周辺の強度評価を行うための応力解析などが考えられる．この様な状況下では注目領域の解のみを通常の境界要素法と同程度の精度で効率的に求められると都合が良い．

前報では，ポテンシャル問題に対し，取り扱う解析領域を “ 注目領域 ” と “ 非注目領域 ” に分割し，境界積分方程式に含まれる非注目境界上の未知数を低次の多重極モーメントで表し，その数を大幅に減少させ，注目領域の解だけを正確，且つ効率的に求める手法を提案した [(4)].

この方法では離散化代数方程式を構成する際，境界積分方程式に含まれる未知数の数は，注目境界の要素分割数と多重極モーメントの数の和となる．注目境界に加えて，非注目境界の要素にソース点を配置した境界積分方程式を立式し，その未知数を最小二乗法により求める．このように，未知数に

2008 年 9 月 9 日受付，2008 年 10 月 30 日受理

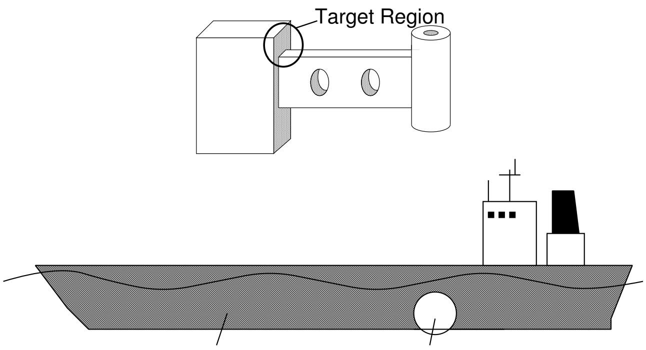

Fig. 1　Examples where particular regions are of interest to be analyzed

比べてはるかに多い数の境界積分方程式を立式しているため，計算効率を向上させる余地が残っていた．また，非注目境界にソース点を配置した境界積分方程式には多重極モーメントを低次で打ち切っていることによる誤差を含んでおり，境界形状が複雑になると計算精度が悪化していた．

そこで本研究では，まず，ソース点が注目境界にある境界積分方程式には，基本解の多重極展開を利用して，非注目境界の境界積分を低次の多重極モーメントで展開する．本手法では非注目境界のフラックスを求める代わりに低次の多重極モーメントを未知数とする．次に，非注目境界にソース点を配置した境界積分方程式の代わりに，ソース点を非注目境界の近傍に配置した通常の境界積分方程式を不足している多重極モーメントの未知数分だけ立式する．さらに，境界積分方程式に含まれる非注目境界上の積分項の未知数を，一般逆行列を用いて多重極モーメントで近似する．同様に非注目境界のフラックスを求める代わりに低次の多重極モーメントを未知数として解析を行う．これにより，立式する境界積分方程式の数，および未知数の数を抑え計算の効率化が期待できる．また，実際に数値計算を行い本手法の有効性を確認する．

2. 定式化

本報告では，簡単のため支配方程式がラプラス方程式の完全ディリクレ問題を考える．積分領域を Fig.1 のように注目領域 (Target Region) と非注目領域 (Non-Target Region) に分割する．また，注目領域での境界を注目境界，非注目領域における境界を非注目境界と呼ぶことにする．

2.1. 境界値問題の設定

本研究では簡単のため Fig.2 に示すような境界 Γ で囲まれた二次元の閉領域 Ω における完全ディリクレ問題を考える．すなわちポテンシャル u がラプラス方程式

$$\nabla^2 u(z) = 0, \qquad z \in \Omega \tag{1}$$

を満足し，境界条件

$$u(z) = \widehat{u}, \qquad z \in \Gamma \tag{2}$$

を満たすとする．ここで，$\widehat{u}$ は Γ におけるポテンシャルの既知量である．

2.2. 境界積分方程式の導出と注目境界と非注目境界への分割

Fig.2 のように複素平面を用い，解析領域における観測点を z，ソース点を z_0 とする．式 (1) にグリーンの公式を適用

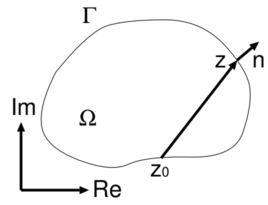

Fig. 2　Domain Ω and boundary Γ in the complex plane

すると次の境界積分方程式が得られる．

$$\begin{aligned} c(z_0)u(z_0) = Re\Bigg[&\int_\Gamma u^*(z,z_0)q(z)d\Gamma(z) \\ &- \int_\Gamma q^*(z,z_0)u(z)d\Gamma(z)\Bigg] \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $Re[]$ は複素数の実部を表す．q は境界における u の外向き法線方向の微分 $q(=\partial u/\partial n)$ である．ここで，Γ 上の外向き法線ベクトルを n とする．$u^*(z,z_0)$ はラプラス方程式の基本解，$q^*(z,z_0)$ は u^* の法線方向の微分であり，二次元問題では

$$u^*(z,z_0) = \frac{1}{2\pi} ln\left(\frac{1}{z_0 - z}\right) \tag{4}$$

$$q^*(z,z_0) = \frac{\partial u^*(z,z_0)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi(z_0 - z)}\frac{\partial(z_0 - z)}{\partial n} \tag{5}$$

である．なお，$c(z_0)$ はソース点 z_0 が Ω 内にある場合 $c = 1$，Ω 外の場合 $c = 0$，滑らかな境界上の場合 $c = 1/2$ の値をとる定数である．式 (3) を Fig.3 のように注目境界 Γ_t と非注目境界 $\overline{\Gamma}_t$ に分割すると次の境界積分方程式が得られる．

$$\begin{aligned} c(z_0)u(z_0) = Re\Bigg[&\int_{\Gamma_t} u^*(z,z_0)q(z)d\Gamma(z) \\ &+ \int_{\overline{\Gamma}_t} u^*(z,z_0)q(z)d\Gamma(z) \\ &- \int_\Gamma q^*(z,z_0)u(z)d\Gamma(z)\Bigg] \end{aligned} \tag{6}$$

2.3. 非注目境界における境界積分の多重極展開

式 (4) の基本解 $u^*(z,z_0)$ を

$$\begin{aligned} u^*(z,z_0) &= -\frac{1}{2\pi} ln(z_0 - z) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left[ln(z_0 - z_c) + ln\left(1 - \frac{z - z_c}{z_0 - z_c}\right)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

と変形する．多重極展開の中心点 z_c について $|z - z_c| \ll |z_0 - z_c|$ の関係が成り立つとき，テイラー展開

$$ln(1-\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^k}{k}, \qquad |\xi| < 1 \tag{8}$$

を適用すると式 (7) は次式となる．

$$u^*(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c) \tag{9}$$

ここで，

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!} \quad , \qquad k \geq 0 \qquad (10)$$

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}, \qquad k \geq 1$$

$$O_0(z) = -ln(z) \qquad (11)$$

である．

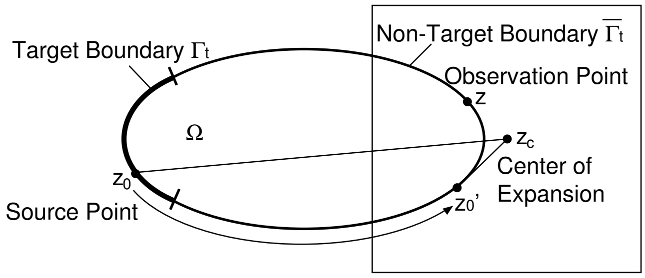

Fig. 3 Source point z_0,observation point z and center of expansion z_c

式 (9) により式 (6) の非注目境界 $\overline{\Gamma}_t$ の積分項は次式となる．

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{\Gamma}_t} u^*(z,z_0)q(z)d\Gamma(z)\\&= \frac{1}{2\pi}\int_{\overline{\Gamma}_t}\left[\sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c)I_k(z-z_c)\right]q(z)d\Gamma(z)\\&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0-z_c)M_k(z_c)\end{aligned} \qquad (12)$$

ここで $M_k(z_c)$ は z_c についての多重極モーメントであり，

$$M_k(z_c) = \int_{\overline{\Gamma}_t} I_k(z-z_c)q(z)d\Gamma(z) \qquad (13)$$

である．なお $M_k(z_c)$ は複素数である．式 (12) の無限級数を次式のように N 個の有限項で打ち切る．

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{\Gamma}_t} u^*(z,z_0)q(z)d\Gamma(z)\\&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0-z_c)M_k(z_c)\\&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N} O_k(z_0-z_c)M_k(z_c) + \epsilon\end{aligned} \qquad (14)$$

ここで，ϵ は打ち切りによる誤差項であり，Fig.3 に示すように $z_0 \to z_0'$ とすると打切り誤差が増大する．次式の条件

$$|z_0 - z_c| \geq 3|z - z_c| \qquad (15)$$

が成り立つとき，式 (12) の無限級数は $N = 15$ 程度で十分収束することが知られている [3]．以上のように，非注目境界 $\overline{\Gamma}_t$ の未知数をフラックス q の代わりに，低次の多重極モーメント M で表し，その数を大幅に減少させ計算を高速化する．

2.4. ソース点を注目境界上に配置した境界積分方程式

非注目境界 $\overline{\Gamma}_t$ の積分項では，前節で示したように未知数はフラックス q の代わりに，多重極モーメント M を用いる．従って，式 (6) は式 (14) を用いて，

$$\begin{aligned}c(z_0)u(z_0) \simeq Re\Bigg[&\int_{\Gamma_t} u^*(z,z_0)q(z)d\Gamma(z)\\&+ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N} O_k(z_0-z_c)M_k(z_c)\\&- \int_{\Gamma} q^*(z,z_0)u(z)d\Gamma(z)\Bigg]\end{aligned} \qquad (16)$$

となる．上式を一定要素で離散化し，注目境界 Γ_t 上の各要素の図心にソース点を配置した境界積分方程式を連立すると，多重極モーメント M の実部, および虚部を合わせた $2N$ 個の未知数分だけ式の数が不足し，解くことができない．そこで，本研究では，次節に示すように不足する数だけの非注目境界の近傍にソース点を配置した境界積分方程式を立式する．

2.5. ソース点を非注目境界の近傍に配置した境界積分方程式

まず，ソース点を解析領域 Ω の外かつ非注目境界 $\overline{\Gamma}_t$ 近傍に配置した通常の境界積分方程式を多重極モーメント M の数である $2N$ 個立式する．そのソース点の座標を $z_f^v(v = 1, \cdots, 2N)$ とすると，式 (6) より

$$\begin{aligned}Re\Bigg[&\int_{\Gamma_t} u^*(z,z_f^v)q(z)d\Gamma(z)\\&+ \int_{\overline{\Gamma}_t} u^*(z,z_f^v)q(z)d\Gamma(z)\\&- \int_{\Gamma} q^*(z,z_f^v)u(z)d\Gamma(z)\Bigg] = 0\end{aligned} \qquad (17)$$

となる．z_f^v の位置をどこにとるかについては 3.1.2 節で考察する．

次に，式 (17) の左辺第二項である非注目境界 $\overline{\Gamma}_t$ の積分項を一定要素で離散化すると q は積分記号の外に出すことができ，マトリクス表示で $G_{\overline{\Gamma}_t}q$ と表すと，$G_{\overline{\Gamma}_t}$ の (v,j) 成分は

$$G_{\overline{\Gamma}_{tj}}(z_f^v) = \int_{\overline{\Gamma}_{tj}} u^*(z,z_f^v)d\Gamma(z) \qquad (18)$$

となる．

また，式 (13) を一定要素で離散化すると，q は積分記号の外に出すことができ，多重極モーメント M を $M = Jq$ と表すと，J の (k,j) 成分は

$$J_{kj}(z_c) = \int_{\overline{\Gamma}_{tj}} I_v(z-z_c)d\Gamma(z) \qquad (19)$$

となる．また，一定要素以外の要素で離散化する場合も同様に，離散化できる．J のムーア・ペンローズの一般逆行列 [5] を J^+ とすると，

$$q = J^+M + \epsilon \qquad (20)$$

となる．ここで，ϵ は最小二乗最小ノルム解と真の q との誤差である．また，J の転置行列 J^t を用いて，$J \cdot J^t$ の逆行列が安定的に計算できれば，式 (20) は

$$q = J^t(J \cdot J^t)^{-1}M + \epsilon \qquad (21)$$

と表せる．従って，式 (17) の左辺第二項を次式で近似する．

$$\begin{aligned}G_{\overline{\Gamma}_t}q =& G_{\overline{\Gamma}_t}J^t(J\cdot J^t)^{-1}M + G_{\overline{\Gamma}_t}\epsilon\\ \simeq& G_{\overline{\Gamma}_t}J^t(J\cdot J^t)^{-1}M\end{aligned} \qquad (22)$$

2.6. 離散化代数方程式の導出

本研究では非注目境界のフラックス q の代わりに導入した多重極モーメント M を新たな未知数とする．非注目領域には M の成分である N 個の複素数が未知数として存在する．注目境界に m 個のソース点を設け，多重極展開は N 項まで級数展開し，次式のように $m+N\times 2$ 個の代数方程式を構成する．例えば，$N=15$ の場合には代数方程式の数および未知数の数は $m+30$ 個となる．本手法では，このように非注目境界上の未知数を低次の多重極モーメント M で表し，代数方程式および未知数の数を大幅に減少させることにより計算を効率化する．

$$\begin{bmatrix} G & O \\ G_{\Gamma_t} & G_{\overline{\Gamma}_t} J^t (J\cdot J^t)^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ H_\Gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \end{pmatrix} \quad (23)$$

式 (16) の右辺第一項および右辺第二項はそれぞれ Gq および OM に対応し，式 (16) の左辺と右辺第三項の和が Hu に対応する．式 (17) の左辺第一項および左辺第二項はそれぞれ $G_{\Gamma_t}q$ および $G_{\overline{\Gamma}_t}J^t(J\cdot J^t)^{-1}M$ に対応し，式 (17) の左辺第三項が $H_\Gamma u$ に対応する．

上式を解き注目領域の未知数 q および M を得る．

2.7. 非注目境界のセル分割

注目境界と非注目境界が接するなど両境界同士が近い距離関係の場合には，式 (15) の条件を満たすように多重極展開の中心 z_c を決定することは難しい．このような場合には，Fig.4 のように非注目領域に適宜多重極展開中心 z_c を複数個とり，複数のセルに分割する．非注目領域を L 個のセルに分割すると各セルには M の成分である 15 個の複素数が未知数として存在する．この様な場合には非注目境界は $15\times 2\times L$ 個の未知数のみで解析を行うことができる．

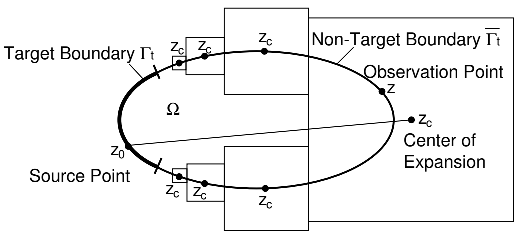

Fig. 4　Source point z_0,observation point z and center of expansion z_c and division into multiple cells

3. 解析例

まず，本手法と通常の境界要素法で求めた注目領域の未知量を比較し，本手法の計算精度の検証をする．また，非注目境界近傍に配置するソース点の位置について考察する．次に，計算に要した時間について，本手法と通常の境界要素法で比較し，本手法が通常の境界要素法より高速に注目領域の未知量を計算できることを示す．

3.1. 計算精度の検証

3.1.1　非注目境界の形状が矩形の場合

式 (15) を満たすように多重極展開の中心 z_c を外周の円および内周の正方形の中心とし，外周の円を注目境界 Γ_t，内周の正方形を非注目境界 $\overline{\Gamma_t}$，注目領域 Ω_t とした Fig.5 のような領域を考える．外周の注目境界を 1000 個の線分一定要素で，内周の非注目境界を 5000 個の線分一定要素でそれぞれ等間隔に要素分割した．境界条件はすべてディリクレ条件とし，内周および外周のポテンシャルをそれぞれ Fig.6 および 7 のように設定した．多重極モーメントの項数 $N=9$ とし，非注目境界の近傍に配置するソース点 z_f を多重極展開の中心から半径 $\xi=0.9$ の円上に等間隔に配置した．以上の条件で本手法と通常の境界要素法で注目境界の未知量を求め，Fig.8 に示した．本手法と通常の境界要素法で得られたフラックスが良く一致しており，注目境界の未知数が十分な精度で計算できている．　Fig.9 には解析領域 Ω 内の $\theta=0$

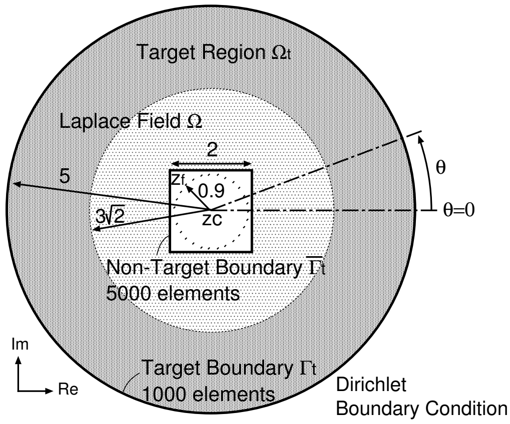

Fig. 5　Boundary condition and location of source points z_f near non-target boundary $\overline{\Gamma_t}$

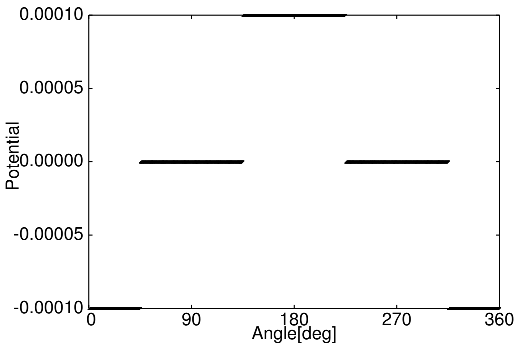

Fig. 6　Potential distribution on non-target boundary $\overline{\Gamma_t}$

上での径方向のポテンシャルの分布を示した．外側の注目領域 Ω_t の近傍では十分な精度で計算できている．

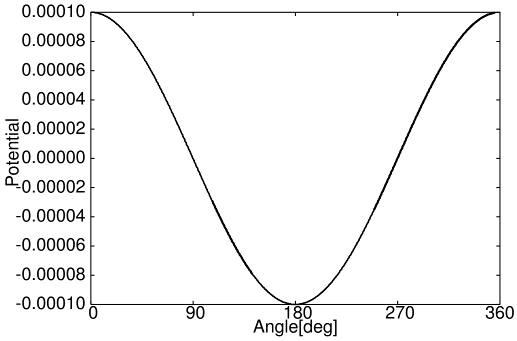

Fig. 7　Potential distribution on target boundary Γ_t

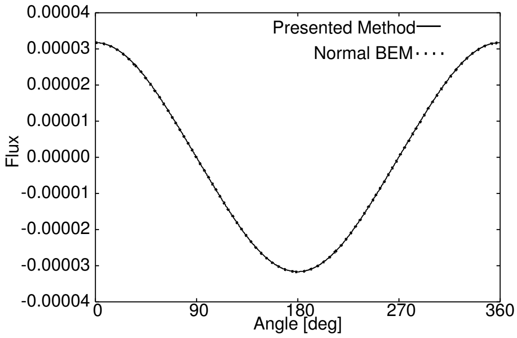

Fig. 8　Flux distribution on target boundary Γ_t

3.1.2　非注目境界近傍に配置するソース点の位置の考察

前節 3.1.1 で示した例題に対して，非注目境界の近傍に多重極展開の中心から円上に等間隔に配置するソース点の半径 ξ を 0 ～ 1 まで変化させた場合の，本手法および通常の境界要素法で求めた注目領域のフラックスの誤差および式 (23) の左辺係数行列 G' の条件数 $cond(G')$ を Fig.10 に示す.

ξ が小さくなるにつれて，$\xi = 0.2$ 程度までは誤差が減少している．ξ がほぼ 0.2 以下になると，互いのソース点が近づくので条件数が増大し，誤差も増大することが分かる．

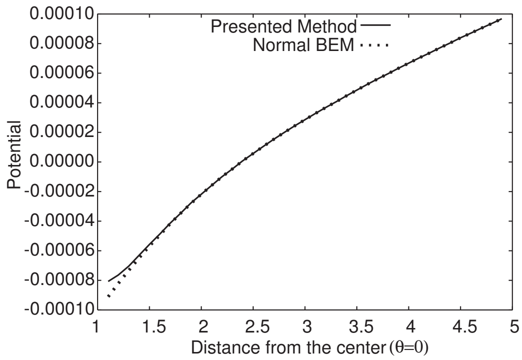

Fig. 9　Potential distribution in Laplace field $\Omega(\theta = 0)$

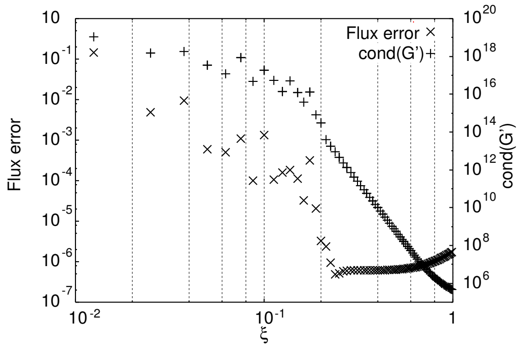

Fig. 10　Flux error and cond(G')

3.2. 計算時間の比較

Fig.11 に示すドーナツ型領域 Ω を用い，境界の要素分割数を変化させ，計算時間を通常法と本手法で比較した．外周を注目境界とし，要素数を 1000 個に固定する．内周を非注目境界とし，要素数を 1000 から 7000 要素まで 1000 要素刻みで変化させて計算をした．境界条件はすべてディリクレ条件とし，内周および外周のポテンシャルをそれぞれ Fig.12 および 13 のように設定した．式 (15) を満たすように注目領域 Ω_t を設定した．多重極モーメントの項数 $N = 9$ とした．計算に使用した CPU は 2.4GHz，搭載メモリは 32GB, コンパイラは pgcc である．計算時間計測には time コマンドを用いた．Fig.14 に結果を示す．注目領域および非注目領域の境界の要素数をそれぞれ，N_t および N_f と表すと，通常の計算量が $O((N_t + N_f)^3)$ であり, 本手法では式 (22) の J や $J \cdot J^t$ の作成のため計算量が $O(N_f)$ である．したがって，全体の計算量は N_f に比例し，これは実験的に検証した Fig.14 の結果にもあらわれている．また，前報 [(4)] の手法で実験的に求めた計算量は $O(N_f^{1.7})$ であった．要素分割数が増加するほど本手法が有効であることが分かる．

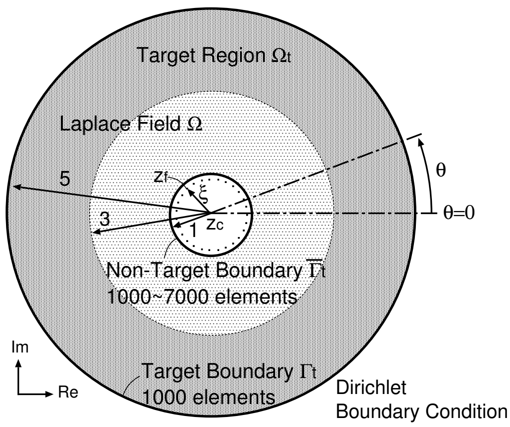

Fig. 11　Boundary condition and location of source points z_f near non-target boundary $\overline{\Gamma_t}$

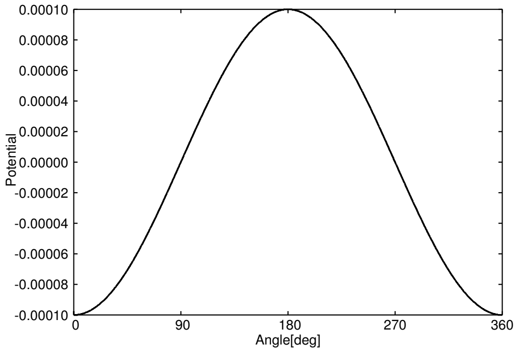

Fig. 12　Potential distribution on non-target boundary $\overline{\Gamma_t}$

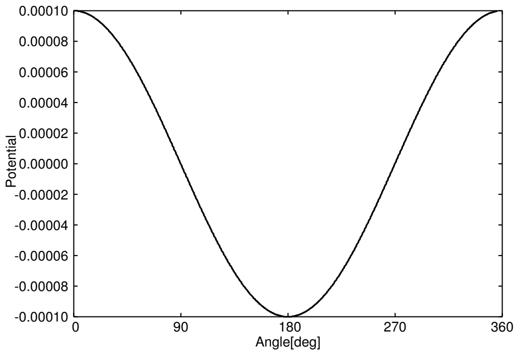

Fig. 13　Potential distribution on target boundary Γ_t

4. 結言

本研究では，多重極展開と一般逆行列を用いた境界要素法による注目領域の高速解法を開発した．本手法ではまず，通常の境界積分方程式を導出する．次に，解析領域を注目領域と非注目領域に分割する．ソース点を注目境界上に配置した境界積分方程式には，多重極展開を適用し，非注目境界の積分項を低次の多重極モーメントで展開する．本手法では非注目境界のフラックスを求める代わりに低次の多重極モーメントを未知数とする．その多重極モーメントの数だけ非注目境界の近傍にソース点を配置した通常の境界積分方程式を立式する．この非注目境界の積分項のフラックスを一般逆行列を用いて低次の多重極モーメントで表す．最後に，立式する境界積分方程式の数，および未知数の数を大幅に減少させ計算を効率化する．実際に数値計算を行い本手法の有効性を確認した．

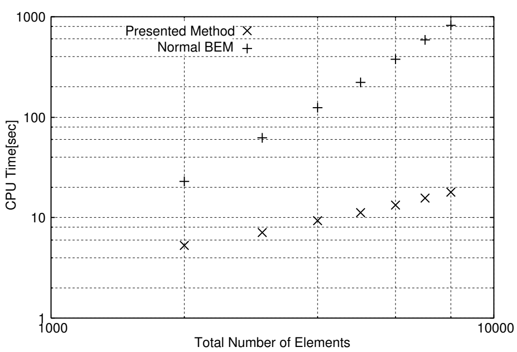

Fig. 14　Comparison of computational time(log scale)

参考文献

(1) 田中正隆，松本敏郎，中村正行：境界要素法，(1991)，培風館．

(2) Greengard, L. and Rokhlin, V.： A fast Algorithm for Particle Simulations，Jurnal of Computational Physics，**135**(1997)， pp. 280–292.

(3) Liu, Y. and Nishimura, N.:The Fast multipole boundary element method for potential problems， Engineering Analysis with Bondary Elements，**30**(2006)， pp. 371–381.

(4) Yamagishi, H. and Amaya, K.： An efficient boundary element method using multipole expansion for analysing target region， Transactions of the Japan Society for Computational Methods in Engineering，**7**(2008)， pp. 309–312.

(5) 久保司郎：計算力学と CAE シリーズ 10 逆問題, (1992), 培風館.