

# 走行荷重を受ける軌道系の定常応答解析

## STEADY-STATE ANALYSIS OF A RAILWAY TRACK SUBJECTED TO A MOVING LOAD

阿部 和久<sup>1)</sup> 古屋 卓稔<sup>2)</sup> 紅露 一寛<sup>3)</sup>

Kazuhisa ABE, Takutoshi FURUYA and Kazuhiro KORO

<sup>1)</sup>新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)

<sup>2)</sup>日本交通技術(株) (〒 453-0014 名古屋市東区則武 1-10-6)

<sup>3)</sup>新潟大学大学院 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper presents a steady-state analysis method for a periodically supported infinite rail subjected to a moving load. The solving equation is derived by way of both the Fourier transform in temporal domain and the Floquet transform with respect to the spatial axis along the railway track. It is then revealed that these two approaches result in the same equation. Moreover, the formulation is extended to take into account a fluctuating load. Steady-state responses to a constant load moving on a rail with various speeds are analyzed. Through the comparison with solutions given by a time domain analysis method, the validity of the developed method is evidenced. The dynamic behavior of the rail due to a harmonic load is also investigated.

**Key Words :** *Moving load, steady-state solution, periodically supported rail*

### 1. はじめに

鉄道軌道の動的挙動は、列車の乗り心地や走行安定性、軌道の保守管理や振動・騒音対策など広範囲に影響を及ぼすため、その適切な把握が重要となる。そのため、軌道の動的問題に関する研究が様々な観点から長年に亘りなされて来た<sup>1)</sup>。

軌道系における動的応答の基本特性は、モード解析により抽出することができる。まくらぎに離散支持されたレールの様に、無限長の周期構造内を伝播して行く波動モードの解析は、Floquet 原理 (Floquet の定理)<sup>2),3)</sup>の適用により可能となる。軌道系の分散曲線における特性は、著者ら<sup>4),5)</sup>を始め多くの研究者により調べられている。

また、軌道振動は本来車輪とレールとの接触に因って発生する。したがって、接触力作用下における軌道振動応答解析も、現実の動的挙動を定量評価する上で必要となってくる。そこで、著者ら<sup>6)</sup>は最初の試みとして、定点調和加振を受ける無限軌道系の応答解析を行った。文献 6) では、当該問題の解析を Floquet 変換<sup>7),8)</sup>に基づき実施した。本手法による場合、まず動的問題を Floquet 波数空間の問題に変換する。これにより無限領域における問題を、周期構造を構成する最小単位 (ユニットセル) におけるそれに帰着して解くことが可能となる。

なお、実際に発生する軌道振動は走行車輪とレールとの連成に起因して発生する。したがって、走行荷重下における応答の評価が有用な知見を与える。そのため、当該問題に対する解析が多数なされて来た。従来手法でも、

レールのたわみ応答の記述に積分表現式による定式化を用いれば、レールを無限長モデルとして表すことができる。しかし、まくらぎ等による離散支持点を無限領域全体に亘って配置することは不可能であるため、結局有限領域のみ離散支持したモデルとせざるを得ない<sup>9),10)</sup>。

走行荷重下での時刻歴応答解析においては、現実の軌道系を模擬して何らかの減衰を導入することとなる。そのため、モデルの打ち切り端の影響はモード解析の様に致命的とはならないものの、高速走行荷重下での定常応答を得るためには軌道を相当長く取る必要があり、解析規模の長大化が不可避となる。

一方、文献 6) と同様の手法を利用すれば、軌道を構成する 1 ユニットのみの離散化の下に、走行荷重下における定常応答解析が可能となるものと考えられる。そこで、本研究では当該目的のための具体的解析法の構成を試みる。以下では、まず一定の走行荷重が作用する場合を対象とした軌道系の定常応答解析手法を導出する。続いて、それを任意の変動荷重の場合に拡張する。

なお、Metrikine<sup>11)</sup>は、まくらぎ支持されたレールと剛基盤上の粘弾性層 (路盤) との連成系を対象に、一定荷重がレール上を走行する場合の定常応答を求めている。本研究においては、同様の手順により定式化を行うことで、任意の変動荷重に対しても容易に解法が構成できることを示す。

また、当該の定式過程は時間域 Fourier 変換に基づくものであるが、空間域に対し Floquet 変換を陽に適用した定式化によっても同一の結果を得ることができること

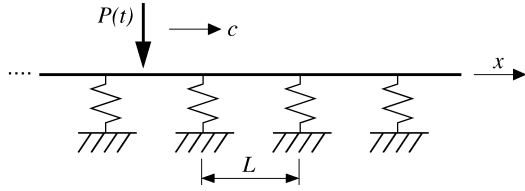


Fig. 1 Periodic structure subjected to a moving load

を示す. Floquet 解析に基づき走行荷重下の軌道応答解析法を構成した例はこれまでも報告されている<sup>12)</sup>. ここに示す解法は, FEM 等の離散化手法の援用により任意の周期構造に適用可能なものである.

最後に解析例を通し, ここに構成した手法の妥当性について検討する.

## 2. 解析手法の構成

### 2.1 対象とする定常問題

Fig.1 に示す様に,  $x$  軸方向に無限に伸びた周期構造に対して, 一定速度  $c$  で走行する荷重  $P(t)$  が作用する問題について考える. 荷重  $P(t)$  は, 一定走行速度  $c$  の下で構造物の周期長  $L$  に同調して定常変動しているものとする. 以上の条件の下, この系における次の運動方程式を考える.

$$\mathcal{L}(x)u(x,t) + \mathcal{M}(x)\ddot{u}(x,t) = P(t)\delta(x-ct) \quad (1)$$

ここで,  $u$  は変位,  $\mathcal{L}$  は静的つり合い式に関する微分作用素,  $\mathcal{M}$  は質量項に関する係数,  $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2$ ,  $\delta$  はデルタ関数である.

また, 走行荷重  $P(t)$  は上述の仮定により次の周期性を持つ.

$$P(t) = P(t + \frac{nL}{c}), \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

なお, 本論文では式(2)の様な通常の周期性を, 後述の第2種周期性と区別して第1種周期性と呼ぶ.

走行荷重下における定常状態を次式で定義する.

$$u(x,t) = u(x+nL, t + \frac{nL}{c}), \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

ここで,  $0 \leq \tilde{x} \leq L, 0 \leq \tilde{t} \leq L/c$  とすると, 任意の  $x$  と  $t$  は次式のように表すことができる.

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} + nL, \\ t &= \tilde{t} + \frac{mL}{c}, \quad (n, m \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (4)$$

すると  $u(x,t)$  は次のように書き表すことができる.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(\tilde{x}, \tilde{t} + \frac{(m-n)L}{c}), \\ &= u(\tilde{x} + (n-m)L, \tilde{t}) \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)は, 周期構造における当該定常応答が, 周期性を与えている長さ  $L$  の最小部分構造(ユニットセル)での全時刻歴, もしくは  $0 \leq \tilde{t} \leq L/c$  の有限時間内における無限領域全体の応答のいずれか一方によって表現可能であることを示唆している.

### 2.2 一定荷重に対する解析<sup>11)</sup>

まず, 定常解の時間  $t$  に関する Fourier 変換  $\hat{u}$  について考える. 式(3)より,  $\hat{u}$  は次の様に変形できる.

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x+nL, t + \frac{nL}{c})e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x+nL, \tau)e^{-i\omega(\tau - \frac{nL}{c})} d\tau \quad (6) \\ &= e^{i\frac{\omega}{c}nL} \int_{-\infty}^{\infty} u(x+nL, \tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= e^{i\frac{\omega}{c}nL} \hat{u}(x+nL, \omega) \end{aligned}$$

式(6)より,  $\hat{u}$  が  $x$  について次の空間周期性を有していることがわかる.

$$\hat{u}(x+nL, \omega) = e^{-i\frac{\omega}{c}nL} \hat{u}(x, \omega) \quad (7)$$

式(2)の第1種周期性に対し, 式(7)の関係を第2種周期性と呼ぶ<sup>8)</sup>.

次に, 運動方程式(1)の時間  $t$  に関する Fourier 変換を求めると次式を得る.

$$\mathcal{L}(x)\hat{u}(x,\omega) - \omega^2 \mathcal{M}(x)\hat{u}(x,\omega) = \frac{P}{c}e^{-i\frac{\omega}{c}x} \quad (8)$$

ただし, 走行荷重  $P$  は変動せず一定としている.

$-\infty < x < \infty$  における任意の  $x$  を  $x = \tilde{x} + nL$  と表すと, 式(7)より次式を得る.

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,\omega) &= \hat{u}(\tilde{x} + nL, \omega) \\ &= e^{-i\frac{\omega}{c}nL} \hat{u}(\tilde{x}, \omega) \end{aligned} \quad (9)$$

また, 式(8)右辺における指数関数部は次の様に変形できる.

$$e^{-i\frac{\omega}{c}x} = e^{-i\frac{\omega}{c}nL} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}\tilde{x}} \quad (10)$$

さらに, 当該構造の周期性より次式が成り立つ.

$$\mathcal{L}(\tilde{x} + nL) = \mathcal{L}(\tilde{x}), \quad \mathcal{M}(\tilde{x} + nL) = \mathcal{M}(\tilde{x}) \quad (11)$$

式(9)~(11)を(8)に代入して次式を得る.

$$\mathcal{L}(\tilde{x})\hat{u}(\tilde{x}, \omega) - \omega^2 \mathcal{M}(\tilde{x})\hat{u}(\tilde{x}, \omega) = \frac{P}{c}e^{-i\frac{\omega}{c}\tilde{x}} \quad (12)$$

式(12)は, 第2種周期条件  $\hat{u}(\tilde{x} + L, \omega) = e^{-i(\omega/c)L}\hat{u}(\tilde{x}, \omega)$  の下で, 1 ユニット内の解  $\hat{u}(\tilde{x}, \omega)$  がみたすべき方程式である. 各  $\omega$  に対して, 有限要素法などにより式(12)の解が得られたならば,  $u(x, \tilde{t})$  は次の逆 Fourier 変換により求めることができる.

$$\begin{aligned} u(x, \tilde{t}) &= u(\tilde{x} + nL, \tilde{t}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tilde{x} + nL, \omega)e^{i\omega\tilde{t}} d\omega \quad (13) \end{aligned}$$

$$(9) \rightarrow = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tilde{x}, \omega)e^{i\omega(\tilde{t} - \frac{nL}{c})} d\omega$$

$u(x, \tilde{t})$  が得られれば, 式(5)第2式より  $u(x, t)$  は評価可能となる.

## 2.3 変動荷重に対する解析

式(2)をみたす任意の変動荷重  $P(t)$  が一定速度で走行する場合を考える。この時も定常応答は式(3)をみたすので、式(7),(9)の関係が成り立つ。

一方、式(1)の右辺で与えられる変動走行荷重の Fourier 変換は次式のようになる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\delta(x-ct)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{c}P\left(\frac{x}{c}\right)e^{-i\frac{\omega}{c}x} \quad (14)$$

ここで、 $P(x/c)$  は走行荷重が  $x$  に位置した時刻における荷重値を意味する。このとき、 $x = \tilde{x} + nL$  と表すと、式(2)より次式が成り立つ。

$$P\left(\frac{x}{c}\right) = P\left(\frac{\tilde{x}}{c}\right) \quad (15)$$

以降 2.2 と同様の計算を経て、最終的に次式を得る。

$$\mathcal{L}(\tilde{x})\hat{u}(\tilde{x}, \omega) - \omega^2 \mathcal{M}(\tilde{x})\hat{u}(\tilde{x}, \omega) = \frac{1}{c}P\left(\frac{\tilde{x}}{c}\right)e^{-i\frac{\omega}{c}\tilde{x}} \quad (16)$$

一旦式(16)を解いて  $\hat{u}(\tilde{x}, \omega)$  が得られたならば、式(13)より  $u(x, \tilde{t})$  を構成することができる。

## 3. Floquet 変換を用いた定式化

2. では時間方向に Fourier 変換することにより求解のための方程式を導出した。ここでは、空間方向に変換手法を適用することによっても同一の方程式が誘導可能なことを示す。ただし、空間方向について対象構造が周期性を持つことから、Fourier 変換ではなく、Floquet 変換を用いる。

### 3.1 Floquet 変換の概要

Floquet 変換<sup>7),8)</sup>について、定義のみ以下に示す。

$x \in \mathbb{R}$  で定義された関数  $f(x)$  の Floquet 変換  $\tilde{f}$  を次式で定義する。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x} + nL)e^{in\kappa L} \quad (17)$$

ここで、 $\tilde{x}$  は前節での定義によるユニットセル内の座標であり、 $\kappa$  は  $-\pi/L \leq \kappa \leq \pi/L$  における実数値を取るものとする。なお、 $\kappa$  のことを Floquet 波数と呼ぶ。

$\tilde{f}$  は  $\tilde{x}, \kappa$  について、それぞれ次の第 2 種および第 1 種周期性を有する。

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x} + L, \kappa) &= e^{-i\kappa L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa), \\ \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa + \frac{2\pi}{L}) &= \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) \end{aligned} \quad (18)$$

また、 $\tilde{f}$  の逆 Floquet 変換は次式で与えられる。

$$f(\tilde{x} + nL) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) e^{-in\kappa L} d\kappa \quad (19)$$

## 3.2 Floquet 変換による解法

運動方程式(1)の Floquet 変換は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\tilde{x} + nL)u(\tilde{x} + nL, \tilde{t} + \frac{mL}{c})e^{in\kappa L} \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}(\tilde{x} + nL)\ddot{u}(\tilde{x} + nL, \tilde{t} + \frac{mL}{c})e^{in\kappa L} \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\tilde{t} + \frac{mL}{c})\delta(\tilde{x} + nL - c(\tilde{t} + \frac{mL}{c}))e^{in\kappa L} \end{aligned} \quad (20)$$

上式左辺は、式(5),(11)より次の様に変形できる。

$$\begin{aligned} (\text{左辺第 1 項}) &= \mathcal{L}(\tilde{x}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(\tilde{x} + (n-m)L, \tilde{t})e^{in\kappa L} \\ &= e^{im\kappa L} \mathcal{L}(\tilde{x})\tilde{u}(\tilde{x}, \kappa; \tilde{t}), \\ (\text{左辺第 2 項目}) &= e^{im\kappa L} \mathcal{M}(\tilde{x})\ddot{\tilde{u}}(\tilde{x}, \kappa; \tilde{t}) \end{aligned} \quad (21)$$

また、右辺の荷重に関する Floquet 変換も、式(2)より同様に变形できる。

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \\ P(\tilde{t} + \frac{mL}{c}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tilde{x} + (n-m)L - c\tilde{t})e^{in\kappa L} \end{aligned} \quad (22)$$

$$(2) \rightarrow P(\tilde{t})e^{im\kappa L} \delta(\tilde{x} - c\tilde{t})$$

さらに、式(22)の  $\delta(\tilde{x} - c\tilde{t})$  はデルタ関数の特徴により、 $\tilde{x} - c\tilde{t} = 0$  以外ではゼロとなる。したがって次式が成り立つ。

$$P(\tilde{t})\delta(\tilde{x} - c\tilde{t}) = P\left(\frac{\tilde{x}}{c}\right)\delta(\tilde{x} - c\tilde{t}) \quad (23)$$

式(21),(23)を(20)に用いると次式を得る。

$$\mathcal{L}(\tilde{x})\tilde{u}(\tilde{x}, \kappa; \tilde{t}) + \mathcal{M}(\tilde{x})\ddot{\tilde{u}}(\tilde{x}, \kappa; \tilde{t}) = P\left(\frac{\tilde{x}}{c}\right)\delta(\tilde{x} - c\tilde{t}) \quad (24)$$

$\tilde{u}$  は  $x$  に関する Floquet 変換であるから、 $\tilde{x}$  について第 2 種周期性を持つ。一方、時間  $\tilde{t}$  についても次式の様に第 2 種周期性をみたすことがわかる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{x}, \kappa; \tilde{t} + \frac{L}{c}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(\tilde{x} + nL, \tilde{t} + \frac{L}{c})e^{in\kappa L} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(\tilde{x} + (n-1)L, \tilde{t})e^{in\kappa L} \\ &= e^{i\kappa L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(\tilde{x} + nL, \tilde{t})e^{in\kappa L} \\ &= e^{i\kappa L} \tilde{u}(\tilde{x}, \kappa; \tilde{t}) \end{aligned} \quad (25)$$

そこで、式(25)をみたす様に  $\tilde{u}$  を次式により構成することとする。

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \kappa; \tilde{t}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{u}_m(\tilde{x}, \kappa) e^{i(\frac{2m\pi}{L} + \kappa)c\tilde{t}} \quad (26)$$

また、 $\delta(\tilde{x})$  を次の Fourier 級数により与える.

$$\delta(\tilde{x}) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2n\pi}{L}\tilde{x}} \quad (27)$$

すると、 $\delta(\tilde{x} - c\tilde{t})$  は次式で与えられる.

$$\delta(\tilde{x} - c\tilde{t}) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2n\pi}{L}(-\tilde{x}+c\tilde{t})} \quad (28)$$

ここで、 $\tilde{x} - c\tilde{t} \neq 0$  のとき  $\delta(\tilde{x} - c\tilde{t}) = 0$  であるから、次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{x} - c\tilde{t}) &= \delta(\tilde{x} - c\tilde{t})e^{-i\kappa(\tilde{x}-c\tilde{t})} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{2n\pi}{L}+\kappa)(-\tilde{x}+c\tilde{t})} \end{aligned} \quad (29)$$

式(26),(29) を(24) に代入すると、第  $n$  項について次式を得る.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{x})\bar{u}_n(\tilde{x}, \kappa) - c^2 \left(\frac{2n\pi}{L} + \kappa\right)^2 \mathcal{M}(\tilde{x})\bar{u}_n(\tilde{x}, \kappa) \\ = P\left(\frac{\tilde{x}}{c}\right) \frac{1}{L} e^{-i(\frac{2n\pi}{L}+\kappa)\tilde{x}} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 $k = \kappa + 2n\pi/L$ 、 $\bar{u}_n(\tilde{x}, \kappa) = \bar{u}(\tilde{x}, k)$  と表すと、式(30) は次式の様に書き改められる.

$$\mathcal{L}(\tilde{x})\bar{u}(\tilde{x}, \kappa) - (ck)^2 \mathcal{M}(\tilde{x})\bar{u}(\tilde{x}, \kappa) = \frac{1}{L} P\left(\frac{\tilde{x}}{c}\right) e^{-ik\tilde{x}} \quad (31)$$

また、式(26) より  $u$  は次の逆 Floquet 変換により与えられる.

$$\begin{aligned} u(\tilde{x} + nL, \tilde{t}) \\ = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{u}_m(\tilde{x}, \kappa) e^{i(\frac{2m\pi}{L}+\kappa)c\tilde{t} - in\kappa L} d\kappa \\ = \frac{L}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2m\pi}{L}}^{\frac{2(m+1)\pi}{L}} \bar{u}(\tilde{x}, k) e^{ik(c\tilde{t} - nL)} dk \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、 $ck = \omega$ 、 $\frac{L}{c}\bar{u}(\tilde{x}, k) = \hat{u}(\tilde{x}, \omega)$  とおくと、式(32) は次式の様に表すことができる.

$$u(\tilde{x} + nL, \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tilde{x}, \omega) e^{i\omega(\tilde{t} - \frac{nL}{c})} d\omega \quad (33)$$

式(33) は逆 Fourier 変換式(13) に一致する. また、式(30) より  $\hat{u}$  に関する方程式は式(16) に一致する.

以上より、空間方向に Floquet 変換する手順によっても、前節に示した時間方向に Fourier 変換する解法と、最終的に同一の求解過程に至ることがわかる.

## 4. 解析例

### 4.1 解析条件

Fig.1 に示した様に、剛な道床上にパッドを介して敷設された無限長レール (直結軌道) を対象とする. 支持間隔は  $L=0.6\text{m}$  とし、パッドのバネ定数  $k_r$  は  $110\text{MN/m}$  と設定した. 軌道系における減衰としては、パッドのそれ

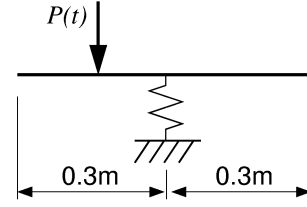


Fig. 2 Unit cell of railway track

Table 1 Parameters of rails

mass density ( $\text{kg/m}^3$ )	7880
Young's modulus (GPa)	206
Poisson's ratio	0.33
cross-sectional area ( $\text{m}^2$ )	$64.05 \times 10^{-4}$ (50N)
geometrical moment of inertia ( $\text{m}^4$ )	$77.5 \times 10^{-4}$ (60kg)
shear factor	$1960 \times 10^{-8}$ (50N)
	$3090 \times 10^{-8}$ (60kg)
	0.394 (50N)
	0.44 (60kg)

のみ考慮し、複素剛性により表現した. なお、以下の解析では複素剛性  $k_r(1+si)$  における係数を  $s=0.2^6$ ) と与えた.

解析における軌道系のユニットセルは Fig.2 に示すとおり、支持点を中央におく様に設定した. レールは Timoshenko ばりまたは Euler ばりのいずれかでモデル化し、1 ユニットの 12 要素で等分割した. なお、Timoshenko ばりの離散化には、たわみを 3 次 Hermite、断面回転角を 2 次の Lagrange 補間で近似する TIM7 要素<sup>13)</sup> を用いた. 一方、Euler ばりにおいては 3 次 Hermite 補間を用いた. また、逆 Fourier 変換の際は、積分域を  $|\omega| \leq 32\pi c/L$  の範囲で打ち切り計算した. 本解析では減衰を導入しているので、積分において特異性は存在しない. ただし、共振周波数近傍では被積分関数が急変動するので、IFFT の際に十分な分割数をとる必要がある. ここでは解の収束性を確認の上、上記区間を 4096 分割している.

### 4.2 一定荷重に対する定常応答

単位荷重 ( $P=1\text{N}$ ) に対する定常応答解析を行った. 荷重走行速度は  $c=6,30,100\text{m/s}$  の 3 ケースとした.  $c=6,30\text{m/s}$  においては 50N レールを想定したが、 $c=100\text{m/s}$  の場合は高速鉄道に対応する速度となるため、60kg レールとして設定した. 各レールにおける諸設定値を Table 1 に示す. 荷重作用位置におけるレールたわみを Fig.3 ~ 5 に示す. なお、図はレールを Timoshenko ばりによりモデル化した場合の結果である. 横軸は荷重作用位置を示しているが、中央部 (0.3m) が支持位置となっている. 図には比較のため、時間域積分表現<sup>14)</sup> により求めた応答も示した. こちらの解析では時間増分を  $10^{-4}\text{s}$  とし、有限範囲に支持点を 21 点 (12m 区間) 設け、十分定常状態に至った後の応答を抽出した.

今回の解析結果と時間域での結果を比較すると、走行

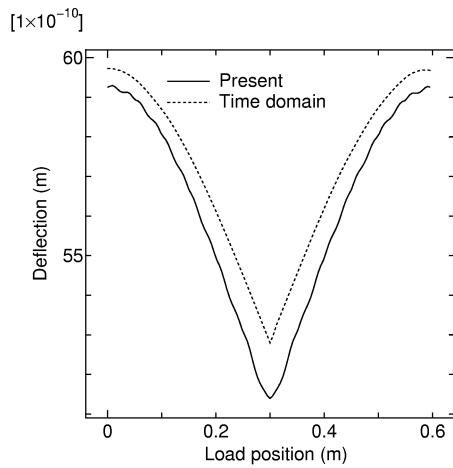


Fig. 3 Rail deflection at loading position ( $c=6\text{m/s}$ )

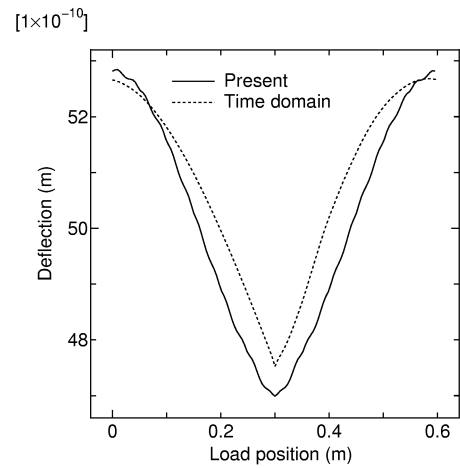


Fig. 5 Rail deflection at loading position ( $c=100\text{m/s}$ )

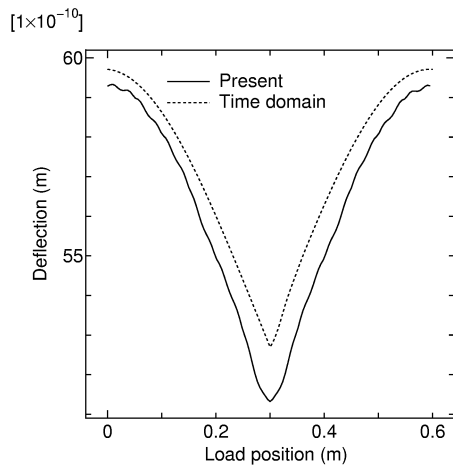


Fig. 4 Rail deflection at loading position ( $c=30\text{m/s}$ )

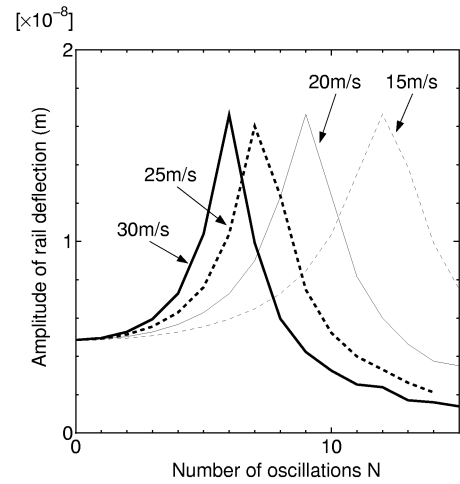


Fig. 6 Amplitude of rail deflection at midspan

速度によらず前者のたわみがわずかに小さ目になる結果となったが、両者は比較的良好な一致を示しており、本手法の妥当性が確認できる。

時間域の解析ではパッドの減衰をダッシュポットで与えているため、減衰特性が本解析とは完全に一致しない。両解析間で多少の差異が認められたのは、時間域の解析が有限域で打切っていることや、減衰の違いなどが原因しているものと考えられる。複素剛性の虚数部を振動数の線形関数により与えれば、時間域に一致した減衰を設定できる。しかし、過去に行った解析では、減衰をこのように設定した場合にむしろ不自然な結果を得た。原因は明らかではないが、そのためここでは複素剛性を振動数によらず一定として解析した。

なお、荷重作用位置のレールたわみが、支持点通過時に急変動している様子が確認できる。これは Timoshenko ばかりにおけるせん断たわみの影響によるものである。

#### 4.3 調和振動荷重に対する定常応答

単位振幅 (1N) の調和振動荷重が一定速度でレール上を走行することによる定常応答解析を行った。なお、以下

に示すとおり、対象とした応答の主要な周波数は 300Hz 前後と比較的低い。そのため、Euler ばかりによっても十分な精度で解析可能<sup>4)</sup>と判断し、ここでは Euler ばかりでレールをモデル化した。また、対象としたレールは 60kg レールである。走行速度は 15,20,25,30km/s の 4 ケース設定した。その下で、1 ユニット間を通過する間に整数回調和振動する様に荷重振動回数  $N$  を与えた。

荷重振動回数と支持点位置でのレールたわみ振幅の最大値との関係を Fig.6 に示す。  $c=30\text{m/s}$  で走行する場合、レールたわみの振動振幅は  $N=6$  において最大となっている。この走行速度で 1 ユニット間を荷重が通過するのに要する時間は 0.02s となる。この間に  $N=6$  回荷重が振動する場合の荷重振動数は 300Hz である。同様に計算すると、たわみ振幅が最大値を示す際の荷重振動数は、いずれのケースも約 300Hz となることがわかる。このことより、当該軌道の共振周波数が 300Hz 付近に存在していることが推測できる。

そこで、解析対象としている無限軌道系の分散曲線<sup>4)</sup>を求めてみた。結果を Fig.7 に示す。図より、分散曲線の

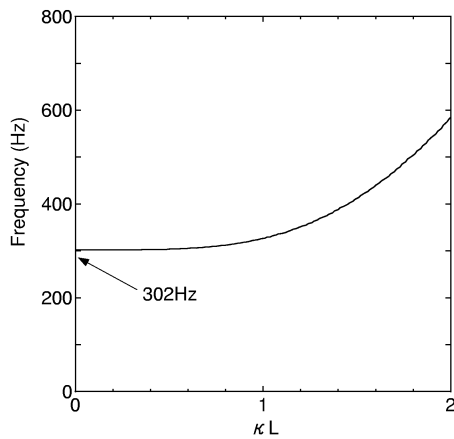


Fig. 7 Dispersion curve of the rail

下端周波数が 302Hz であることが確認できる。ちなみに当該モードは、レールがほとんどたわみ変形せず、主にパッドが伸縮する定在波により与えられる<sup>4)</sup>。走行荷重の共振周波数とこの下端モードの周波数とがほぼ一致していることより、ここで対象とした周波数の範囲内に関する限り、走行荷重下において上述の定在波が励起されていることがわかる。

## 5. おわりに

本研究では、離散支持された無限長レール上を荷重が走行する場合の、定常応答解析法を構成した。定式化に当り、時間方向の Fourier 変換を用いるものと、空間方向の Floquet 変換を用いるものとを導出し、最終的に両者が同一の方程式を与えることを示した。また、任意変動荷重に対する定常応答解析法も容易に構成可能なことを示した。

一定荷重が走行する場合の解を、時間域積分表現式による有限軌道モデルの応答結果と比較した。両者が概ね良好な一致を示すことから、本手法の妥当性を確認した。さらに、荷重が調和振動する場合の解析を行った。その結果、軌道系における分散曲線の下端周波数の下で、レール振動が増幅することを確認できた。

なお本解析では、荷重変動は任意であるものの、既知量に限定される。しかし、車輪との連成下においては、車

輪・レール間作用力も未知量となる。今後はここに構成した手法を、この様な連成系における定常解析に拡張して行きたい。

## 参考文献

- 1) Knothe, K.L. and Grassie, S.L. : Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle Sys. Dyn.*, **22**, 209-262, 1993.
- 2) Tassilly, E. : Propagation of bending waves in a periodic beam, *Int. J. Engng. Sci.*, **25**, 85-94, 1987.
- 3) Delph, T.J., Hermann, G. and Kaul, R.K. : Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body : Antiplane strain, *J. Appl. Mech.*, **45**, 343-349, 1978.
- 4) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛 : まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, **10**, 1029-1036, 2007.
- 5) 阿部和久, 佐成屋 淳, 紅露一寛 : 連続高架橋における波動伝播モードの解析, 鉄道力学論文集, **12**, 25-30, 2008.
- 6) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛 : まくらぎ支持された無限長レールの加振応答解析, 計算数理工学論文集, **7**(1), 25-30, 2007.
- 7) Clouteau, D., Elhabre, M.L. and Aubry, D. : Periodic BEM and FEM-BEM coupling, *Comput. Mech.*, **25**, 567-577, 2000.
- 8) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G. : Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *J. Sound Vib.*, **283**, 173-199, 2005.
- 9) 阿部和久, 古田 勝 : 時間域積分表現式による軌道振動解析法, 構造工学論文集, **43A**, 365-372, 1997.
- 10) 阿部和久, 紅露一寛 : 走行荷重を受ける Timoshenko ばりの静的基本解を用いた積分方程式解法, 構造工学論文集, **50A**, 143-150, 2004.
- 11) Metrikine, A.V. : The steady-state response of a periodically inhomogeneous model of a railway track to a moving load, *Envir. Vib.*, Takemiya(ed.), 103-113, 2005.
- 12) Mead, D.J. : A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; Applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates, *J. Sound Vib.*, **104**, 9-27, 1986.
- 13) Nickel, R.E. and Secor, G.A. : Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **5**, 243-253, 1972.
- 14) 阿部和久, 森岡泰助, 古田 勝 : Timoshenko ばりを用いた軌道振動系のモデル化, 構造工学論文集, **44A**, 367-374, 1998.