

## 2次元弾性波動問題における周期多重極境界積分方程式法について

## ON THE PERIODIC FAST MULTIPOLE METHOD IN ELASTODYNAMICS IN 2D

坂本和穂<sup>1)</sup>, 大谷佳広<sup>2)</sup>, 西村直志<sup>3)</sup>

Kazuho SAKAMOTO, Yoshihiro OTANI, Naoshi NISHIMURA

- 1) シュルンベルジェ (〒 229-0006 神奈川県相模原市淵野辺 2-2-1 E-mail: kazuho\_sakamoto@mbg.nifty.com)  
 2) 京都大学情報学研究所 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 E-mail: otani@mbox.kudpc.kyoto-u.ac.jp)  
 3) 京都大学情報学研究所 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

This paper investigates FMMs (fast multipole methods) for periodic boundary value problems of elastodynamics in 2D, extending our previous studies on periodic FMMs in Helmholtz' and Maxwell's equations. The proposed method is tested with some numerical experiments and the efficiency of the proposed method is confirmed. The performance of the proposed method near Wood's anomaly is also investigated.

**Key Words:** Elastodynamics, Fast Multipole Method, Periodic Boundary Value Problem, Wood's Anomaly

## 1. 序

境界積分方程式法は、偏微分方程式の有力な数値解法の1つであり、特に波動問題において有利である<sup>(1)</sup>。従来、計算量が大きいという欠点のため、大規模問題には不向きと考えられてきたが、種々の高速解法の発展によりこの問題も解決しつつある。特に高速多重極法<sup>(2, 3)</sup>は、従来の方法では要素数  $N$  に対して少なくとも  $O(N^2)$  の計算量を要していた行列・ベクトル積の計算を、 $O(N(\log N)^\alpha)$  ( $\alpha \geq 0$ ) で計算することを可能にした。

一方、最近 Helmholtz 方程式<sup>(4)</sup> や Maxwell 方程式<sup>(5)</sup> において周期構造の波動現象の解析に適した周期多重極法が開発された。電磁気学や光学においてはフォトニック結晶やグレーティングなど、周期構造の持つ特異な性質の利用が進んでおり、周期多重極法はこれらの問題の解法として有力である。弾性波動においてもフォノン結晶など、周期構造の波動特性を利用した研究が進められているが、Maxwell 方程式の場合と比較すると必ずしも周期構造の特性の研究が十分に進んでいるとは言えない現状である。例えば光学では Wood の anomaly<sup>(6)</sup> と呼ばれる現象が知られている。これは、散乱体に波を入射する際、入射角や波長のわずかな変化で場が劇的に変化する現象である。弾性波動においても類似の現象が起こることは知られているが<sup>(7)</sup>、Maxwell 方程式の場合に比べて、まだまだ研究の蓄積は多いとは言えない。このような状況である原因の一つとして、弾性波動の大規模周期境界値問題のよい数値計算法があまり研究されていないことを挙げる事ができる。本論文ではこのような現状を踏

まえて、周期構造の弾性波動問題の高速多重極法の基礎的研究を行うことを目的とする。

具体的には、2次元周波数域動弾性学の周期多重極法を開発し、その精度や特性を検討する。外部問題の境界積分方程式法の解の一意性を保証するために Burton-Miller の方法を用いる。数値計算例により、Wood の anomaly に対応して精度の低下が見られることがあるが、これらの anomaly の検出は可能であること、anomaly 以外では概して高精度であることなどが結論される。

## 2. 非周期境界値問題

本節では2次元非周期動弾性学の高速多重極法と、Burton-Miller 法について参照の便宜のために概説する。

## 2.1. 境界値問題

時間域の動弾性学の支配方程式は以下の Navier-Cauchy 方程式である。

$$(C_{ijst}u_{s,t})_{,i} = \rho\omega^2u_j \quad \text{in } D \quad (1)$$

ここに、 $C_{ijst}$  は弾性テンソルであり、

$$C_{ijst} = \lambda\delta_{ij}\delta_{st} + \mu(\delta_{is}\delta_{jt} + \delta_{it}\delta_{js}) \quad (2)$$

である。また、 $\rho$  は媒質の密度をあらわす。境界条件は

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \partial D_1 \quad \text{変位境界条件} \quad (3)$$

$$t_j = n_i C_{ijst} \partial_s u_t = \bar{t}_j \quad \text{on } \partial D_2 \quad \text{表面力境界条件} \quad (4)$$

である。ここに、 $\partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D$  である。

## 2.2. 境界積分方程式

外部問題の境界積分方程式は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_k(\mathbf{x}) &= u_k^I + \int_{\partial D} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) t_j(\mathbf{y}) ds_y \\ &\quad - \text{p.v.} \int_{\partial D} W_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_j(\mathbf{y}) ds_y \quad \text{on } \partial D \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 $U_{kj}$  は 2 次元周波数域動弾性学の基本解、 $W_{kj}$  は 2 重層核、 $t_i$  は表面力、 $u_k^I$  は入射波、p.v. は主値をあらわす。 $U_{kj}$ 、 $W_{kj}$  は

$$\begin{aligned} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= \frac{i}{4\mu} \left[ H_0^{(1)}(k_{Tr}r) \delta_{kj} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \left( H_0^{(1)}(k_{Tr}r) - H_0^{(1)}(k_L r) \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$W_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = n_j^i C_{ijst} \partial_s U_{kt}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \quad (7)$$

と書ける。ここに、 $H_0^{(1)}$  は 0 次の第 1 種 Hankel 関数、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ 、 $k_L, k_T$  は次式で定義される P 波、S 波の波数である。

$$k_L = \frac{w}{c_L} = w \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \quad k_T = \frac{w}{c_T} = w \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \quad (8)$$

### 2.3. Burton-Miller 法

式 (5) の解は、いわゆる見かけの固有振動数においては一意でなく<sup>(1)</sup> Burton-Miller の方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_k + \alpha t_k) &= \text{p.v.} \int_{\partial D} (U_{kj} + \alpha T_{ji} U_{ki}) t_j(\mathbf{y}) ds_y \\ &\quad - \text{p.f.} \int_{\partial D} (W_{kj} + \alpha T_{ji} W_{ki}) u_j(\mathbf{y}) ds_y \end{aligned} \quad (9)$$

を用いて一意性を確保するのが普通である。ここに、 $T_{ij} = C_{ipjq} n_p \partial_i$  であり、p.f. は発散積分の有限部分を表す。定数  $\alpha$  は  $\Im \alpha \neq 0$  を満たすようにとる。

### 2.4. 高速多重極法

以下では、参照の便宜のために、非周期問題における低周波高速多重極法に現れる諸公式を示す。

周波数域弾性学の高速多重極法は、Helmholtz 方程式の高速多重極法<sup>(2)</sup>を修正して得ることができる。実際、弾性学の基本解 (6) を次のように変形する<sup>(3)</sup>。

$$\begin{aligned} U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= \frac{i}{4\mu k_T^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} H_0^{(1)}(k_L r) \right. \\ &\quad \left. + e_{jip} \frac{\partial}{\partial x_p} e_{kq} \frac{\partial}{\partial y_q} H_0^{(1)}(k_T r) \right] \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  とする。上式に含まれる Hankel 関数に Graf の加法定理を用い、 $\partial D$  の部分集合  $S$  からの (5) への寄与を評価すると、次の局所展開を得る。

$$\begin{aligned} &\int_S U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) t_j(\mathbf{y}) ds_y - \int_S W_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_j(\mathbf{y}) ds_y \\ &= \frac{i}{4\mu k_T^2} \left[ \sum_n \frac{\partial}{\partial x_k} (-1)^n I^n(k_L, \vec{O}'x) L_{-n}^L(O') \right. \\ &\quad \left. + \sum_n e_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} (-1)^n I^n(k_T, \vec{O}'x) L_{-n}^T(O') \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

上式に現れる関数  $O^n$ 、 $I^n$  は、次式で定義される。

$$O^n(k, \vec{Ox}) = i^n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad I^n(k, \vec{Ox}) = (-i)^n J_n(kr) e^{in\theta}.$$

ここに  $(r, \theta)$  は  $\vec{Ox}$  の極座標、 $H_n^{(1)}$  は  $n$  次の第 1 種 Hankel 関数、 $J_n$  は Bessel 関数である。また、係数  $L_n^{L,T}(O')$  は局所展開係数と呼ばれ、後述の多重極モーメントを用いて次式で得られる。(M2L 公式)

$$L_n^{L,T}(O') = \sum_m O^{n-m}(k_{L,T}, \vec{OO}') M_m^{L,T}(O). \quad (11)$$

点  $O, O'$  は、点  $x$  と、面  $\partial D$  の部分集合  $S$  上の点  $y$  に対して

$$|\vec{Oy}| < |\vec{Ox}| \quad |\vec{O'y}| < |\vec{OO'}|$$

が満たされるように選ぶ。さらに、多重極モーメント  $M_m^L(O)$ 、 $M_m^T(O)$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} M_m^L(O) &= \int_S \frac{\partial}{\partial y_j} I^m(k_L, \vec{Oy}) t_j ds_y \\ &\quad - \int_S (\lambda n_j \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} + 2\mu n_i \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j}) I^m(k_L, \vec{Oy}) u_j ds_y \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M_m^T(O) &= \int_S e_{ji} \frac{\partial}{\partial y_i} I^m(k_T, \vec{Oy}) t_j ds_y \\ &\quad - \int_S \mu n_i (\frac{\partial}{\partial y_i} e_{jl} \frac{\partial}{\partial y_l} + \frac{\partial}{\partial y_j} e_{il} \frac{\partial}{\partial y_l}) I^m(k_T, \vec{Oy}) u_j ds_y \end{aligned} \quad (13)$$

M2M および L2L 公式は以下の通りである。

$$M_m^{L,T}(O_2) = \sum_m I^{m-\gamma}(k_{L,T}, \vec{O_2O_1}) M_\gamma^{L,T}(O_1) \quad (14)$$

$$L_n^{L,T}(O_2) = \sum_m I^{n-\gamma}(k_{L,T}, \vec{O_2O_1}) L_\gamma^{L,T}(O_1) \quad (15)$$

なお、Burton-Miller の方法を用いる場合は、局所展開として式 (10) に  $\alpha T_{kl}$  を作用させたものに加える。

## 3. 周期境界値問題

### 3.1. 境界値問題

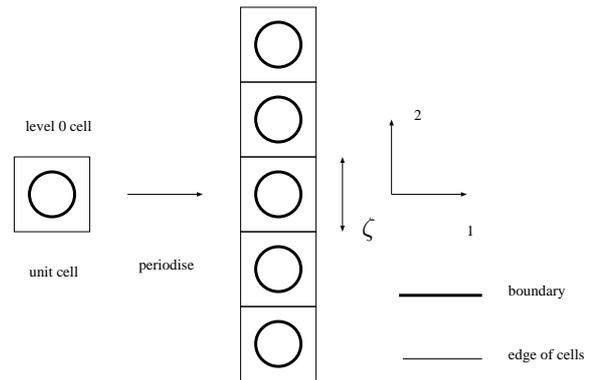


Fig. 1 One-periodic boundary value problem in 2D

Fig. 1 のように、2 次元  $(x_1, x_2)$  平面の  $x_2$  方向に周期的な領域を考える。ここに、 $\zeta$  は  $x_2$  方向の周期であり、入射波としては、伝播方向が  $\mathbf{v}$  である平面波を考える：

$$\mathbf{v} = (\cos \bar{v}, \sin \bar{v}) \quad (16)$$

ここに、 $\bar{\nu}$  は入射角である。今、

$$k_{L,T}\zeta \neq 2n\pi \pm \beta, \quad \beta = k^I \zeta \sin \bar{\nu} \quad (17)$$

であるとする。ここに、 $k^I$  は入射波の波数である。この時、動弾性学の周期境界値問題は、Navier-Cauchy の式を次の周期境界条件の下で解くものである：

$$u_j(x_1, \frac{\zeta}{2}) = e^{i\beta} u_j(x_1, -\frac{\zeta}{2}) \quad (18)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_2}(x_1, \frac{\zeta}{2}) = e^{i\beta} \frac{\partial u_j}{\partial x_2}(x_1, -\frac{\zeta}{2}) \quad (19)$$

加えて、散乱場  $u_j - u_j^I$  には無限遠での放射条件を要求する。

以下では  $\zeta$  を長さの単位に取ることにし、 $\zeta = 1$  とする。

### 3.2. 境界積分方程式

周期境界値問題において解くべき積分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_k(\mathbf{x}) &= u_k^I + \int_{\partial D} U_{kj}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) t_j(\mathbf{y}) ds_y \\ &- \text{p.v.} \int_{\partial D} W_{kj}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_j(\mathbf{y}) ds_y \quad \text{on } \partial D \end{aligned} \quad (20)$$

ここに  $U_{ij}^p$  は周期境界条件を満たす Green 関数  $U_{kj}^p$  であり、以下のように書ける。

$$U_{kj}^p(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_{kj}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - l\mathbf{e}_2) e^{i\beta l}$$

ここに  $\mathbf{e}_2$  は  $x_2$  方向の単位ベクトルである。

### 3.3. 周期多重極法

Navier-Cauchy 方程式の周期多重極法は、Helmholtz 方程式の場合と共通点が多く、Helmholtz 方程式の周期多重極法については Otani ら<sup>(4)</sup> に詳しい。本論文では主要な結果を列挙するに留める。

まず、周期境界値問題の Green 関数の形より、周期境界値問題をユニットセルのレプリカ (レプリカセル) が無限に繰り返された問題ととらえる。さらに Green 関数を次のように分解する。

$$U_{kj}^p(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = U_{kj}^N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathcal{U}_{kj}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (21)$$

$$U_{kj}^N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{l=-1}^1 U_{kj}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - l\mathbf{e}_2) e^{i\beta l} \quad (22)$$

$$\mathcal{U}_{kj}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \left( \sum_{l=-\infty}^{-2} + \sum_{l=2}^{\infty} \right) U_{kj}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - l\mathbf{e}_2) e^{i\beta l} \quad (23)$$

式 (22) は隣のレプリカセルの影響を、式 (23) は遠くのレプリカセルの影響を表現することになる。

式 (23) の各項に Graf の加法定理を用いると、式 (20) の積分のうち、 $\mathcal{U}_{kj}$  の影響は次のように局所展開できる。

$$\begin{aligned} &\int_S \mathcal{U}_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) t_j(\mathbf{y}) ds_y - \int_S \mathcal{W}_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_j(\mathbf{y}) ds_y \\ &= \frac{i}{4\mu k_T^2} \left[ \sum_n \frac{\partial}{\partial x_k} (-1)^n I^n(k_L, \vec{O}'x) \mathcal{L}_{-n}^L(O') \right. \\ &\quad \left. + \sum_n e_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} (-1)^n I^n(k_T, \vec{O}'x) \mathcal{L}_{-n}^T(O') \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

ここに、 $\mathcal{W}_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = n_i^y C_{ijst} \partial_s \mathcal{U}_{kt}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  であり

$$\mathcal{L}_n^{L,T}(O) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}^{n-m}(k_{L,T}) M_m^{L,T}(O) \quad (25)$$

$$\mathcal{O}^n(k_{L,T}) = \left( \sum_{l=-\infty}^{-2} + \sum_{l=2}^{\infty} \right) e^{i\beta l} \mathcal{O}^n(k_{L,T}, -l\mathbf{e}_2) \quad (26)$$

となる。 $M_n^{L,T}$  は多重極モーメント (式 (12),(13)) をレベル 0 のセルにおいて求めたものであるから、格子和  $\mathcal{O}^n(k_{L,T})$  を事前に計算しておけば通常の方法のアルゴリズムに似た形で周期多重極法のアルゴリズムを構成することが出来る。

この格子和を求めるために、式 (26) をそのまま用いたのでは収束が非常に遅い。そこで、(26) を (27) の積分表示に変換して、積分経路を  $e^{-aq}$  の最急降下 path

$$\xi = \pm \sqrt{t^2 - 2ik_{L,T}t} \quad (t > 0)$$

に変形した上で数値積分で求める：

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^n(k_{L,T}) &= \left( \sum_{l=-a+1}^{-2} + \sum_{l=2}^{a-1} \right) e^{i\beta l} \mathcal{O}^n(k_{L,T}, -l\mathbf{e}_2) + \frac{1}{\pi i k_{L,T}^n} \\ &\times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\beta - aq} (\xi - q)^n}{q(1 - e^{-i\beta - q})} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\beta - aq} (\xi + q)^n}{q(1 - e^{i\beta - q})} d\xi \right] \end{aligned} \quad (27)$$

ここに  $a$  は 2 以上の整数であり、 $q = \sqrt{\xi^2 - k_{L,T}^2}$  である。

### 3.4. 遠方場

波動の散乱問題では、工学的応用上は散乱体の遠方での挙動を知りたいことが多い。Green 関数の無限遠での漸近挙動を考慮すると、散乱体の遠方で、場は平面波の有限個の重ね合わせで近似できると考えられる。本節では遠方場を構成する平面波の振幅とエネルギー保存則を導出する。

#### 3.4.1. 遠方場の振幅

$x_1 \rightarrow \pm\infty$  の遠方場をそれぞれ  $\mathbf{u}^{\pm}$  と置けば、

$$\mathbf{u}^{(+)} = \sum_n A_n^{(L+)} \mathbf{p}_n^{(L+)} + \sum_n A_n^{(T+)} \mathbf{p}_n^{(T+)} \quad (28)$$

$$\mathbf{u}^{(-)} = \mathbf{u}^I + \sum_n A_n^{(L-)} \mathbf{p}_n^{(L-)} + \sum_n A_n^{(T-)} \mathbf{p}_n^{(T-)} \quad (29)$$

と書ける。 $\mathbf{p}_n^{(L\pm)}, \mathbf{p}_n^{(T\pm)}$  はそれぞれ  $x_1$  が正、負の向きに進む絶対値 1 の平面 P 波と S 波であり (復号同順) 次のように書ける。

$$\mathbf{p}_n^{(L\pm)} = \mathbf{a}_n^{(L\pm)} e^{i\mathbf{k}_n^{(L\pm)} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{p}_n^{(T\pm)} = \mathbf{a}_n^{(T\pm)} e^{i\mathbf{k}_n^{(T\pm)} \cdot \mathbf{x}},$$

$$\mathbf{k}_n^{(L,T\pm)} = k_{L,T} \begin{pmatrix} \pm \cos \theta_n^{(L,T)} \\ \sin \theta_n^{(L,T)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_n^{(L\pm)} = \begin{pmatrix} \pm \cos \theta_n^{(L)} \\ \sin \theta_n^{(L)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_n^{(T\pm)} = \begin{pmatrix} \sin \theta_n^{(T)} \\ \mp \cos \theta_n^{(T)} \end{pmatrix}$$

ここに、 $\theta_n^{(L,T)}$  は、周期境界条件をみたす平面波の伝播方向

$$\theta_n^{(L,T)} = \arcsin \frac{\beta + 2\pi n}{k_{L,T}} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (30)$$

である。式 (28), (29) の  $\sum_n A_n^{(L\pm)} \mathbf{p}_n^{(L\pm)}$  は  $-1 < \frac{\beta + 2\pi n}{k_L} < 1$  をみたす  $n$  について、 $\sum_n A_n^{(T\pm)} \mathbf{p}_n^{(T\pm)}$  は  $-1 < \frac{\beta + 2\pi n}{k_T} < 1$  をみたす  $n$  について和をとる。



長あたり 20 個の一定要素で離散化している．線形方程式の反復解法は GMRES(300)，収束判定は  $10^{-5}$ ，前処理は使用していない．

Fig. 4 には  $0^\circ \leq \bar{v} < 90^\circ$  の入射角に対して， $\epsilon_u, \epsilon_t, \gamma$  をプロットした．ここに誤差  $\epsilon_u$  は以下の様に定義された  $u$  の誤

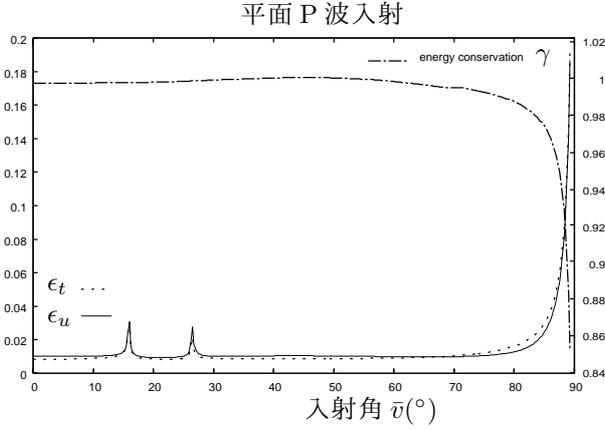


Fig. 4  $\epsilon_u, \epsilon_t, \gamma$  vs incident angle

差であり， $\epsilon_t$  は同様に定義された  $t$  の誤差である：

$$\epsilon_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 |u_{ij}^{\text{ref}} - u_{ij}^{\text{FMM}}|^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 |u_{ij}^{\text{ref}}|^2}}$$

上式で， $i$  番目の要素における解析解の変位の第  $j$  成分を  $u_{ij}^{\text{ref}}$ ，Periodic FMM でえられた解の変位の第  $j$  成分を  $u_{ij}^{\text{FMM}}$  とおいた． $N$  は全要素数である．

これより次のことが分かる．

- Table 1 に示した Rayleigh の anomaly に相当する入射角 ( $k_{L,T} = 2n\pi \pm \beta$  となる) の周辺では精度が悪化している．ただし grazing incidence の場合を除いてエネルギー保存則の乱れは見られない．
- それ以外では  $\epsilon_{u,t} \sim 0.01$  程度の誤差で解が得られている．

以上より，提案する解法は，弾性体の周期問題において有効な解法であると言える．ただし Rayleigh の anomaly 付近では精度がやや悪化する可能性がある．

Table 1 Incident angles which satisfy  $k_{L,T} = 2n\pi \pm \beta$  ( $\lambda = \mu = \rho = 1.000, \omega = 15.000$ , Incident plane P wave)

条件	入射角	条件	入射角
$k_L = 4\pi - \beta$	$\bar{v} \approx 26.810^\circ$	$k_T = 6\pi - \beta$	$\bar{v} \approx 26.392^\circ$
$k_L = 2\pi + \beta$	$\bar{v} \approx 15.931^\circ$	$k_T = 4\pi + \beta$	$\bar{v} \approx 16.321^\circ$
$k_L = \beta$	$\bar{v} \approx 90.000^\circ$		

## 4.2. 円孔

次に，Fig. 3 の弾性体で介在物の剛性が 0 のとき，すなわち空洞の場合を考える．入射波は平面 P 波とした．適当な無次元化の後，周辺の弾性体の Lamé 定数  $\lambda, \mu$  はそれぞれ  $\lambda = 1, \mu = 1$ ，周波数  $\omega$  は 13，密度  $\rho$  は 1 とした．積分方程式には，結合定数  $\alpha = \frac{i}{k_T \mu}$  として Burton-Miller 法を用いている．せん断波の 1 波長あたり 40 個の一定要素で離散化し，線形方程式の反復解法は GMRES(300)，収束判定は  $10^{-5}$ ，前処理は使用していない．

$0^\circ < \bar{v} < 90^\circ$  のときのエネルギー透過率  $\tau$ ，およびエネルギー保存則の乱れをあらわす  $\gamma$  は Fig. 5 のようになった． $5.8^\circ$  付近でエネルギー透過率が鋭いピークを示している．

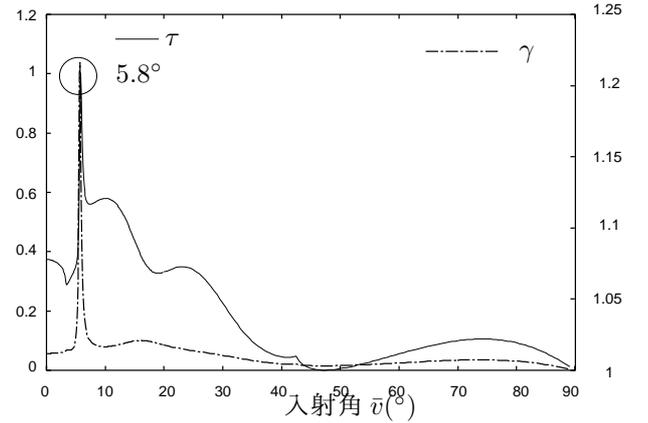


Fig. 5 Energy transmittance of circular holes  $\tau$  and the parameter of failure of the energy conservation law  $\gamma$

方，Rayleigh の anomaly に対応する入射角を Table 2 に示した．

Table 2 Incident angles corresponding to Rayleigh's anomalies for circular holes

条件	入射角	条件	入射角
$k_L = 4\pi - \beta$	$\bar{v} \approx 42.398^\circ$	$k_T = 6\pi - \beta$	$\bar{v} \approx 51.202^\circ$
$k_L = 2\pi + \beta$	$\bar{v} \approx 9.373^\circ$	$k_T = 4\pi + \beta$	$\bar{v} \approx 3.312^\circ$
$k_L = \beta$	$\bar{v} \approx 90.000^\circ$	$k_T = 2\pi + \beta$	$\bar{v} \approx 63.497^\circ$

これらのいくつかは Fig. 5 において  $\tau$  の曲線の勾配の変化点として認識されるが， $5.8^\circ$  は Rayleigh の anomaly ではない．また，同図から，この角度の周辺でエネルギー保存則の乱れが大きくなっていることが読み取れる．さらには Fig. 6 に示した GMRES の反復回数も  $5.8^\circ$  において急増している．

これらの特徴は Maxwell 方程式の周期多重極法の resonance anomaly における挙動とよく似ており<sup>(6)</sup>，格子に伴う何らかの波動と関連しているものと考えられる．このことを検証するために，透過率のピークである  $5.8^\circ$  と，ピークを少し外した  $5.3^\circ$  の場合のエネルギー流束を Fig. 7 に示した．同図より  $5.8^\circ$  の場合は  $5.3^\circ$  の場合に比較してエネルギー流

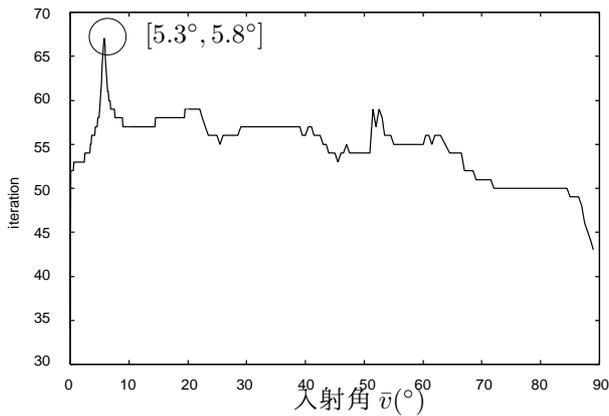


Fig. 6 Number of iterations for circular holes vs incident angle  $\bar{\nu}$

束が著しく大きくなっており、何らかのモードが発生していることが理解される。

これらの anomaly は見かけの固有値とは異なり、実現象である。このため、Maxwell 方程式の場合、精度の悪化への対策としてメッシュを細かくする等の方法が試みられている(6)。しかし、そのような方法が機能するためには anomaly の検出法を確立する必要がある。特に、resonance anomaly の検出は、Rayleigh の anomaly とは異なって、事前には発生位置が分からないので注意が必要である。しかし本節で得られた数値結果によれば、動弾性学においても、エネルギー保存則や、線形方程式の求解における反復回数から resonance anomaly の事後検出を行うことが可能であることが分かる。

## 5. 結論

本論文では 2 次元周波数域動弾性学における周期多重極境界要素法を定式化し、その数値的特性を検討した。その結果、実用上十分な精度で計算を行うことができることを確認した。ただし、光学でよく知られる Wood の anomaly が動弾性学でも発生し、対応する入射角においては解の精度がやや劣化することが分かった。しかし、Rayleigh の anomaly は元より、resonance anomaly についてもエネルギー保存則の満足度や、反復法の収束回数などに注目することによって検出可能であることが分かった。今後、より規模の大きな問題や、三次元問題、フォノン結晶への応用等に適用範囲を拡大して行く予定である。

## 参考文献

(1) 小林昭一編著. 波動解析と境界要素法 初版第一刷 京都大学学術出版会 2000.

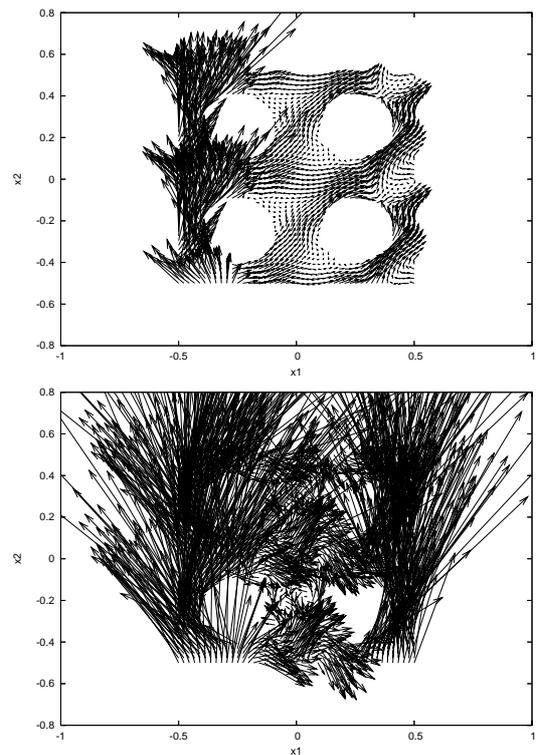


Fig. 7 Energy flux  $\langle E_i \rangle$ .  $\bar{\nu} = 5.3^\circ$  (upper),  $\bar{\nu} = 5.8^\circ$  (lower)

- (2) Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *Journal of Computational Physics* 1990; **86**:414-439.
- (3) Nishimura N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews* 2002; **55**:299-324.
- (4) Otani Y, Nishimura N. An FMM for periodic boundary value problems for cracks for Helmholtz' equation in two dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2007; **74**:381-406.
- (5) Otani Y, Nishimura N. A periodic FMM for Maxwell's equations in 3D and its applications to problems related to photonic crystals. *Journal of Computational Physics* 2008; **227**: 4630-4652.
- (6) 大谷佳広, 西村直志. Wood の異常回折周辺における周期高速多重極境界要素法の挙動について. 計算数理工学論文集, 2008; **7-2**:303-308.
- (7) Maslov K, Kinra VK, Henderson BK. Elastodynamic response of a coplanar periodic layer of elastic spherical inclusions. *Mechanics of Materials* 2000; **32**: 785-795.