

連立 Poisson 方程式の基本解を用いた境界要素法と 基本解への代表寸法の導入

BEM BASED ON SIMULTANEOUS POISSON'S EQUATION AND INTRODUCTION OF REPRESENTATIVE LENGTH TO FUNDAMENTAL SOLUTIONS

内藤 孝広¹⁾, 高橋 徹²⁾, 谷口 智³⁾, 松本 敏郎⁴⁾

Takahiro NAITO, Toru TAKAHASHI, Satoshi TANIGUCHI, Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学工学研究科機械理工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t_naito@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 2) 名古屋大学工学研究科機械理工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 3) 名古屋大学工学研究科機械理工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: s_taniguchi@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 4) 名古屋大学工学研究科機械理工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

A boundary element method based on a set of simultaneous Poisson's equation is presented. The source term of the original Poisson's equation is approximated with a simultaneous Poisson's equations. The fundamental solutions for the set of Poisson's equations are presented to formulate a boundary integral equation for solving the original Poisson's equation. A representative length parameter is introduced in the derived fundamental solution to improve the convergence property of the iterative solution. The effectiveness of the present approach is demonstrated through several numerical examples for Poisson's equation with source distributions.

Key Words: Boundary Element Method, Simultaneous Poisson's Equations, Iterative Solver, Fundamental Solution, Preconditioning

1. 緒言

熱伝導率に温度依存性があるような熱伝導問題では, 熱伝導率が場所に依存するような非均質材料パラメータを有することになる⁽¹⁾⁽²⁾. このような問題においても, 非均質性に由来する項をソース項とみなせば, ポアソン方程式に対する境界要素法により取り扱うことが可能となる. その際, ソース項に由来する領域積分項が生じる⁽³⁾が, 二重相反法(DRM)⁽⁴⁾や多重相反法(MRM)⁽⁵⁾を適用すれば境界積分のみで定式化することが可能となる.

二重相反法は, ソース項を RBF (radial basis function) などの基底関数の線形結合として近似し, これら基底関数をソース項とする支配微分方程式の特解を用い, 部分積分を2階繰り返すことにより領域積分を境界積分に変換する. これに対して, 多重相反法では基本解をソース項としたときの支配微分方程式の特解を用いて, 領域積分が無視できるまで部分積分を繰り返す方法である. 二重相反法では, (i) 基底関数の特解を求める必要がある, (ii) ソース項を近似するための係数を, あらかじめ連立方程式を解いて求めなければならない

ず, 大規模な領域に対して適用しにくい. また多重相反法では, (iii) 基本解をソース項とする Poisson 方程式の特解を求める必要があり, 領域積分項を無視できるまでに必要な境界積分が何段階必要かが明確でなく, 境界積分の数が多くなってしまう. 多重相反法に対しては, 落合⁽⁶⁾⁽⁷⁾は, 適用を三段階で打ち切り, その代わり領域内部に選点を設けて選点でソース項の値が既知の値と等しくなるようにする方法を提案している. この方法を用いれば境界上と内部選点でソースの値を満足するように解を用いることができる.

本研究では Poisson 方程式のソース項を連立 Poisson 方程式で近似することで表現し, 連立 Poisson 方程式の基本解を用いた境界積分方程式として, 従来の多重相反法を定式化する. 実際の解析には落合の方法により, 3段階または4段階で解析する方法を用い, 連立方程式の解法には反復法を用いることにする. ここで, 多重相反法で用いる基本解は多重調和関数となり, 落合の方法を用いるときは, 内部選点のソースの値を合わせる一連の式において, 連立方程式の係数マトリックスの対角成分が0となる. 本研究では, これを回避するために基本解の中に代表寸法を含める方法を提案し, 数値解析を行い, 数値解析例により本手法の効果を確認する.

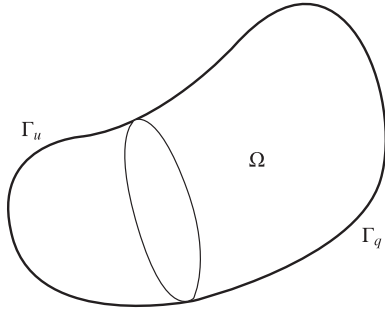


Fig.1 Domain

2. 連立 Poisson 方程式による積分方程式の定式化

2.1. 積分方程式と基本解

Fig.1 のような境界 Γ をもつ 3 次元の領域 Ω 内において、Poisson 方程式

$$\nabla^2 u_1(x) + u_2(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

を満足し、境界条件

$$u_1(x) = \bar{u}_1(x), \quad x \in \Gamma_u \quad (2)$$

$$q_1(x) = \frac{\partial u_1(x)}{\partial n} = \bar{q}_1(x), \quad x \in \Gamma_q \quad (3)$$

を満たすようなポテンシャル $u_1(x)$ を求める問題を考える。境界 Γ_u, Γ_q は Fig.1 に示すように、それぞれ境界 Γ の一部であり、 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ である。また、 $\partial u_1(x)/\partial n$ は $u_1(x)$ の外向き法線方向への勾配を表す。また、 \bar{u} および \bar{q} はそれぞれ指定された境界においてその値が与えられているものとする。 $u_2(x)$ は既知関数であり、領域 Ω 内および境界 Γ 上で次のように既知量が与えられているものとする。

$$u_2(x) = \bar{u}_2(x), \quad x \in \Omega, \Gamma \quad (4)$$

式 (1) に対して境界積分方程式を導出するためには Laplace 方程式の基本解 $u_1^*(x, y)$ を用いる。Poisson 方程式 (1) に対して、重み関数に $u_1^*(x, y)$ を用いた次の重み付残差式を考える。

$$\int_{\Omega} u_1^*(x, y) \{ \nabla^2 u_1(x) + u_2(x) \} d\Omega(x) = 0 \quad (5)$$

式 (5) について部分積分を繰り返すことにより、次式を得る。

$$c(y)u_1(y) = \int_{\Gamma} u_1^*(x, y)q_1(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \bar{q}_1^*(x, y)u_1(x) d\Gamma(x) - \int_{\Omega} u_1^*(x, y)u_2(x) d\Omega(x) \quad (6)$$

$c(y)$ は y が置かれている境界のなす角度 (3 次元の場合は立体角) によって決まる定数である。

式 (6) を見ると、右辺第 3 項にソース項 $u_2(x)$ に由来する領域 Ω に関する積分項が存在していることがわかる。この領域積分項を境界積分に変換するために、次のようにソース

項を一連の Poisson 方程式で近似する。

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1(x) + u_2(x) = 0 \\ \nabla^2 u_2(x) + u_3(x) = 0 \\ \nabla^2 u_3(x) + u_4(x) = 0 \\ \vdots \\ \nabla^2 u_N(x) + u_{N+1}(x) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式 (7) では、 N 段の Poisson 方程式で近似していることになる。ここで $l = 3, 4, 5, \dots, N$ について、 $u_l(x)$ は $\nabla^2 u_{l-1}(x)$ 、すなわち $u_{l-1}(x)$ の曲率であり、境界上で既知であるものとする。

$$u_l(x) = -\nabla^2 u_{l-1}(x) = \bar{u}_l(x) \quad x \in \Gamma \quad (8)$$

$\bar{u}_l(x)$ は、内点の u_2 を与えることにより 0 とみなすことができる⁽⁶⁾。

式 (1) の場合と同様にして、連立の Poisson 方程式 (7) に対する境界積分方程式は、重み関数に $u_{im}^*(x, y)$ ($m = 1, 2, 3, \dots, N$) を用いた次の重み付残差式を出発点として、導出することができる。

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N u_{im}^*(x, y) \{ \nabla^2 u_i(x) + u_{i+1}(x) \} d\Omega(x) = 0 \quad (9)$$

式 (9) の部分積分を繰り返すことにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Gamma} u_{im}^*(x, y)q_i(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \bar{q}_{im}^*(x, y)u_i(x) d\Gamma(x) \right\} \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla^2 u_{im}^*(x, y)u_i(x) d\Omega(x) \\ & + \sum_{i=2}^N \int_{\Omega} \{ \nabla^2 u_{im}^*(x, y) + u_{i-1m}^*(x, y) \} u_i(x) d\Omega(x) \\ & + \int_{\Omega} u_{Nm}^*(x, y)u_{N+1}(x) d\Omega(x) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$u_{im}^*(x, y)$ として次式を満足するもの考える。

$$[L][u^*] + I\delta(x - y) = \begin{bmatrix} \nabla^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \nabla^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \nabla^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \nabla^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* & \cdots & u_{1N}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* & \cdots & u_{2N}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* & \cdots & u_{3N}^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ u_{N1}^* & u_{N2}^* & u_{N3}^* & \cdots & u_{NN}^* \end{bmatrix} + I\delta(x - y) = 0 \quad (11)$$

ここで、 $[u^*] = u_{im}^*(x, y)$ 、 I は単位行列、 $\delta(x - y)$ は Dirac のデルタ関数である。以下、 u_{im}^* は連立 Poisson 方程式の基本解である。

式 (11) の Dirac のデルタ関数の性質より、式 (10) の左辺第 2 項と第 3 項は次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla^2 u_{im}^*(x, y)u_i(x) d\Omega(x) \\ & + \sum_{i=2}^N \int_{\Omega} \{ \nabla^2 u_{im}^*(x, y) + u_{i-1m}^*(x, y)(x) \} u_i(x) d\Omega(x) \\ & = -u_m(y) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで領域 Ω 内部に K 個の選点 z^k , ($k = 1, \dots, K$) を置き, $u_{N+1}(x)$ を選点における Dirac のデルタ関数の線形結合として, 次のように近似する.

$$u_{N+1}(x) = \sum_{k=1}^K \alpha^k \delta(x - z^k) \quad (13)$$

ここで, α^k , ($k = 1, \dots, K$) は境界の u や q の未知量とともに求めるべき未知係数である.

式 (13) を式 (10) の左辺第 4 項に代入すると, 次式が得られる.

$$\int_{\Omega} u_{Nm}^* u_{N+1}(x) d\Omega(x) = \sum_{k=1}^K \alpha^k u_{Nm}^*(z^k, y) \quad (14)$$

以上より, 式 (12) と (14) を式 (10) に代入すると, 連立 Poisson 方程式 (7) に対する次の境界積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & c(y)u_m(y) \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Gamma} u_{im}^*(x, y) q_i(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} q_{im}^*(x, y) u_i(x) d\Gamma(x) \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^K \alpha^k u_{Nm}^*(z^k, y) \end{aligned} \quad (15)$$

基本解 u_{im}^* は, 次式により得られる⁽³⁾.

$$[u^*] = [L]^c \phi(x, y) \quad (16)$$

ただし, $[L]^c$ は $[L]$ の余因子, $\phi(x, y)$ は $[L]$ の行列式を微分作用素とする次の微分方程式の基本解である.

$$\det[L]\phi(x, y) + \delta(x - y) = 0 \quad (17)$$

たとえば, $N = 4$ に対しては, $\det[L]$, $[L]^c$ と $[u^*]$ はそれぞれ以下ようになる.

$$\det[L] = \nabla^8 \quad (18)$$

$$[L]^c = \begin{bmatrix} \nabla^6 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla^4 & \nabla^6 & 0 & 0 \\ \nabla^2 & -\nabla^4 & \nabla^6 & 0 \\ -1 & \nabla^2 & -\nabla^4 & \nabla^6 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[u^*] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-r}{8\pi} & \frac{1}{4\pi r} & 0 & 0 \\ \frac{r^3}{96\pi} & \frac{-r}{8\pi} & \frac{1}{4\pi r} & 0 \\ \frac{-r^5}{288\pi} & \frac{r^3}{96\pi} & \frac{-r}{8\pi} & \frac{1}{4\pi r} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式 (20) から, 基本解 u_{im}^* , ($i > m$) は多重調和関数となり, $r = 0$ において 0 となることわかる.

2.2. 離散化と基本解への代表寸法の導入

式 (15) を一定要素で離散化すると次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_m(y^l) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_B} \left\{ \left(\int_{\Gamma_j} u_{im}^*(x^j, y^l) d\Gamma_j(x^j) \right) q_i(x^j) \right. \\ &\left. - \left(\int_{\Gamma_j} q_{im}^*(x^j, y^l) d\Gamma_j(x^j) \right) u_i(x^j) \right\} + \sum_{k=1}^K \alpha^k u_{Nm}^*(z^k, y^l) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで, N_B は境界上の要素数であり, x^j, y^l は要素中心の点を表す. 式 (21) において, 未知量は $u_i(x^j), q_i(x^j)$ および α^k であり, その総数は $NN_B + K$ となる. 式 (21) より NN_B 本の式が得られるが, このままでは未知数に対して K 本だけ式が不足する. そこで, 式 (1) のソース項の値を領域内部の K 個の選点で与えることにする. すなわち, $m = 2$ として y^l を領域内部の選点, すなわち z^k , ($k = 1, \dots, K$) とした次式を用いる.

$$\begin{aligned} u_2(z^l) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_B} \left\{ \left(\int_{\Gamma_j} u_{i2}^*(x^j, z^l) d\Gamma_j(x^j) \right) q_i(x^j) \right. \\ &\left. - \left(\int_{\Gamma_j} q_{i2}^*(x^j, z^l) d\Gamma_j(x^j) \right) u_i(x^j) \right\} + \sum_{k=1}^K \alpha^k u_{N2}^*(z^k, z^l) \end{aligned} \quad (22)$$

以上より, $NN_B + K$ 元の連立方程式を得ることができる.

得られた連立方程式を, 未知量を左辺, 既知量を右辺に集めて代数方程式の形で書くと次式ようになる.

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (23)$$

ここで, $[A]$ は未知量の係数を集めたマトリクス, $\{x\}$ は未知ベクトル, $\{b\}$ は既知量から計算されるベクトルを表す.

式 (23) の数値解を得るために反復解法⁽⁸⁾を用いる場合を考え, 式 (24), (25) にあるような前処理を施して反復回数の低減をはかることにする.

$$[M_1]^{-1}[A][M_2]^{-1}\{\tilde{x}\} = [M_1]^{-1}\{b\} \quad (24)$$

$$\{\tilde{x}\} = [M_2]\{x\} \quad (25)$$

前処理として, 点ヤコビ法を用いることにすると次のようになる.

$$[M_1] = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \quad (26)$$

$$[M_2] = I \quad (27)$$

ここで式 (22) を見ると, 点 z^l は z^k , ($k = 1, \dots, K$) のどれかと一致し, 一致する場合 ($r = 0$ の場合) の未知数 α^k の係数は, 式 (20) からわかるように $u_{N2}^*(z^k, z^k) = 0$ となってしまう. したがって, 係数マトリクス $[A]$ の α^k に対応する部分の対角成分はすべて 0 となり, この部分では対角成分から離れるほど大きくなり, 点ヤコビ法は使うことができない. そこで基本解に代表寸法を導入し, 上記の対角成分で 0 とならず, 対角成分から離れるにしたがって成分が小さくなるように基本解を修正することにする.

式 (11) より次を得る .

$$u_{11}^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r} \quad (28)$$

$$\nabla^2 u_{21}^*(x, y) + u_{11}^*(x, y) = 0 \quad (29)$$

式 (28) を式 (29) に代入して次式を得る .

$$\nabla^2 u_{21}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (30)$$

式 (30) を解くと

$$u_{21}^*(x, y) = -\frac{r}{8\pi} + \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (31)$$

となる . ここで , 積分定数 c_1, c_2 を $r = 0$ で発散せず , $r = L$ で $u_{21}^* = 0$ となるように決めると次のようになる .

$$c_1 = 0, c_2 = \frac{L}{8\pi} \quad (32)$$

すなわち , 基本解 $u_{21}^*(x, y)$ は次のようになる .

$$u_{21}^*(x, y) = -\frac{r}{8\pi} + \frac{L}{8\pi} \quad (33)$$

ここで , L を解析モデルの代表寸法とすると , $r < L$ で u_{21}^* の絶対値が単調に減少し , $r = 0$ で最大となるのがわかる .

同様にして他の高次の基本解についても求めると , 代表寸法を導入した基本解は次のようになる .

$$u_{11}^* = u_{22}^* = u_{33}^* = u_{44}^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (34)$$

$$u_{21}^* = u_{32}^* = u_{43}^* = -\frac{r}{8\pi} + \frac{L}{8\pi} \quad (35)$$

$$u_{31}^* = u_{42}^* = \frac{r^3}{96\pi} - \frac{Lr^2}{48\pi} + \frac{L^3}{96\pi} \quad (36)$$

$$u_{41}^* = -\frac{r^5}{2880\pi} + \frac{Lr^4}{960\pi} - \frac{L^3r^2}{576\pi} + \frac{L^5}{96\pi} \quad (37)$$

$$u_{12}^* = u_{13}^* = u_{14}^* = u_{23}^* = u_{24}^* = u_{34}^* = 0 \quad (38)$$

式 (38) を基本解として用いたとき , 多重調和関数の部分の絶対値はすべて $r = 0$ で最大値を取り , $r = L$ で 0 , かつ $0 < r < L$ で単調減少となっている .

3. 数値解析例

まず , Fig.2 のような一辺の長さが 10 の立方体領域を考える . 境界の節点数を 602 , 要素数を 1200 として三角形一定要素を用いて一様に要素分割した . さらに立方体領域内部に 27 個の内部選点を一様に配置した .

次の Poisson 方程式で与えられる問題を , 上述の方法で解析した .

$$\nabla^2 u_1(x) + 10 \cos \frac{\pi z}{10} = 0 \quad (39)$$

境界条件は次のようにした .

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{at } z = -5 \\ 100 & \text{at } z = 5 \end{cases} \quad (40)$$

$$q_1(x) = 0 \quad \text{at } x, y = \pm 5 \quad (41)$$

連立 Poisson 方程式の元数 N は $N = 3$ とし , 代表寸法 L の取り方は Fig.2 に示す L^* を基準として , $L/L^* < 1$, $L/L^* =$

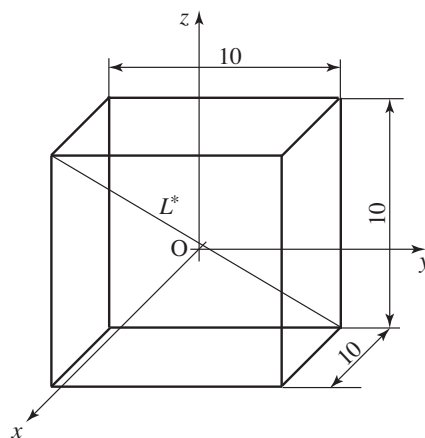


Fig. 2 A cube model.

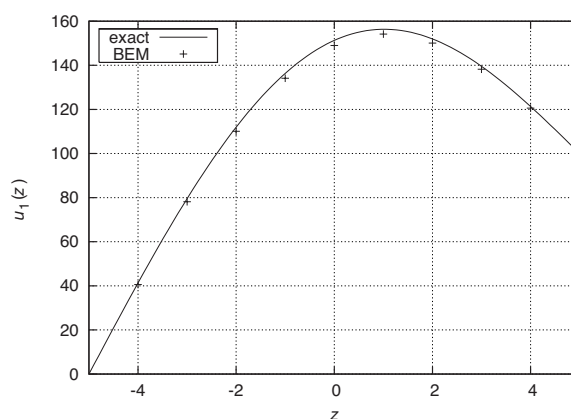


Fig. 3 Results for $u_1(z)$ at internal collocation points.

1, $L/L^* > 1$ の場合について調べた . 反復解法には GMRES を用い , 収束条件は 1.0×10^{-5} とした .

解析結果を Fig.3 に示す . Fig.3 から , 得られた数値解は厳密解に精度良く一致していることが分かる . また反復回数とそれに対する残差の推移を Fig.4 に示す . 反復回数は , 従来の基本解を用い , 前処理を施さない場合では 51 回であったのに対して , 代表寸法を導入した基本解 (ここでは $L = L^*$) を用い , 前処理を施した場合では 31 回であった . このことから導入した基本解と前処理による反復計算の低減効果が確認できる .

次に L/L^* の値と反復回数の関係を調べた結果を Fig.5 に示す . Fig.5 より , L/L^* の大小は反復回数へあまり影響しないようであり , 多少の違いはあるものの , いずれの場合も前処理がない場合と比べて反復回数が大きく減少していることが観察される . したがって , 代表寸法 L としては解析対象を包む最小直方体の辺の長さの最大値程度を用いればよいと考えられる .

次に , Fig.6 に示すような内径 10 , 外形 20 , 高さ 10 の円筒の $1/4$ 領域を図のように三角形一定要素で分割して解析した . 境界条件は内壁で $u_1 = 0$, 外壁で $u_1 = 100$ としその他の面では $q_1 = \partial u_1 / \partial n = 0$ とした . また , 領域内部の選点

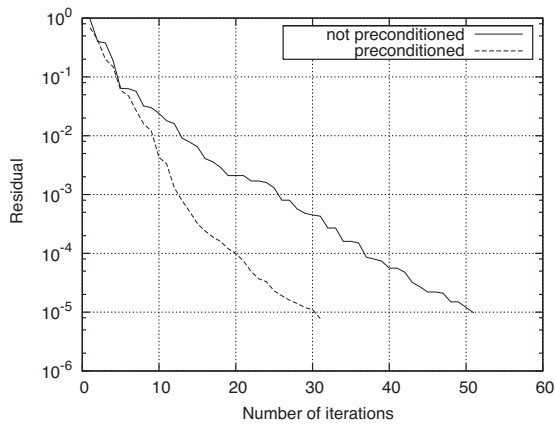


Fig. 4 Residuals versus number of iterations.

は, Fig.7 のように配置し, 代表寸法 L は節点間の距離の最大値とした.

まずソース項 u_2 を次式のように与えた場合について解析した.

$$u_2(r) = 10 - r \quad (42)$$

Fig.8 には, 領域内部の選点で得られたポテンシャルの値を厳密解と比較して示す. 領域内部の選点は Fig.6 に示すように z 軸からの距離 r が同じ位置で円周方向に 3 点ずつあり, Fig.8 には r の値が等しい円周方向の内部選点にたいしては, ほとんど同じ結果が重なって表示されている. また, Fig.9 には, 反復回数と残差の関係を示す. 立方体のモデルの時と同様に, 代表寸法を導入した基本解と前処理により反復法の収束性が大きく改善されている.

次にソース項 u_2 を次のように r の 2 次式で与えた場合について解析した.

$$u_2(r) = (10 - r)(20 - r) \quad (43)$$

Fig.10 には, 領域内部の選点で得られたポテンシャルの値を厳密解と比較して示す. この場合も r の値が等しい円周方向の内部選点にたいしては, ほとんど同じ結果が重なって表示されている. また, Fig.11 には, 反復回数と残差の関係を示す. ソース項の分布が複雑になった分, 解の精度は悪くなっているが, 反復法の収束性は前処理により改善されていることがわかる. なお Fig.10 の結果では GMRES と LU 分解の結果はほぼ同じであり, ほとんど図の中では違いを区別できない. GMRES では反復の収束条件を $\epsilon = 10^{-6}$ としており, LU 分解による結果とは 0.01% の範囲で一致した. このことから, 反復法の採用や基本解への代表寸法の導入による精度低下はなく, これ以上の解の精度向上を図るためには, 境界の要素分割数や内部選点数を増やしたりして離散化誤差を減らせばよいと考えられる.

4. 結言

Poisson 方程式などソース項を有する場合に用いられる多重相反法について, ソース項を一連の多段階 Poisson 方程式

で近似し, 連立 Poisson 方程式の基本解を用いて境界積分方程式の導出を行った. また, 基本解に代表寸法を導入することにより係数行列の簡便な前処理が可能となった. 提案した手法を用いて数値解析を行った結果, 本手法により連立方程式を反復法で解く際の反復回数が低減されることが明らかになり, 本手法の有効性が示された.

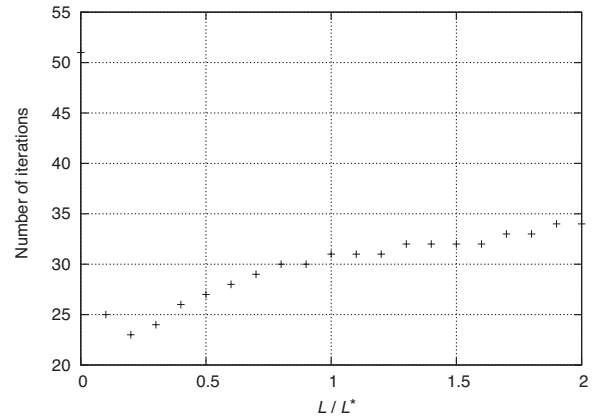


Fig. 5 Effect of scale parameter L to number of iterations.

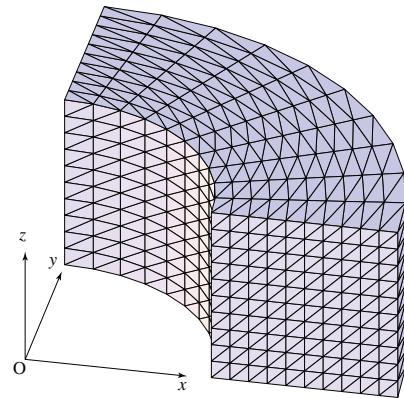


Fig. 6 A quarter cylinder model and its mesh discretization.

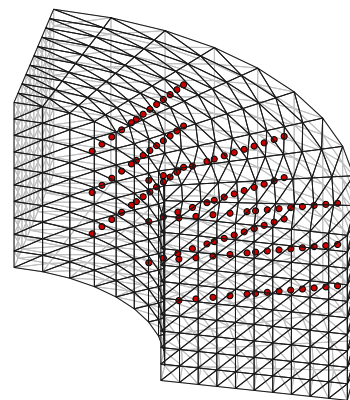


Fig. 7 Arrangement of internal collocation points.

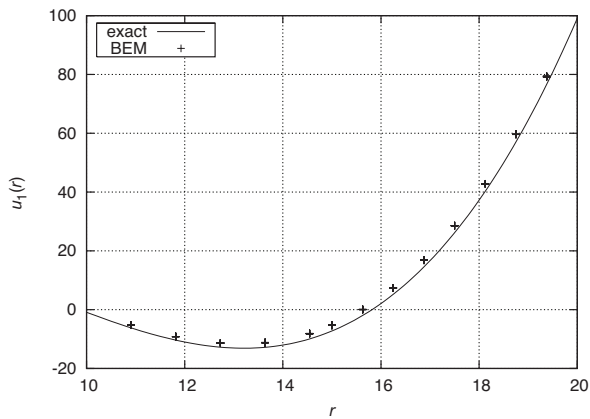


Fig. 8 Results for $u_1(r)$ at internal collocation points for cylinder model.

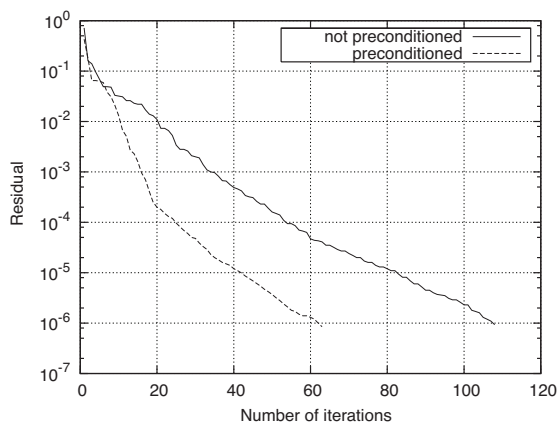


Fig. 11 Residual versus number of iterations for cylinder model with source $u_2(r) = (10 - r)(20 - r)$.

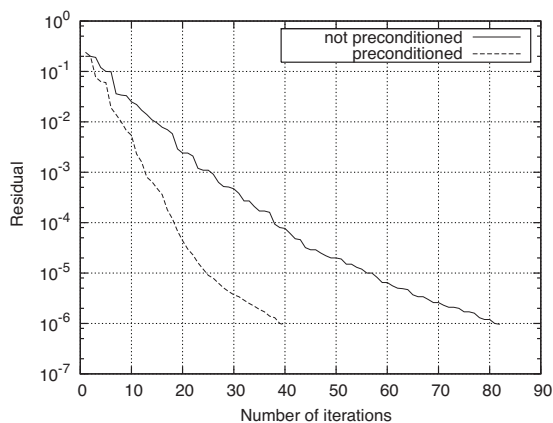


Fig. 9 Residual versus number of iterations for cylinder model with source $u_2(r) = 10 - r$.

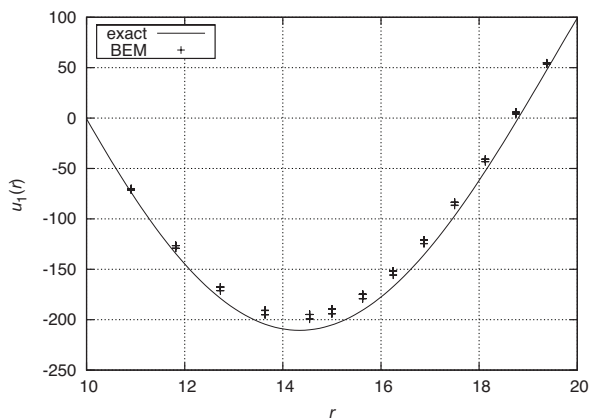


Fig. 10 Arrangement of internal collocation points.

参考文献

- (1) 松本敏郎, 田中正隆, 末吉耕平, Artur Guzik : 二重相反法に基づく BEM を用いた非均質材料の熱伝導率同定解析, 計算数理工学論文集, 4 (2004), pp. 91–94.
- (2) T. Matsumoto, A. Guzik, Masa. Tanaka : A boundary element method for analysis of thermoelastic deformations in materials with temperature dependent properties, Int. J. Numer. Meth. Engng, **64** (2005), pp. 1432–1458.
- (3) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行 : 境界要素法, (1991), 培風館.
- (4) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, and L.C.Wrobel : The Dual Reciprocity Boundary Element Method, (1992), Comp. Mech. Pub.
- (5) A.J. Nowak and A.C. Neves, (eds.) : The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, (1994), Comp. Mech. Pub.
- (6) 落合芳博 : 改良された多重相反境界要素法による二次元非定常熱伝導解析, 日本機械学会論文集 (B 編), **62**-600 (1996) pp. 3125–3130.
- (7) 落合芳博, 瀬戸聡 : 三重相反境界要素法による遠心力を伴う不均質材の弾性解析, 日本機械学会論文集 (A 編), **72**-722 (2006) pp. 1458–1463.
- (8) 樫山和男, 西村直志, 牛島省 : 並列計算法入門, (2003), 丸善.