

# 注目領域を解析するための多重極展開を用いた効率的境界要素法

## AN EFFICIENT BOUNDARY ELEMENT METHOD

### USING MULTIPOLE EXPANSION FOR ANALYSING TARGET REGION

山岸 寛<sup>1)</sup>, 天谷 賢治<sup>2)</sup>

Hiroshi YAMAGISHI and Kenji AMAYA

1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻 (〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科

This paper presents an inverse analysis method for identification of unknown parameters corresponding to defect and/or unknown boundary conditions of an elastic body in a steady elastodynamic state. An extended Kalman filter and the boundary element method are applied to the elastodynamic inverse analysis. The extended Kalman filter algorithm can estimate state variables of a stochastic system. It is expected that the algorithm is also applicable to analysis of other identification problems for which only the noisy data are available at some measuring points. The effectiveness of the proposed inverse analysis method is demonstrated through numerical simulation for several example problems.

**Key Words:** Boundary Element Method, Numerical Analysis, Target Region, Multipole Expansion, Computational Mechanics

### 1. 緒言

音, 腐食, 電磁波などの解析対象には開領域の境界値問題が多く, 境界要素法 (BEM)<sup>(1)</sup> が有効である. さらに, 境界要素法の高速解法として高速多重極展開法 (Fast Multipole Method:FMM)<sup>(2)(3)</sup> があり, 大規模計算の効率的な手法として利用されている. これら手法は全ての未知数に対して同程度の精度で解を求めることを前提に考えられている.

しかし, 産業などにおける実際の解析では領域全体の解は必要ではなく, 解析の目的に応じてある特定の領域 (以下注目領域と呼ぶ) の解のみが必要である場合が少なくない. 具体的なケースとして, 船舶などの構造物の一部における防食効果を見積もるための腐食・防食解析や応力集中部周辺の挙動評価のための応力解析などがあげられる. この様な状況下では注目領域の解だけを効率的に求められると都合が良い.

本論文ではポテンシャル問題に対し, 取り扱う解析領域を“注目領域”と“非注目領域”に分割し, 多重極展開を適用して注目領域の解だけを正確, 且つ効率的に求める手法を提案する. まず二次元ポテンシャル問題に対する多重極展開を用いた境界要素法の注目領域の高速解法の定式化について述べる. 次に, 解析例を示し, 計算精度および計算速度を検証する. 最後に結言を述べる.

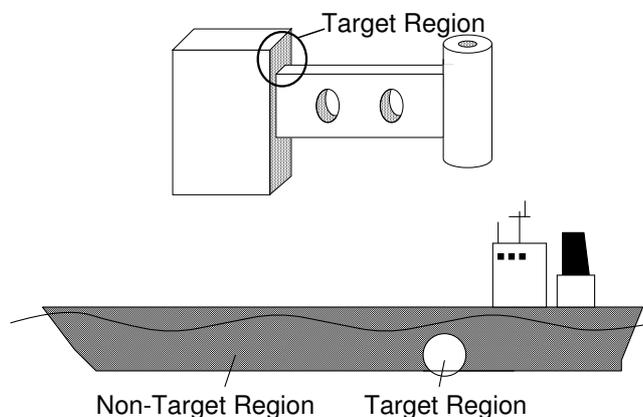


Fig. 1 Examples where particular regions are of interest to be analyzed

### 2. 定式化

本論文では, 簡単のため支配方程式がラプラス方程式の完全ディリクレ問題を考える. まず, 通常の境界要素法の定式化に従って境界積分方程式を導出する. 次に, 積分領域を Fig.1 のように注目領域 (Target Region) と非注目領域 (Non-Target Region) に分割する. また, 注目領域での境界を注目境界, 非注目領域における境界を非注目境界と呼ぶことにする. 基本解の多重極展開を利用して, 非注目境界の積分項を低次の多重極モーメントで展開する. 本手法では非注目境界

のフラックスを求める代わりに低次の多重極モーメントを未知数として解析を行う。以上の工夫により非注目境界の未知数を大幅に減少させる。離散化した代数方程式の求解には最小二乗法を用いる。

### 2.1. 境界値問題の設定

本研究では簡単のため Fig.2 に示すような境界  $\Gamma$  で囲まれた二次元の閉領域  $\Omega$  における完全ディリクレ問題を考える。すなわちポテンシャル  $u$  がラプラス方程式

$$\nabla^2 u(z) = 0, \quad z \in \Omega \quad (1)$$

を満足し、境界条件

$$u(z) = \bar{u}, \quad z \in \Gamma \quad (2)$$

を満たすとする。ここで、 $\bar{u}$  は  $\Gamma$  におけるポテンシャルの既知量である。

### 2.2. 境界積分方程式の導出と注目境界と非注目境界への分割

Fig.2 のように複素平面を用い、解析領域における観測点を  $z$ 、ソース点を  $z_0$  とする。式 (1) にグリーンの公式を適用

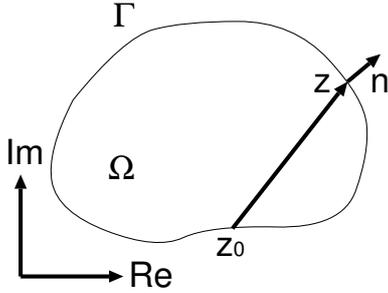


Fig. 2 Domain  $\Omega$  and boundary  $\Gamma$  in the complex plane

すると次の境界積分方程式が得られる。

$$c(z_0)u(z_0) = \text{Re} \left[ \int_{\Gamma} u^*(z, z_0)q(z)d\Gamma(z) - \int_{\Gamma} q^*(z, z_0)u(z)d\Gamma(z) \right] \quad (3)$$

ここで  $\text{Re}[\cdot]$  は複素数の実部を表す。  $q$  は境界における  $u$  の外向き法線方向の微分  $q = \partial u / \partial n$  である。ここで、 $\Gamma$  上の外向き法線ベクトルを  $n$  とする。  $u^*(z, z_0)$  はラプラス方程式の基本解、  $q^*(z, z_0)$  は  $u^*$  の法線方向の微分であり、二次元問題では

$$u^*(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{z_0 - z} \right) \quad (4)$$

$$q^*(z, z_0) = \frac{\partial u^*(z, z_0)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi(z_0 - z)} \frac{\partial(z_0 - z)}{\partial n} \quad (5)$$

である。なお、  $c(z_0)$  はソース点  $z_0$  が  $\Omega$  内にある場合  $c = 1$ 、  $\Omega$  外の場合  $c = 0$ 、滑らかな境界上の場合  $c = 1/2$  の値をとる定数である。

式 (3) を Fig.3 のように注目境界  $\Gamma_t$  と非注目境界  $\bar{\Gamma}_t$  に分

割すると次の境界積分方程式が得られる。

$$c(z_0)u(z_0) = \text{Re} \left[ \int_{\Gamma_t} u^*(z, z_0)q(z)d\Gamma(z) + \int_{\bar{\Gamma}_t} u^*(z, z_0)q(z)d\Gamma(z) - \int_{\Gamma} q^*(z, z_0)u(z)d\Gamma(z) \right] \quad (6)$$

### 2.3. 非注目境界における積分の多重極展開

式 (4) の基本解  $u^*(z, z_0)$  を

$$u^*(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln(z_0 - z) = -\frac{1}{2\pi} \left[ \ln(z_0 - z_c) + \ln \left( 1 - \frac{z - z_c}{z_0 - z_c} \right) \right] \quad (7)$$

と変形する。多重極展開の中心点  $z_c$  について  $|z - z_c| \ll |z_0 - z_c|$  の関係が成り立つとき、テイラー展開

$$\ln(1 - \xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k}, \quad |\xi| < 1 \quad (8)$$

を適用すると式 (7) は次式となる。

$$u^*(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c) \quad (9)$$

ここで、

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}, \quad k \geq 0 \quad (10)$$

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}, \quad k \geq 1$$

$$O_0(z) = -\ln(z) \quad (11)$$

である。

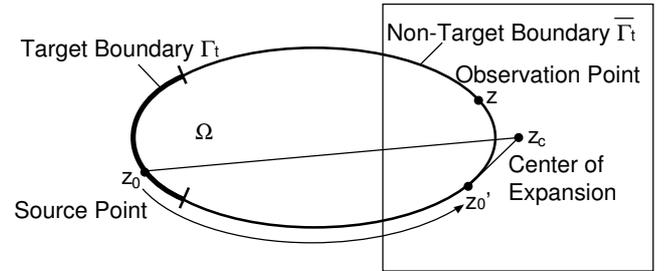


Fig. 3 Source point  $z_0$ , observation point  $z$  and center of expansion  $z_c$

式 (9) により式 (6) の非注目境界  $\bar{\Gamma}_t$  の積分項は次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\Gamma}_t} u^*(z, z_0)q(z)d\Gamma(z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_t} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c) \right] q(z)d\Gamma(z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで  $M_k(z_c)$  は  $z_c$  についての多重極モーメントであり、

$$M_k(z_c) = \int_{\bar{\Gamma}_t} I_k(z - z_c)q(z)d\Gamma(z) \quad (13)$$

である．なお  $M_k(z_c)$  は複素数である．式 (12) の無限級数を次式のように  $N$  個の有限項で打ち切る．

$$\int_{\Gamma_t} u^*(z, z_0) q(z) d\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c) + \epsilon \quad (14)$$

ここで， $\epsilon$  は打ち切りによる誤差項である．次式の条件

$$|z_0 - z_c| \geq 3|z - z_c| \quad (15)$$

が成り立つとき，式 (12) の無限級数は  $N = 15$  程度で十分収束することが知られている (3)．Fig.3 に示すように  $z_0 \rightarrow z'_0$  とすると，誤差  $\epsilon$  が生ずる．以上のように，非注目境界の積分項をフラックス  $q$  の代わりに，低次の多重極モーメント  $M$  で表す．

#### 2.4. 離散化代数方程式の導出

本研究では非注目境界のフラックス  $q$  の代わりに導入した多重極モーメント  $M$  を新たな未知数とする．非注目領域には  $M$  の成分である  $N$  個の複素数が未知数として存在する．

注目領域に  $m$  個および非注目領域に  $n$  個のソース点を設け，注目境界  $\Gamma_t$  を離散化し， $m + n$  個の代数方程式を構成する．

$$\begin{pmatrix} h \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} G_t & O \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_t \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad (16)$$

ここで下添え字  $t$  は注目境界に対応することを示す．式 (6) の右辺第一項および右辺第二項はそれぞれ  $G_t q_t$  および  $OM$  に対応し，式 (6) の左辺と右辺第三項の和が  $h$  に対応する．

上式左辺に最小二乗法を適用して解き，注目領域の未知数  $q_t$  および  $M$  を得る．以上のように非注目境界の未知数を  $2N = 30$  個程に低減して解析を行うことにより効率化を図る．

#### 2.5. 非注目境界のセル分割

注目境界と非注目境界が接するなど両境界同士が近い距離関係の場合には，式 (15) の条件を満たすように多重極展開の中心  $z_c$  を決定することは難しい．このような場合には，Fig.4 のように非注目領域に適宜多重極展開中心  $z_c$  を複数個とり，複数のセルに分割する．非注目領域を  $L$  個のセルに分割すると各セルには  $M$  の成分である 15 個の複素数が未知数として存在する．このような場合には非注目境界は  $15 \times 2 \times L$  個の未知数のみで解析を行うことができる．

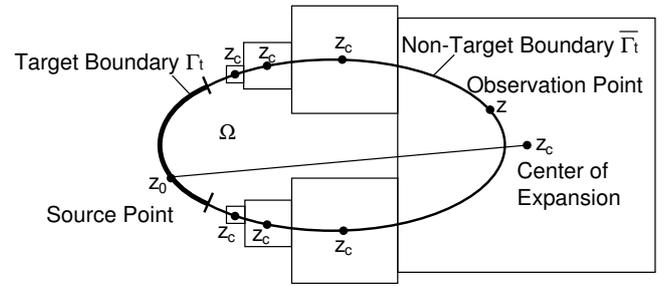


Fig. 4 Source point  $z_0$ , observation point  $z$  and center of expansion  $z_c$  and division into multiple cells

### 3. 解析例

本手法の計算精度および計算時間について通常の境界要素法との比較を交えて検証する．例として，Fig.5 のようなドーナツ型状の二次元ラプラス方程式で支配される領域を考える．外周境界を注目境界，内周境界を非注目境界とする．境界条件はすべてディリクレ条件とし，外周境界では常に  $u = 0$ ，内周境界では  $\theta = 0$  から境界円周を 10 等分し交互に  $u = 3$  および  $u = 4$  を設定した．求める未知量は，外周のフラックス分布である．

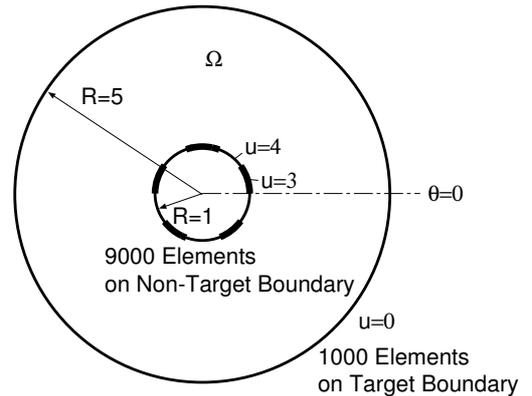


Fig. 5 Boundary condition example model

#### 3.1. 計算精度の比較

Fig.6 に両手法で求めた注目境界における解の分布を示す．注目境界上において両者の解はよく一致している．

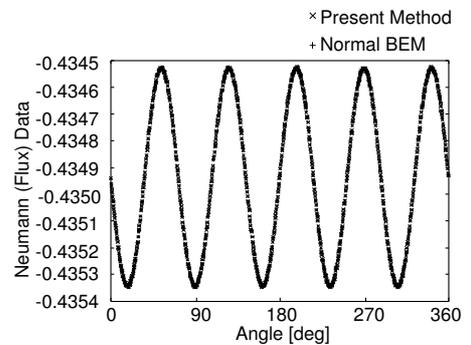


Fig. 6 Flux distribution on target boundary

### 3.2. 計算時間の比較

前節で例に挙げたドーナツ型の領域の問題に対し、境界要素数を変化させて計算に要した時間を比較した。外側の注目境界では要素数を 1000 要素に固定する。非注目境界では要素数を 9000 要素まで増加させ、本手法と従来法における計算時間を比較した。多重極展開の項数は 15 とした。なお、計算に使用した CPU は XEON2.8Ghz、メモリーは 2G であり、計算時間計測には *time* コマンドを用いた。Fig.7 および 8 は全要素数および計算時間 (秒) の関係であり、Fig.7 は線形スケールで、Fig.8 はログスケールで示す。全要素数を  $N$  とすると、従来の境界要素法が  $N^3$ 、本手法が  $N^2$  にほぼ比例して計算が増加しており、要素数が多くなるほど、本手法が従来法より高速に計算でき有効である。

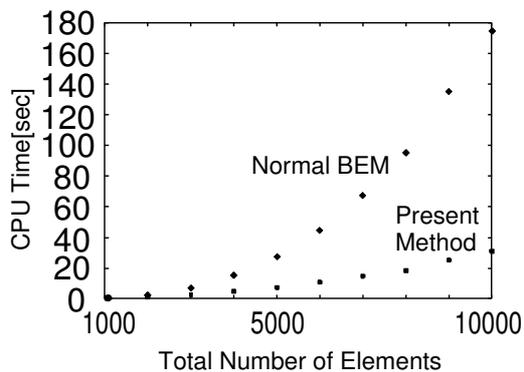


Fig. 7 Comparison of computational time (liner scale)

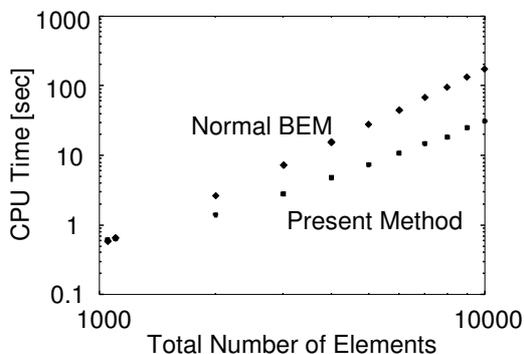


Fig. 8 Comparison of computational time (log scale)

### 4. 結言

本研究では、多重極展開を用いた境界要素法による注目領域の高速解法を開発した。本手法ではまず、通常の境界積分方程式を導出する。次に、解析領域を注目領域と非注目領域に分割する。多重極展開を適用し、非注目境界の積分項を低次の多重極モーメントで展開する。最後に、非注目領域の未知量の代わりに多重極モーメントを未知量とすることにより、未知数を大幅に減少させ計算を効率化する。実際に数値計算を行い本手法の有効性を確認した。

### 参考文献

- (1) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, (1991), 培風館.
- (2) Greengard, L. and Rokhlin, V.: A fast Algorithm for Particle Simulations, *Journal of Computational Physics*, **135**(1997), pp. 280-292.
- (3) Liu, Y. and Nishimura, N.: The Fast multipole boundary element method for potential problems, *Engineering Analysis with Bondary Elements* **30**(2006), pp. 371-381.