

## VOF 法を用いた非圧縮超弾性体のトポロジー最適化

## TOPOLOGY OPTIMIZATION ANALYSIS OF INCOMPRESSIBLE HYPERELASTIC MATERIALS BY VOF METHOD

阿部 和久<sup>1)</sup>, 小坂橋智哉<sup>2)</sup>, 紅露 一寛<sup>3)</sup>

Kazuhisa ABE, Tomoya KOITABASHI and Kazuhiro KORO

<sup>1)</sup>新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)<sup>2)</sup>新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)<sup>3)</sup>新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper presents a topology optimization method for incompressible hyperelastic materials. To cope with the occurrence of intermediate density, the VOF method is employed. Therefore, the topology evolution is realized by the advection of material distribution governed by the Hamilton-Jacobi equation. Suppression of pressure inside holes is achieved by the replacement of the incompressible hyperelastic material with a compressible linear elasticity. The finite element and the design sensitivity analysis methods are constructed based on the weighting average of the hyperelastic and linear elastic forms. The validity of the developed method is evidenced through numerical examples.

**Key Words :** *incompressible Mooney-Rivlin model, topology optimization, VOF method*

## 1. はじめに

現在, ゴム材料は構造物や部材に作用する衝撃や振動などを低減する目的で広く用いられている. 当該材料は変形下においてほとんど体積変化せず, 一般に非圧縮超弾性体としてモデル化される. また, 非圧縮性により, その力学特性は形状に強く依存したものとなる. そのため, 設計段階において, 所要の性能を発揮し得る適切な形状を見出すことが重要となり, 形状最適化法やトポロジー最適化法などの最適設計手法が有効な手段となり得る.

トポロジー最適化手法による場合, 最適化過程においていかなるトポロジー変化も許容するので, 基本的に形状に制約を課すことなく適切な解を見出すことが可能となる. 当該手法では一般に, 設計領域に固定した Euler メッシュを導入し, その下で物体領域を密度関数の分布により表現する. この方法 (以下密度法) による場合, 物体は密度 1 の領域として表され, トポロジー変化の捕捉は, 各点における密度関数値を設計変数とした最適化問題に帰着して扱うことが可能となる. 密度法の主な問題点としては, 密度分布が隣接要素間で振動する, いわゆるチェッカーボード現象と, 物体境界が明瞭に捉えられなくなる中間密度分布の 2 つが挙げられる. いずれの問題に対しても対処法が提案されているが, 特に後者については未だ十分な解決策が見出されていない.

中間密度の発生は, 非圧縮超弾性体を対象としたトポロジー最適化において特に深刻な状況を招く恐れがある. 密度法の下で構造物を表現する場合, 本来物質が存在し

ない領域は剛性の十分低い材料に置換される. 非圧縮超弾性体では, 剛性の大小によらず非圧縮性が保持されるため, 空孔内で不合理な圧力が発生し, 最適化過程に影響を及ぼす. そのため, 著者らは文献<sup>1)</sup>においてゴム材料を微圧縮性材料として表わし, そのポアソン比  $\nu$  を密度の関数で与え, 空孔域が圧縮性材料 ( $\nu = 0$ ) により与えられる様な手法を構成した. その結果, 空孔内の不合理な圧力の発生は抑制されたものの, 中間密度域において微圧縮性が緩和され, 特に細い部材に対して材料特性 (微圧縮性) が適切に再現できなくなるといった問題点が生じた.

なお, 著者らは密度法におけるチェッカーボード現象や, 中間密度問題の解決策として, VOF (Volume Of Fluid) 法を用いたトポロジー最適化法を提案した<sup>2)</sup>. VOF 法<sup>3)</sup>では, 各要素内の物体占有率を VOF 関数として定義して物体形状を表現する. したがって, VOF 関数は密度法における密度関数と基本的には同じものとなる. ただし, トポロジー最適化過程の下では異なる更新手続きが採られる. すなわち, 密度法では要素毎に密度を更新して行くのに対し, VOF 法では, Level Set 法<sup>4)</sup>と同様に, VOF 関数の移流により形状更新を行う. この場合, VOF 関数値の更新は物体境界近傍に限定されるため, チェッカーボードや中間密度域の拡大は大幅に改善される.

この中間密度域の低減は, 前述のとおり非圧縮超弾性体解析において, 重要な意義を持つ. そこで, 本論文では VOF 法に基づいた非圧縮超弾性体のトポロジー最適化法の構成を試みる. なお, ゴム材料は通常大変形下で使用

されるため、以下では有限要素方程式を大変形理論に基づき定式化する。また、空孔域は、密度法と同様に低剛性材料に置換されることとなる。その際に圧縮性を賦与し、さらに物体境界近傍の空孔部におけるひずみ集中による解の不安定化を抑制する目的で、当該域を圧縮性微小ひずみ線形弾性場として表現する。ただし、VOF 法による場合、物体内の中間密度は除去できるものの、物体境界部には、1 要素長程度の幅で中間密度層が分布することとなる。そこで、大変形非圧縮超弾性体と微小変形圧縮性線形弾性体とに対する有限要素方程式を VOF 関数に基づき重み平均したものを求解、および最適化に用いる。また、最後にいくつかの解析例を通し、本手法の有効性について検証する。

## 2. 有限要素方程式

### 2.1 大変形非圧縮超弾性問題の定式化

本研究では二次元平面ひずみ問題を対象とする。非圧縮超弾性体は Mooney-Rivlin モデルにより与える。この場合、構成式は次の弾性ポテンシャル関数  $W$  により与えられる<sup>5)</sup>。

$$W = c_1(I_c III_c^{-\frac{1}{3}} - 3) + c_2(II_c III_c^{-\frac{2}{3}} - 3) - p(j - 1) \quad (1)$$

ここで  $p$  は圧力、 $c_1, c_2$  は材料定数、 $I_c, II_c, III_c$  はそれぞれ右 Cauchy-Green 変形テンソル  $\mathbf{C}$  の 1 次、2 次、3 次不変量、 $j = \det \mathbf{F}$  は体積変化率、 $\mathbf{F}$  は変形勾配テンソルである。このとき、第 2 Piola-Kirchhoff 応力  $\mathbf{S}$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (2)$$

全 Lagrange 有限要素方程式は次式の様になる。

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) &= L(\delta \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \quad \delta \mathbf{u} \in D \\ b_1(\mathbf{u}, \delta p) + R_1(\mathbf{u}, p, \delta p) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}$  は変位、 $\delta(\cdot)$  は変分、 $\bar{\mathbf{u}}$  は部分境界  $\Gamma_u$  上での変位規定値、 $D$  は  $\Gamma_u$  上で  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  をみたす変位関数集合である。また、式 (3) の第 1 式はつり合い式、第 2 式は非圧縮条件に対応する。 $a_1, L, b_1, R_1$  は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{S} : \delta \mathbf{C} d\Omega, \\ L(\delta \mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma, \\ b_1(\mathbf{u}, \delta p) &= - \int_{\Omega} (j - 1) \delta p d\Omega, \\ R_1(\mathbf{u}, p, \delta p) &= \sum_e \tau \int_{\Omega_e} 2 \frac{\partial j}{\partial \mathbf{C}} : [(\nabla p) \otimes (\nabla \delta p)] d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

なお、式 (4) で、 $\Omega$  は無変形時の物体領域、 $\Gamma_{\sigma}$  は表面力  $\bar{\mathbf{t}}$  が規定された境界である。また、 $R_1$  は変位-圧力混合法に対する安定化項であり、 $\tau$  は安定化パラメータ、 $\Omega_e$  は要素領域、 $\sum_e$  は要素について和をとることを意味し

ている。本研究では変位と圧力を未知量とする混合法により定式化を行っている。また、離散化の際は三節点三角形要素を用いる。この場合、安定化項  $R_1$  は、上式のように圧力勾配に関する積分のみで与えられることとなる。

### 2.2 線形弾性問題の定式化

以降に展開するトポロジー最適化過程においては、本来物質の存在しない領域を剛性の十分に低い圧縮性線形弾性体で置換する。なお、非圧縮超弾性体の定式化において、変位-圧力混合法を用いるので、解法の構成上線形弾性場についても同様の定式化を用いる。このとき、線形弾性場は次の方程式を満たす。

$$\begin{aligned} a_2(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) &= L(\delta \mathbf{u}), \\ b_2(\mathbf{u}, p, \delta p) + R_2(p, \delta p) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $a_2, b_2, R_2$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_2(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} 2G\epsilon : \delta \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} \frac{3\nu}{1+\nu} p \text{tr}(\delta \epsilon) d\Omega, \\ b_2(\mathbf{u}, p, \delta p) &= \int_{\Omega} [p + \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \text{tr}(\epsilon)] \delta p d\Omega, \\ R_2(\mathbf{u}, \delta p) &= \sum_e \tau \int_{\Omega_e} (\nabla p) \cdot (\nabla \delta p) d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

なお、 $\epsilon$  は微小ひずみテンソル、 $G$  はせん断弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。

## 3. VOF 法によるトポロジー最適化

### 3.1 最適化問題

本研究では以下に示された最適化問題を対象とする。

$$\min_{\Gamma} J(\mathbf{u}, p) := \int_{\Omega} F(\mathbf{u}, p) d\Omega,$$

subject to

$$a_1(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) = L(\delta \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \quad \delta \mathbf{u} \in D \quad (7)$$

$$b_1(\mathbf{u}, \delta p) + R_1(\mathbf{u}, p, \delta p) = 0$$

$$V := \int_{\Omega} d\Omega \leq V_{\max}$$

ここで、 $J$  はコスト関数、 $F$  は領域積分により  $J$  を与える被積分関数、 $V$  は領域体積、 $V_{\max}$  は許容最大体積である。

### 3.2 VOF 関数

VOF 関数  $\psi$  は各有限要素における物質占有率として定義される。したがって、完全に物質で占められた要素で  $\psi = 1$ 、物質の存在しない要素で  $\psi = 0$  となる。ただし、後述の様に要素毎の剛性を  $\psi$  に比例するかたちで与えるため、求解方程式の安定化を図る目的で下限値  $\psi_{\min} > 0$  を設定する必要がある。

### 3.3 VOF 関数を用いた最適化問題の定式化

VOF 関数  $\psi$  は物体  $\Omega$  を包含する設計領域  $\bar{\Omega}$  全体で定義される。各要素毎の剛性を次式の様にとり、設計領域全域の関数に拡張する。

$$\bar{c}_1 = \psi c_1, \quad \bar{c}_2 = \psi c_2, \quad \bar{G} = \psi G \quad (8)$$

以上の準備の下、本研究では式 (7) の最適化問題を次のように変更する。

$$\begin{aligned} \min_{\psi} \bar{J}(\mathbf{u}, p; \psi) &:= J(\mathbf{u}, p; \psi) + \lambda_+(V - V_{\max}), \\ \text{subject to} \\ a(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}; \psi) &= L(\delta\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \quad \delta\mathbf{u} \in D \quad (9) \\ b(\mathbf{u}, p, \delta p; \psi) + R(\mathbf{u}, p, \delta p; \psi) &= 0, \\ \lambda_+(V - V_{\max}) &= 0, \quad \lambda_+ \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda_+$  は Lagrange 乗数である。  $J, V, a, b, R$  は  $\bar{\Omega}$  での積分により次式の様にと与えられる。

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}, p; \psi) &= \int_{\bar{\Omega}} \psi F(\mathbf{u}, p) d\Omega, \\ V &= \int_{\bar{\Omega}} \psi d\Omega, \\ a(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}; \psi) &= \int_{\bar{\Omega}} \psi (\omega_1 \frac{1}{2} \mathbf{S} : \delta\mathbf{C} + \omega_2 2G\epsilon : \delta\epsilon) d\Omega \\ &\quad - \int_{\bar{\Omega}} p [\omega_1 \frac{\partial j}{\partial \mathbf{C}} : \delta\mathbf{C} + \omega_2 \frac{3\nu}{1+\nu} \text{tr}(\delta\epsilon)] d\Omega, \\ b(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}; \psi) &= \int_{\bar{\Omega}} \{ \omega_1 \psi G(1-j) + \omega_2 [p + \psi \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \text{tr}(\epsilon)] \} \delta p d\Omega, \\ R(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}; \psi) &= \sum_e \tau \int_{\Omega_e} \{ \omega_1 2 \frac{\partial j}{\partial \mathbf{C}} : [(\nabla p) \otimes (\nabla \delta p)] \\ &\quad + \omega_2 [(\nabla \delta p) \cdot (\nabla p)] \} d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) において、 $\omega_1, \omega_2$  は  $\psi$  の関数であり、有限要素方程式における非圧縮超弾性体項と線形弾性体項の重み係数を意味しており、 $\omega_1 + \omega_2 = 1$  をみたく。具体的な設定については解析例の中で述べる。

なお、式 (9) における有限要素方程式は非線型方程式となるので、次の増分形に基づく Newton-Raphson 法により解を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^k}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\partial a^k}{\partial p} \Delta p^{k+1} &= L(\delta \mathbf{u}) - a^k, \\ \frac{\partial b^k}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\partial b^k}{\partial p} \Delta p^{k+1} & \\ + \frac{\partial R^k}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\partial R^k}{\partial p} \Delta p^{k+1} &= -b^k - R^k \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $(\cdot)^k$  は収束計算における第  $k$  回近似解に関する項である。

## 4. 感度解析に基づくトポロジー最適化過程

### 4.1 目的関数の増分評価

$\psi \rightarrow \psi + \Delta\psi$  による目的関数の増分  $\Delta\bar{J}$  は次式で与えられる。

$$\Delta\bar{J} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial J}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial J}{\partial \psi} \Delta \psi + \lambda_+ \Delta V \quad (12)$$

ここで、 $\Delta \mathbf{u}, \Delta p$  は VOF 関数の増分  $\Delta \psi$  による有限要素解の増分である。また、体積増分  $\Delta V$  は次式で評価で

きる。

$$\Delta V = \int_{\bar{\Omega}} \Delta \psi d\Omega \quad (13)$$

式 (12) における  $\Delta \mathbf{u}, \Delta p$  に関する 2 つの項を  $\Delta \psi$  により評価するために、次の随伴問題を導入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\partial}{\partial p} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \tilde{p} &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\partial}{\partial p} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \tilde{p} & \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\partial}{\partial p} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \tilde{p} &= \frac{\partial J}{\partial p} \tilde{p} \end{aligned} \quad (14)$$

for  $\forall \tilde{\mathbf{u}} \in D, \tilde{p}$

式 (14) を  $\mathbf{w}_u \in D, \mathbf{w}_p$  について解く。なお、式 (14) の求解における係数行列は式 (11) の収束解に対する接線剛性行列の転置で与えられる。 $(\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_p)$  は、任意の  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$  に対して式 (14) をみたく。よって  $\tilde{\mathbf{u}}$  として  $\Delta \mathbf{u} \in D, \tilde{p}$  として  $\Delta p$  を用いてもよく、その結果次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial p} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \Delta p &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial p} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta p & \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial p} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta p &= \frac{\partial J}{\partial p} \Delta p \end{aligned} \quad (15)$$

一方、 $\psi + \Delta\psi$  のトポロジー下の解  $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, p + \Delta p$  は次の有限要素方程式をみたく。

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, p + \Delta p, \delta \mathbf{u}; \psi + \Delta \psi) &= L(\delta \mathbf{u}), \\ b(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, p + \Delta p, \delta p; \psi + \Delta \psi) & \\ + R(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, p + \Delta p, \delta p; \psi + \Delta \psi) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式 (16) の  $\Delta \mathbf{u}, \Delta p, \Delta \psi$  に関する一次項を求め、 $\delta \mathbf{u}, \delta p$  として  $\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_p$  を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial p} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \Delta p & \\ = -\frac{\partial}{\partial \psi} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \Delta \psi, & \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial p} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta p & \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial p} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta p & \\ = -\frac{\partial}{\partial \psi} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \psi - \frac{\partial}{\partial \psi} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \psi \end{aligned} \quad (17)$$

式 (15) と式 (17) の左辺は互いに一致するので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} &= -\frac{\partial}{\partial \psi} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \Delta \psi, \\ \frac{\partial J}{\partial p} \Delta p &= -\frac{\partial}{\partial \psi} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \psi - \frac{\partial}{\partial \psi} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \psi \end{aligned} \quad (18)$$

式 (18) を式 (12) の右辺第 1, 2 項に代入することで最終的に次式を得る.

$$\begin{aligned}\Delta \bar{J} &= -\frac{\partial}{\partial \psi} a(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_u; \psi) \Delta \psi - \frac{\partial}{\partial \psi} b(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \psi \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \psi} R(\mathbf{u}, p, \mathbf{w}_p; \psi) \Delta \psi + \frac{\partial}{\partial \psi} J(\mathbf{u}; \psi) \Delta \psi + \lambda_+ \Delta V \\ &= \int_{\Omega} \left( -\beta + \frac{\partial F}{\partial \psi} + \lambda_+ \right) \Delta \psi d\Omega\end{aligned}\quad (19)$$

ここで,  $\beta$  は  $\frac{\partial a}{\partial \psi}$ ,  $\frac{\partial b}{\partial \psi}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial \psi}$  に関する被積分項である. 式 (19) より  $\Delta \bar{J}$  を  $\Delta \psi$  で直接評価可能となる.

#### 4.2 VOF 関数の更新

VOF 法では移流方程式に基づき  $\psi$  の値を更新することで物体形状の変化を捕捉する.  $\psi$  の移流速度を  $\mathbf{v}$  としたとき, 次の移流方程式を得る.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \psi \quad (20)$$

本研究では, 最適化過程で  $\bar{J}$  が単調減少するように,  $\mathbf{v}$  を次式により与える.

$$\mathbf{v} = \left( -\beta + \frac{\partial F}{\partial \psi} + \lambda_+ \right) \nabla \psi \quad (21)$$

このとき,  $\psi$  の更新量  $\Delta \psi$  は次式で与えられる.

$$\Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta t = -\mathbf{v} \cdot \nabla \psi \Delta t \quad (22)$$

ここで,  $\Delta t$  は正の増分パラメータである.

$V = V_{\max}$  の場合, 最適化過程で体積は保存される. この条件は  $\lambda_+$  を次式により設定することで満たすことができる.

$$\lambda_+ = -\frac{\int_{\Omega} \left( -\beta + \frac{\partial F}{\partial \psi} \right) |\nabla \psi|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 d\Omega} \quad (23)$$

#### 4.3 CIVA 法による移流計算

式 (20) に基づく移流計算には, 数値拡散を防ぐ目的で CIVA 法<sup>8)</sup>を用いる. 当該手法は,  $\psi$  とその空間微係数を用いた高次補間に基づく高精度移流計算手法である CIP 法<sup>9)</sup>を三角形要素に拡張したものである. 詳細は割愛するが, 本手法では, 節点  $\mathbf{x}_i$  における次ステップの値  $\psi(\mathbf{x}_i, t + \Delta t)$  を上流点での値  $\psi(\mathbf{x}_i - \mathbf{v}\Delta t, t)$  により与える. その際に 3 次関数による高精度補間を適用する. なお, CIVA 法などの高次多項式補間による移流計算では, 関数急変部に数値振動を生ずる恐れがある. ここでは, それを除去する目的でフィルタリング操作<sup>8)</sup>を採用した.

また, 物体境界をより明確に捉える目的で以下の正接関数変換<sup>10)</sup>を併用する. まず,  $\psi$  を次式により  $T(\psi)$  に変換する.

$$T(\psi) = \tan\left[\pi\left(\psi - \frac{1}{2}\right)(1 - \varepsilon)\right] \quad (24)$$

ここで,  $\varepsilon$  は微小なパラメータであり, 本研究では  $1 \times 10^{-4}$  とした. 式 (20) と同様に  $T(\psi)$  は次の移流方程式に従う.

$$\frac{\partial T(\psi)}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T(\psi) \quad (25)$$

CIVA 法における移流計算は式 (25) により実行し, 感度解析等で用いる  $\psi$  は次式により逆変換して求める.

$$\psi = \frac{\tan^{-1} T(\psi)}{\pi(1 - \varepsilon)} + \frac{1}{2} \quad (26)$$

$\psi \simeq 1$  において  $T(\psi)$  は非常に大きな値をとるため, 移流計算過程で多少数値拡散を伴っても, 逆変換で得た  $\psi$  は明瞭な物体境界を保持し得る.

### 5. 解析例

#### 5.1 最終コンプライアンス最小化問題<sup>7)</sup>

具体的な最適化問題として, 最終コンプライアンス最小化問題を対象とする. この時, コスト関数  $J$  は次式で与えられる.

$$J = \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma = a(\mathbf{u}, p, \mathbf{u}; \psi) \quad (27)$$

ここで,  $\tilde{\mathbf{t}}$  は荷重増分過程における最終段階の規定荷重であり,  $\mathbf{u}$ ,  $p$  はその下での解である.

#### 5.2 解析条件の設定

以下の解析においては, 非圧縮超弾性体の材料定数は鉄道軌道用ゴムパッドを例に  $c_1 = 0.3$ ,  $c_2 = 0.1(N/mm^2)$  とし, 線形弾性体のポアソン比  $\nu$  とせん断弾性係数  $G$  をそれぞれ  $\nu = 0$ ,  $G = 2(c_1 + c_2) = 0.8(N/mm^2)$  と設定した. また,  $\psi_{\min} = 0.001$  とし, 本来物質の存在しない空孔域には物体域の  $1/1000$  の剛性を与えた. さらに, 非圧縮超弾性体と線形弾性体の各方程式の重み係数  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  は検討結果に基づき次のように設定した.

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 0 \quad \left( \psi < \frac{1}{2} \right) \\ &= 2\left(\psi - \frac{1}{2}\right) \quad \left( \psi \geq \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\omega_2 = 1 - \omega_1$$

正接関数変換を併用した CIVA 法による高精度移流計算によっても, 解析ステップの進行に伴い物体境界近傍における VOF 関数の中間密度領域が次第に拡大する恐れがある. そのため, 本解析では所定のステップ間隔毎に VOF 関数値の再初期化を実行する<sup>7)</sup>. 具体的には  $\psi = 0.5$  を閾値として, それ以上の値の領域では  $\psi = 1$  に, それより小さい領域では  $\psi = \psi_{\min}$  に再設定する.

本解析は大変形問題の定式化の下に実施する. したがって, トポロジー最適化計算では, 1 つのトポロジー ( $\psi$  の分布) の下に一連の荷重増分解析を行い, 最終コンプライアンスに基づき  $\psi$  の更新を実施し, 同様の処理を繰り返すことで最適形状を導出することとなる. この際に, 比較的初期の最適化過程において, 細い部材を有する複雑なトポロジーが現れる傾向にある. この場合, 荷重増分の段階で, 部材の座屈や, 複雑な境界近傍におけるひずみの集中化等が発生し, 有限要素解析が不安定になる恐れがある. そのため, 比較的初期の最適化過程では荷重増分を最初の 1 ステップにとどめ, その結果に基づきトポロジー更新を進めることとした.

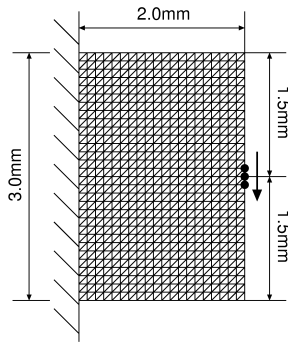


Fig. 1 Analytical conditions (Ex.1)

また、増分解析には長時間を要するので、1つの移流速度のもとで複数回の移流計算を行った。なお、移流計算における増分パラメータ  $\Delta t$  は、安定化を図る目的で次式に基づき適宜設定した。

$$\Delta t = \frac{Ch_{\min}}{|\mathbf{v}|_{\max}} \quad (29)$$

ここで、 $|\mathbf{v}|_{\max}$  は式 (21) で示した移流速度の絶対最大値、 $h_{\min}$  は最小要素寸法、 $C$  は Courant 数であり、本解析では  $C = 0.5$  とした。

### 5.3 自由端中央に荷重された構造

$2\text{mm} \times 3\text{mm}$  の矩形設計領域の右端中央に位置する3節点に鉛直下向きに荷重を加えた。なお、左端は完全拘束としている。要素分割と合わせ、解析条件を Fig.1 に示す。解析にあたり、 $\psi$  の再初期化は 10step 毎とし、20step まで最適化計算を繰り返した。許容最大面積 (体積)  $V_{\max}$  は初期面積の 50% とした。また、荷重増分は合力で  $\Delta p = 0.003(N)$  とし、最適化 10step までは 1回、それ以降は 40 回の増分計算を行った。さらに、移流計算は 10step まで 1回の感度解析当り 5回、それ以降は 3回とした。

最適化過程におけるトポロジー変化の様子を Fig.2 に示す。図中黒い領域は材料が分布している領域を示している。“0 step” に示すように、初期トポロジーは領域中央に円孔を開けたものとしている。トポロジー変化は比較的

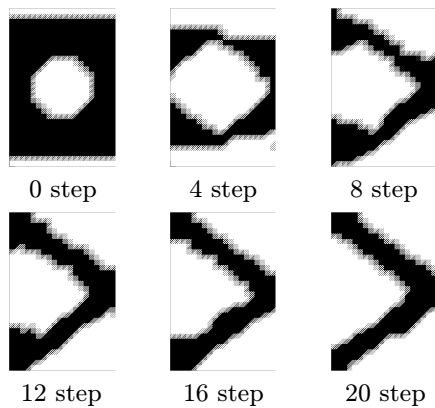


Fig. 2 Topological change during optimization process (Ex.1)

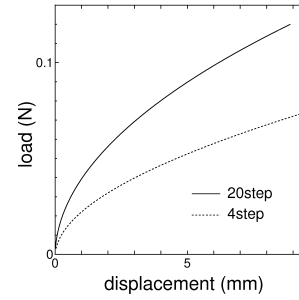


Fig. 3 Load-displacement curves (Ex.1)

速やかに二部材トラスに収束している。4step 目と 20step 目の形状における荷重-変位曲線を Fig.3 に示す。最適化により剛性が大幅に向上していることが確認できる。

次に  $\psi$  の値によらず、全領域に非圧縮超弾性体モデルを適用した場合の結果を Fig.4 に示す。Fig.2 と比べると形状の変化が途中で停止し、それ以降進展していないことがわかる。

提案手法による圧力処理の有効性を確認する目的で、初期形状を対象に自由端中央に水平方向に荷重した。その下での圧力分布を Fig.5 に示す。(a) は本手法により空孔域を圧縮性弾性体で置換した場合、(b) は非圧縮超弾性体のままとした場合である。本手法の適用により空孔内の圧力がほぼ完全に除去できており、有効に機能していることが確認できる。

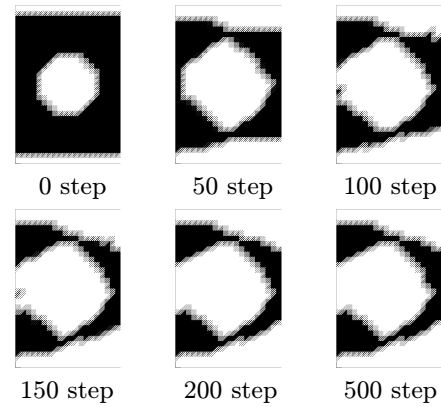
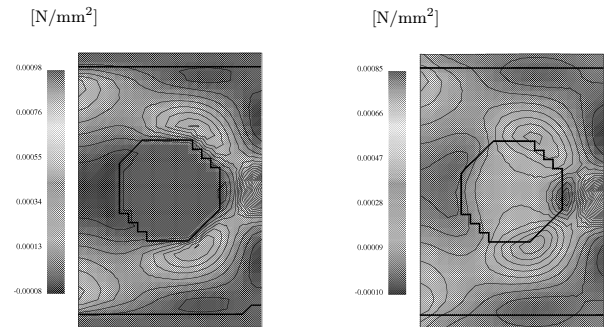


Fig. 4 Topological change for incompressible voids



(a) compressible void (b) incompressible void

Fig. 5 Pressure distribution

### 5.4 下端中央に荷重された単純支持構造

6mm × 2mm の矩形領域下端中央に鉛直下向きに荷重を加えた。解析条件を Fig.6 に示す。解析では対称性により右半分のみ分割している。ψ の再初期化は最適化計算で 10step 毎とし、40step まで最適化を行った。Vmax は初期面積の 50% とし、荷重増分は Δp = 0.003(N) とし、最適化 20step までは 1 回、それ以降は 10 回の増分計算を行った。移流計算は 20step までは 1 回の感度解析当り 4 回、それ以降は 2 回とした。

最適化過程におけるトポロジー変化の様子を Fig.7 に示す。初期トポロジーは領域内に 4 × 4 個の矩形孔を開けたものとなっている。最終的にトラス状の構造形式が得られており、前出の解析例と合わせ、線形弾性問題を対象に得られているものと同様のトポロジーとなっている<sup>2),7)</sup>。また、中間密度域は適切に除去されており、部材域が明瞭に捉えられている。11step 目と 40step 目の形状における荷重-変位曲線を Fig.8 に示す。5.3 の解析例同様に、最適化により剛性が大幅に向上しており、本手法の妥当性が確認できる。

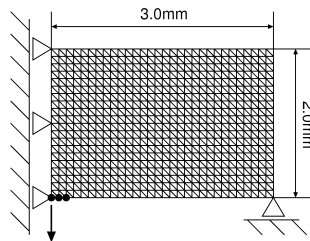


Fig. 6 Analytical conditions (Ex.2)

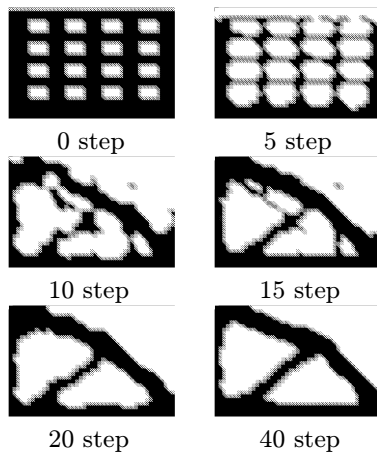


Fig. 7 Topological change during optimization process (Ex.2)

### 6. おわりに

非圧縮超弾性体を対象に、トポロジー最適化法を構成した。密度法において問題となる中間密度域の分布を低

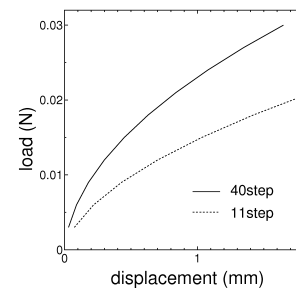


Fig. 8 Load-displacement curves (Ex.2)

減する目的で VOF 法を用い、移流に基づく最適形状の導出を行った。当該手法の下、空孔域の不合理な圧力発生を除去するため、非圧縮超弾性体と圧縮性線形弾性体との重み平均により有限要素方程式、および最適化手順を構成した。解析結果に基づき、提案手法の有効性を確認した。今後は具体的問題として、鉄道用ゴムパッドにおける凹凸形状の最適化に向け、さらに検討を進めて行くつもりである。

### 参考文献

- 1) Abe, K., Nishinomiya, Y. and Koro, K.: Topology optimization of incompressible hyperelastic materials subjected to large deformations, Proc. of APCOM07-EPMECS XI, CD-ROM, 2007.
- 2) Abe, K. and Koro, K.: A Topology optimization approach using VOF method, Struct. Multidisc. Optim., 31.(6), 470-479, 2006.
- 3) Hirt, C W. and Nichols, B.D.: Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, J. Comput. Phys., 39, 201-225,1981.
- 4) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A-M.: A level-set method for shape optimization, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 334,1125-1130, 2002.
- 5) 渡辺浩次, 久田俊明: 超弾性体の混合型有限要素解析に関する基礎的検討, 機械学会論文集 (A 編), 62(595), 157-164, 1996.
- 6) Klaas, O., Maniatty, A. and Shephard, M.S.: A stabilized mixed finite element method for finite elasticity, Comput Methods Appl Mech Eng., 180, 65-79, 1999.
- 7) 西宮裕騎, 阿部和久, 紅露一寛: 三角形・四面体要素を用いた VOF 法によるトポロジー最適化法, 応用力学論文集, 9, 353-363, 2006.
- 8) Tanaka, N.: Development of a highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations I, Integration of Gridless, Particle and CIP method, Int.J. Num. Methods Fluids, 30, 957-976, 1999.
- 9) Yabe, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomials interpolation : I. One-dimensional solver, II. Two- and three-dimensional solvers, Comput. Phys. Commun., 66, 219-242, 1991.
- 10) Xiao, F., Yabe, T., Ito, T. and Tajima, M.: An algorithm for simulating solid objects suspended in stratified flow, Comput. Phys. Commun., 102, 147-160, 1997.
- 11) Buhl, T., Pedersen, C.B.W. and Sigmund, O.: Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization, Struct. Multidisc. Optim., 19, 93-104, 2000.