

# 可変的パラメトリック射影フィルタによる円筒シェル逆問題解析

## Inverse Analysis of Circular Cylindrical Shell Structure by Variable Parametric Projection Filter

里田 啓<sup>1)</sup>, 遠藤 龍司<sup>2)</sup>, 登坂 宣好<sup>3)</sup>

Akira Satoda, Ryuji Endo and Nobuyoshi Tosaka

- 1) 千代田アドバンスソリューションズ (株) (〒221-0031 神奈川県横浜市神奈川区新浦島町1-1-25 テクノエイブ100ビル  
E-mail: akira.satoda@chas.chiyoda.co.jp)
- 2) 職業能力開発総合大学校 建築システム工学科 (〒229-1196 神奈川県相模原市橋本台4-1-1 E-mail: endo@uitech.ac.jp)
- 3) 東京電機大学 未来科学部 建築学科 (〒101-8457 東京千代田区神田錦町2-2, E-mail: nobtsk@cck.dendai.ac.jp)

Variable parametric projection filter (VPPF) is proposed as inverse analysis procedure to identify the system rigidity and water level of cylindrical shell structure. Parametric projection filter has been known as one of effective filter like the Wiener filter and projection filter. As the characteristics of the parametric projection filter, the regularization parameter to assure the stable filtering process is included. In the conventional inverse analyses using the filtering algorithm based on parametric projection filter, an arbitrary value has been given for the regularization parameter. In this study, the procedure to give the regularization parameter computationally in each filtering step is presented instead of an arbitrary value. The effectiveness of proposed VPPF is shown through some numerical calculations.

**Key Words** VPPF, Regular parameter, Inverse analysis, Shell structure, System rigidity, Water level

### 1. はじめに

円筒シェルとしてモデル化されるタンク類等の構造物に対して、新規施工後の性能評価あるいは既設物の現状把握、評価を行うことは望ましい。こうした行為は設計段階の順解析に対して逆解析として定式化される。よく知られているように、逆解析には不適切性が内在し、特に未知パラメータの数が増加することにより不適切性が顕著に現れるため様々な逆解析手法が検討されている。

フィルタ理論に基づくフィルタリングアルゴリズムを逆解析手法とした場合の有効性は多くの逆問題解析を通して報告されている<sup>2)</sup>。筆者らはフィルタリングアルゴリズムを構成する際、復元作用素としてカルマンフィルタとして知られている Wiener フィルタのみならず、射影フィルタ及びパラメトリック射影フィルタ (PPF) を用い、それぞれの特徴を報告してきた。これらの中でも PPF は正則化パラメータを含み正則化パラメータの値により逆解析の安定性が左右されることも合わせて報告した<sup>3)</sup>。

本報では PPF に着目し、正則化パラメータを計算的に決定する可変パラメトリック射影フィルタ (VPPF) の手法を示し<sup>4)</sup>、逆解析の対象として連続体の例として円筒シェルを取りあげ、順解析によりシェルの半径方向変位を求め観測データとした場合に対し、円筒シェルの剛性と液深を同定するシステム同定解析への VPPF の有効性と最適性について他のフィルタとの比較を通して検討することを目的とする。本状態量はそれぞれ単独でも同定可能であるものの、全く物理的意味の異なる 2 つの状態量を同時に同定し、他のフィル

タによる逆解析結果との比較から有効性を述べるものである。

### 2. フィルタ理論を用いた逆問題解析

#### 2.1. 解析対象モデル及び数理モデルの構成

本報で、解析対象とするモデルの諸元を Fig.1 に示す。

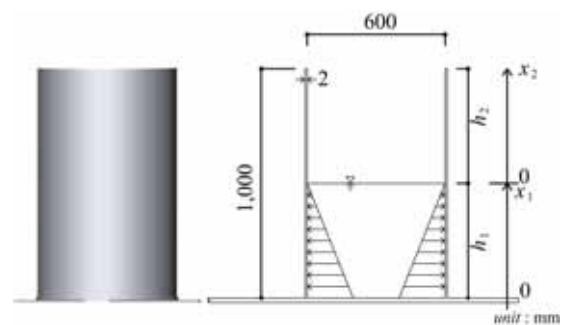


Fig.1 Circular cylindrical shell as analytical model

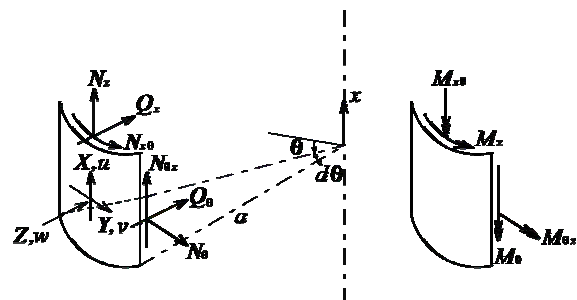


Fig.2 Shell element

水深に比例する静的水圧が作用する円筒シェルの支配方程式は Fig.2に示す変位と応力の方向に基づき、次式の様にと与えられる。

$$Da^2 w_{,xxxx} + Etw = -a^2 \rho (h_1 - x_1) \quad (1)$$

ここに、 $w$  はシェルの半径方向変位、 $a$  はシェル中立軸までの半径、 $t$  は肉厚で一定であり、下付コンマは  $x$  方向の偏微分を意味する。また、 $\rho$  は水密度、 $h_1$  及び  $x_1$  はシェルの底部を基準とする軸方向の高さを意味する。さらに  $E$  はヤング係数、 $D$  は曲げ剛性であり、 $\nu$  をポアソン比として次式で表される。

$$D = Et^3 / 12(1 - \nu^2) \quad (2)$$

偏微分方程式(1)は解析的に解くことが可能であり、外力の作用する部分と作用しない部分を分離すると変位に関する解は次式の様にと求められる。

$$w_1 = e^{-\kappa \xi_1} (c_1 \cos \kappa \xi_1 + c_2 \sin \kappa \xi_1) + e^{\kappa \xi_1} (c_3 \cos \kappa \xi_1 + c_4 \sin \kappa \xi_1) - \frac{\rho a^2}{Et} (h_1 - x_1) \quad (3)$$

$$w_2 = e^{-\kappa \xi_2} (c_5 \cos \kappa \xi_2 + c_6 \sin \kappa \xi_2) + e^{\kappa \xi_2} (c_7 \cos \kappa \xi_2 + c_8 \sin \kappa \xi_2) \quad (4)$$

ここに  $\xi_1$ 、 $\xi_2$  及び  $\kappa$  は次式で表される。

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{a}, \quad \kappa = \left( \frac{Eta^2}{4D} \right)^{1/4} \quad (5)$$

また、 $c_1 \sim c_8$  は積分定数を意味する。

解析的に求められた変位式を用い、各応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{x_1} &= -Dw_{1,xx}, & M_{x_2} &= -Dw_{2,xx} \\ Q_{x_1} &= M_{x_1,x}, & Q_{x_2} &= M_{x_2,x} \\ N_{\theta_1} &= Etw_1 a^{-1}, & N_{\theta_2} &= Etw_2 a^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、下付1は液体が入っている部分、2は上部を意味し、式(3)、(4)及び(6)を用いて解析的に変位及び各応力を導くためには積分定数である  $c_1 \sim c_8$  を決定する必要があり、連続条件及び境界条件を以下のように設定する。

シェル全体の応力を求めるためには静水圧の作用する部分と作用しない部分を連続条件により一体化する必要がある。連続条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [w_1]_{x_1=h_1} &= [w_2]_{x_2=0}, & [\theta_1]_{x_1=h_1} &= [\theta_2]_{x_2=0} \\ [Q_{x_1}]_{x_1=h_1} &= [Q_{x_2}]_{x_2=0} \end{aligned} \quad (7a)$$

$$[M_{x_1}]_{x_1=h_1} = [M_{x_2}]_{x_2=0}$$

さらに、シェル底部を固定端、シェル頂部を自由端とすることにより力学的境界条件が以下のように与えられる。

$$[w_1]_{x_1=0} = 0, \quad [\theta_1]_{x_1=0} = 0$$

$$[Q_{x_2}]_{x_2=h_2} = 0, \quad [M_{x_2}]_{x_2=h_2} = 0 \quad (7b)$$

これらの連続条件および境界条件から8元の連立方程式が構成され、積分定数  $c_1 \sim c_8$  が決定される。決定された積分定数を式(3)、(4)及び式(6)に適用することにより、円筒シェルのたわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力及び軸力を解析的に導くことができる。

## 2.1 逆解析アルゴリズム

Fig.1に示した円筒シェルの材料定数及び内部の液体の水位を同定するために、シェルの特定の点の変位を観測データとするフィルタリングアルゴリズムを構成する。フィルタリングアルゴリズムは状態方程式、観測方程式、フィルタ方程式から構成される。本逆解析は、状態量である曲げ剛性と観測データである変位の関係は非線形であることを考慮して拡張型のフィルタリングアルゴリズムを以下のように構成する。

フィルタリングアルゴリズムを構成する各方程式は以下のように与えられる。

・状態方程式

$$z_{t+1} = I z_t \quad (I \text{ は単位行列}) \quad (8)$$

・観測方程式

$$w_t = M_t z_t + v_t \quad (9)$$

ここに  $M_t$  は次式で与えられる感度マトリックスである。

$$M_t = \left( \frac{\partial m_t(z_t)}{\partial z_t} \right)_{z_t = \hat{z}_{t-1}} \quad (10)$$

・フィルタ方程式

$$\hat{z}_{t+1/t} = \hat{z}_{t/t-1} + B_t [w_t - m_t(\hat{z}_t)_{t/t-1}] \quad (11)$$

ここで、 $B_t$  はフィルタゲインであり、Wienerフィルタ、射影フィルタ及びパラメトリック射影フィルタのフィルタゲインは次のように与えられる。

・Wienerフィルタ

$$B_t = \hat{R}_{t/t-1} M_t^T (M_t \hat{R}_{t/t-1} M_t^T + Q)^{-1} \quad (12)$$

ここに、 $R_t$  は推定誤差共分散であり、次式で与えられる。

$$\hat{R}_{t/t} = \hat{R}_{t/t-1} - B_t M_t \hat{R}_{t/t-1} \quad (13)$$

・射影フィルタ

$$B_t = (M_t^T Q^{-1} M_t)^{-1} M_t^T Q^{-1} \quad (14)$$

・パラメトリック射影フィルタ

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{M}_t^T (\mathbf{M}_t \mathbf{M}_t^T + \gamma \mathbf{Q})^{-1} \quad (15)$$

各フィルタゲインに含まれる  $\mathbf{Q}$  は観測誤差共分散行列を表しており、この項が含まれていることで観測誤差を考慮したフィルタリングが可能となる。本逆解析では状態量  $z_t$  をフィルタリング  $t$  回目の材料定数及び水位、式(11)における  $m_t(z_t)$  が状態量  $z_t$  における変位となり、フィルタリング過程における状態量に対する変位について式(1)～式(7)を用いて計算し、 $w_t$  と  $m_t(z_t)$  が一致するまで逐次繰り返し計算することにより、材料定数及び水位の同定に関する逆解析が可能となる。

## 2.2 可変パラメトリック射影フィルタに基づく逆解析アルゴリズム

前節で述べたフィルタリングアルゴリズムに基づき、式(15)で示したパラメトリック射影フィルタに含まれる正規化パラメータ  $\gamma$  を計算的に決定した値を用いる、いわゆる可変パラメトリック射影フィルタに基づくアルゴリズムを構成する。

パラメータ  $\gamma$  を決定するにあたり、近似的に状態量は観測量に比例するものと仮定し、初期状態量は次式のような線形近似により表すことにする。

$$\hat{\mathbf{z}}_{0/-1} \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{y}}_{0/-1} = \mathbf{A}_0 \mathbf{m}_0(\hat{\mathbf{z}}_{0/-1}) \quad (16)$$

一方、フィルタ方程式の構成にあたって、先の線形近似による表現を用いると次式のように書くことができる。

$$\hat{\mathbf{z}}_{0/-1} = \mathbf{B}_0 \hat{\mathbf{y}}_{0/-1} \quad (17)$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{M}_0^T (\mathbf{M}_0 \mathbf{M}_0^T + \gamma \mathbf{Q}_0)^{-1} \quad (18)$$

ここに  $\mathbf{B}_0$  はパラメトリック射影フィルタのフィルタゲインを意味する。式(16)と(17)で表した状態量は等しいことから、以下の恒等的な関係を得ることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{y}}_{0/-1} &= \mathbf{B}_0 \hat{\mathbf{y}}_{0/-1} \\ &= (\mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{M}_0 + \gamma)^{-1} \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_0^{-1} \hat{\mathbf{y}}_{0/-1} \end{aligned} \quad (19)$$

$\gamma$  を決定するために式(19)よりベクトルの内積とノルム空間から表される次式を得る。

$$\gamma_0 = \frac{\hat{\mathbf{z}}_{0/-1} \cdot \mathbf{b}_{0/-1}}{\|\hat{\mathbf{z}}_{0/-1}\|^2} \quad (20)$$

ここに

$$\mathbf{b}_{0/-1} = \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_0^{-1} (1 - \mathbf{M}_0 \mathbf{A}_0) \hat{\mathbf{y}}_{0/-1} \quad (21)$$

である。こうして求められた  $\gamma$  を用いた  $\mathbf{B}_0$  を復元作用素とし、次式により  $z_{0/1}$  を求めることになる。

$$\mathbf{z}_{0/1} = \mathbf{z}_{0/0} + \mathbf{B}_0 (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_{0/0}) \quad (22)$$

式(22)より求めた  $z_{0/1}$  を更新することにより、改めて初期値とし、式(22)の関係を用いて  $\gamma_1$  を決定する。これらの計算を  $\gamma$  が収束するまで繰り返し実施することによりフィルタリング1回目に用いる  $\gamma$  を決定する

ことができる。

しかし、未知パラメータが多くなることや状態量である曲げ剛性と観測量である半径方向変位の値とに大きな開きがあること等によって繰り返し計算が不安定になる。そこで、特定の一成分に着目して上式をスカラ表現した形を用いて  $\gamma$  を決定する。各フィルタリングステップにおいて以上の繰り返し計算により決定した  $\gamma$  をそれぞれ用いることにより可変パラメトリック射影フィルタが構成される。

## 2.3 材料定数及び水位の同定解析

フィルタを駆動するためには初期状態量、観測データ、観測誤差共分散を決定することが必要である。そこで、初期状態量を水深に関しては満水状態、曲げ剛性に関してはアルミニウムと鋼材の材料定数のほぼ中間である値  $8.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}$  とする。観測データはシェル下端部から  $5 \text{ cm}$ 、 $10 \text{ cm}$  の点の半径方向変位を用いる。観測データの一例として水位が  $40 \text{ cm}$ 、 $60 \text{ cm}$  および  $80 \text{ cm}$  の順解析により求めた観測データを Table 1 に示す。また、観測誤差共分散は観測データの  $5\%$  を標準偏差とする誤差を仮定する。

Table 1 Observation data obtained by forward analysis.

Water level	Observation data (5cm)	Observation data (10cm)
40cm	-0.002256cm	-0.001879cm
60 cm	-0.003538cm	-0.003132cm
80 cm	-0.004820cm	-0.0043853cm

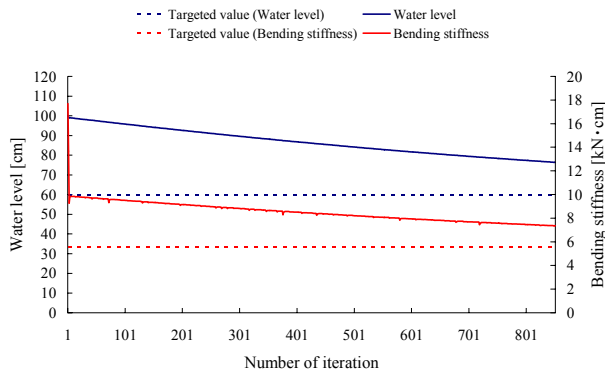
## 3. 材料定数及び水位の同定解析結果と考察

先に述べた4種類のフィルタに基づくアルゴリズムを逆解析手法とし、材料定数と水位の同定解析を行った。本報では内部の水位を  $10 \text{ cm}$  から  $100 \text{ cm}$  まで  $10 \text{ cm}$  刻みと同定解析を行うことにより、各フィルタリングアルゴリズムの適応性について検討を行った。

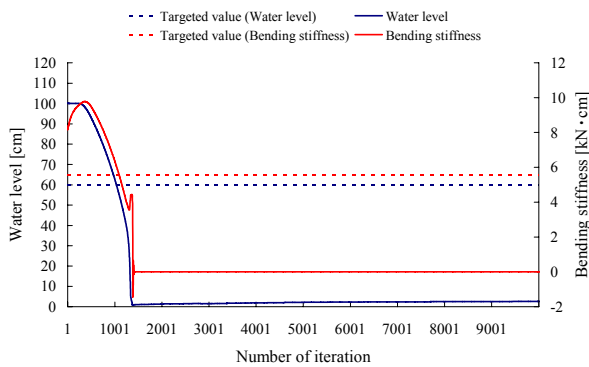
解析結果の一例として水位を  $60 \text{ cm}$  に仮定した時の各フィルタの同定結果を Fig.3 に示す。なお、パラメトリック射影フィルタにおいてはパラメータ  $\gamma = 10^{-1}$ 、 $10^4$  として設定したときの同定結果である。また、いずれのグラフも横軸はフィルタリング回数であり、縦軸の左側にフィルタリング過程における水位、右側に曲げ剛性を表している。

それぞれのフィルタに対する結果の考察は次のようになる。まず、Wiener フィルタを用いた場合は微小な状態量の変化しか得られず目標値に収束することはなく同定は不可能であった。射影フィルタを用いた場合は内部の水位が高くなると状態量は目標値近傍には達するが収束せず精度良い同定は不可能であった。パラメトリック射影フィルタを用いた場合はパラメータ  $\gamma$  の選択により同定可能であるものと不可能であるものが存在する。パラメータ  $\gamma$  を  $10^{-1}$  に設定した場合はフィルタリング計算が不安定となり、同定が不可能であった。一方、 $\gamma$  を  $10^4$  に設定した場合は、目標値に収束するまで多くの繰り返し計算を必要とするが同定が可能であった。本報では、例示を割愛したが、 $\gamma$  の値が  $10^2$  から  $10^5$  の間であれば同定が可能であったことを付記しておく。これより、パラメータ  $\gamma$  は状態量が

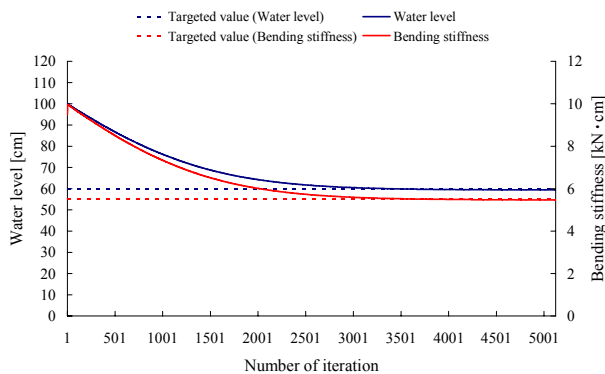
目標値を探索する感度に関係しており、正規化パラメータの名が示す通り  $\gamma$  の値により収束の安定化を図る効果があると考えられる。



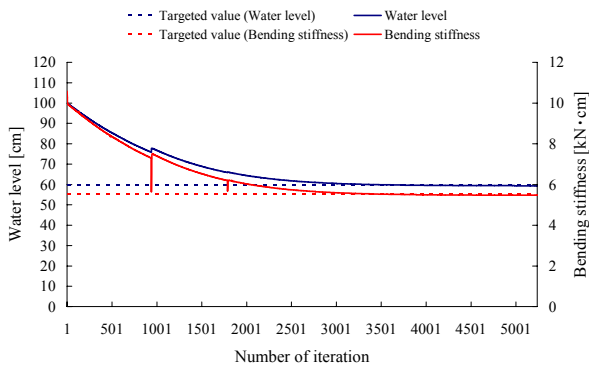
(a) Projection filter



(b) Parametric projection filter ( $\gamma=10^{-1}$ )



(c) Parametric projection filter ( $\gamma=10^{-4}$ )



(d) Variable parametric projection filter

Fig.3 Results of identification (using experimental value)

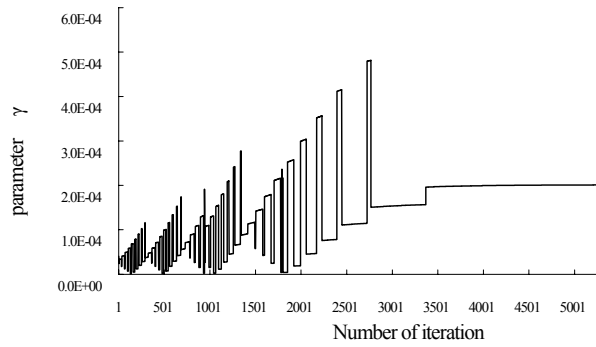


Fig.4 Property of regularization parameter  $\gamma$

本研究において中心的なアルゴリズムとしての変数パラメトリック射影フィルタを用いた場合は、各フィルタリングステップにおいて有効な  $\gamma$  を探索し、随時更新することで安定した繰り返し計算を行い、目標値に収束し、精度良く同定された。Fig.4に各フィルタリングステップにおけるパラメータ  $\gamma$  の推移を示す。最終的に  $\gamma$  は  $10^{-4}$  付近に収束する。このこととパラメトリック射影フィルタの  $\gamma$  が  $10^{-2}$  から  $10^{-5}$  の範囲で同定可能であったことより、可変パラメトリック射影フィルタでは自動的に最適な  $\gamma$  を決定することが可能であることが分かった。これより可変パラメトリック射影フィルタは任意の  $\gamma$  を設定するパラメトリック射影フィルタより有効であると考えられる。

#### 4. まとめ

内部液体を含む円筒シェルに関する逆問題解析から得られた知見は以下のようにまとめられる。

- (1) Wienerフィルタを逆解析手法とした場合、状態量の変化が微小なため、同定が不可能であった。
- (2) 射影フィルタを逆解析手法とした場合、内部の水位が大きくなると目標値近傍には達するが収束しないため精度良い同定は不可能であった。
- (3) パラメトリック射影フィルタを逆解析手法とした場合、 $\gamma$  の設定により同定が可能であるが、 $\gamma$  の設定には多くの解析による探索が必要である。
- (4) 可変パラメトリック射影フィルタを逆解析手法とした場合、極めて精度良く同定が可能であった。また  $\gamma$  の人為的および経験的な設定の必要がないことから、可変パラメトリック射影フィルタの有効性が確認できた。

#### 参考文献

- 1) Wilhelm Flügge : Stresses in Shells 2nd Edition , 1973
- 2) 坪井善勝 : 連続体力学序説, 産業図書株式会社, 1977
- 3) 登坂宣好, 遠藤龍司, 武藤俊広 : フィルタ理論を用いた塔状トラスの構造損傷同定, 応力論文集, 土木学会, pp.155-165, Vol.7, 2004
- 4) 里田啓, 遠藤龍司, 登坂宣好 : 円筒シェルの材料定数の同定解析, 計算力学講演論文集, 日本機械学会, pp.133-134, Vol.8, 2005