計算数理工学論文集 Vol.7, No. 2 (2008年3月), 論文No. 09-080317 JASCOME

可変的パラメトリック射影フィルタによるフレーム構造物の損傷同定解析

Damage Identification Analysis of Frame Structure by Variable Parametric Projection Filter

登坂 宣好[1] , 遠藤 龍司[2]

Nobuyoshi Tosaka and Ryuji Endo

1) 東京電機大学 未来科学部 建築学科 (〒101-8457 東京千代田区神田錦町2-2, E-mail: nobtsk@cck.dendai.ac.jp)
2) 職業能力開発総合大学校 建築システム工学科 (〒229-1196 神奈川県相模原市橋本台4-1-1 E-mail: endo@uitec.ac.jp)

The structural damage identification analyses of 5-story frame model were performed by filtering algorithms as a frame work of inverse problem. As an inverse analysis procedure, filtering algorithm based on the parametric projection filter is employed to detect the structural damage of a frame model defined by the reduction of lateral stiffness. The parametric projection filter includes the parameter γ to be regularized the filtering process. In this study, a new treatment of the above parametric projection filter is developed. We construct filtering algorithm with use of the variable parameter γ determined automatically based on the linear assumption between state vector and observation vector at first step. The effectiveness of variable parametric projection filter is shown through numerical calculations.

Key Words Damage Identification, Variable PPF, Frame Structure, Experimental Results, Natural Frequencies

1．はじめに

構造損傷同定問題を代表的な例とする逆問題は，その順問題が線形問題で解の唯一性や安定性が成立する場合でも，それらの性質が保障されない，いわゆる非適切問題（ill-posed problem）となることが知られている[1]．

そこで，このような逆問題を解くには何らかの適切化または正則化手法(regularization technique) を導入しなければならない．正則化手法として様々な手法が知られているが，特に Tikhonov の正則化が多用されている[1]．

これまで逆問題の解析に，Kalman フィルタを始めとするフィルタ理論を適用する研究を続けてきた．このフィルタ理論の中でもパラメトリック射影フィルタ（parametric projection filter; PPF)理論[2]と Tikhonov の正則化手法との関連に注目し，PPF に含まれるパラメータγが正則化パラメータとしての役割を果たすことを明らかにした[3]．PPF を逆解析に適用する際には，最適なパラメータの選定が必要となる[4)~6)]．

そこで，本論文ではこのパラメータγをひとたび設定したら固定することなくフィルタリング計算過程で可変的に変化させて行くことによって，パラメータの選定という問題点が解決できるような新しいフィルタリングを構成し，“可変的フィルタ理論”とそのフィルタリングアルゴリズムを提案することが目的である．

本研究では，この理論とフィルタリングを示し，5 層フレーム構造モデルの損傷同定問題に関して，実測から得られた観測データとしての各モードに対応する固有振動数と観測誤差を用いた逆解析結果から提案した可変的パラメトリック射影フィルタ(Variable parametric projection filter; VPPF)の適用性と有効性示す．

2007 年 12 月 20 日受付，2008 年 2 月 8 日受理

2. 可変的フィルタ理論

2.1 数理モデル

逆問題を離散的立場から取り扱うものとする．つまり，推定または同定すべき未知量を有限次元のベクトルとすると，その逆問題の数理モデルは次のような簡単なモデルとして与えることができる．

・ 観測方程式（システム方程式）

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\upsilon} \tag{1}$$

・ 推定方程式（復元方程式）

$$\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \tag{2}$$

ここでベクトル $\mathbf{z}$ は推定または同定すべき原ベクトル，$\mathbf{y}$ は観測ベクトル，$\tilde{\mathbf{z}}$ は $\mathbf{z}$ に対する推定ベクトル，$\boldsymbol{\upsilon}$ は観測に伴い混入する雑音ベクトル，行列 $\boldsymbol{M}$ は観測行列，$\boldsymbol{B}$ は推定行列（復元行列）とする．なお，上式中のベクトルは雑音ベクトル $\boldsymbol{\upsilon}$ の存在によりいずれも確率変数（ベクトル）として取り扱わねばならない．

この数理モデルにより，逆問題は，観測行列 $\boldsymbol{M}$ を与えてノイズ $\boldsymbol{v}$ の統計的性質と与えられた観測ベクトル $\boldsymbol{y}$ のもとで，次の評価基準を満たす z の最良な推定ベクトル $\tilde{z}$ を定めることになる[7].

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J(z,\tilde{z})} \rightarrow Min \tag{3}$$

したがって，この最小化問題の解 $\mathbf{z}$ を与えるような推定行列 $\boldsymbol{B}$ を具体的に構成しなければならない.

2.2 フィルタ理論

推定行列 $\boldsymbol{B}$ を線形不偏推定条件のもとで構成することにすると $\mathbf{z}$ の期待値 $\bar{z}$ を用いて推定ベクトルは次のように与えられる.

$$\tilde{z} = \bar{z} + \boldsymbol{B}\left\{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{M(\bar{z})}\right\} \tag{4}$$

したがって，推定行列 $\boldsymbol{B}$ が具体的に与えられれば，観測ベクトル $\boldsymbol{y}$ を用いて上式(4)から推定ベクトル $\tilde{\mathbf{z}}$ が決定できる.

この推定行列として，評価基準（3）の具体的な表現に対応して Wiener フィルタ，射影フィルタ，パラメトリック射影フィルタが存在している[1]．これらのフィルタの中でも本論で対象とするフィルタはパラメトリック射影フィルタである．このフィルタは次の評価基準に対して構成される[2].

評価基準：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J(B)} &:= tr\{(\boldsymbol{BM} - \boldsymbol{P})(\boldsymbol{BM} - \boldsymbol{P})^{T}\} \\ &\quad + \gamma\, \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{v}}\left[\|\boldsymbol{Bv}\|^2\right]\end{aligned} \tag{5}$$

パラメトリック射影フィルタ：

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{M} + \gamma\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{Q}^{-1} \tag{6}$$

ただし，$\gamma > 0$ は計測器における信号と雑音の関係を表す，いわゆる s/n としての意味を有するパラメータであり，$\boldsymbol{P}$ は射影行列とし，T は行列の転置操作を示し，tr は行列のトレース操作とし，雑音共分散行列 $\boldsymbol{Q}$ を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{Q} := E\left[\ \boldsymbol{vv}^T\ \right] \tag{7}$$

ここに，E は期待値を意味し，$\boldsymbol{v}$ は雑音ベクトルである.

2.3 可変的パラメトリック射影フィルタ

パラメトリック射影フィルタ(6)には，パラメータ γ が含まれているので，このフィルタを用いて推定を行うには γ の具体的な数値が必要となる．この数値の決定に関して，本論では以下に示すような可変的決定手法を導入することによって，任意の初期値からフィルタリングの計算過程を通して自律的に適切な数値を取ることのできるパラメトリック射影フィルタリングアルゴリズムを構成する.

線形不偏推定式(4)に基づくフィルタリングアルゴリズムにおけるフィルタ方程式とフィルタゲインは次のように与えられる.

フィルタ方程式：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_{k-1/k} = \tilde{z}_{k/k} &= \tilde{z}_{k/k-1} \\ &\quad + \boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{M}_k\tilde{z}_{k/k-1})\end{aligned} \tag{8}$$

フィルタゲイン：

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{M}_k^T\boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{M}_k + \gamma\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{M}_k^T\boldsymbol{Q}_k^{-1} \tag{9}$$

ただし，推定ベクトル初期値を次のように与えるものとする.

$$\tilde{z}_{0/-1} = \bar{z}_0 \tag{10}$$

ここで，初期ステップにおいて，推定ベクトル $\tilde{z}_{0/-1}$ は観測ベクトル $\boldsymbol{y}_0$ のみによって決定しているので，それらの間に比例関係が成り立つものと仮定すると次のように書くことができる.

$$\tilde{z}_{0/-1} \quad \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{y}_0 (= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{M}_0(\tilde{z}_{0/-1})) \tag{11}$$

ただし，行列 $\boldsymbol{A}_0$ は対角行列とする．一方，初期ステップのフィルタ方程式は式(8)より次のように書くことができる.

$$\tilde{z}_{0/-1} \quad \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{y}_0 \tag{12}$$

これらの式を等置することによって次式を得る.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{y}_0 &= \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{y}_0 \\ &= \left(\boldsymbol{M}_0^T\boldsymbol{Q}_0^{-1}\boldsymbol{M}_0 + \gamma\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{M}_0^T\boldsymbol{Q}_0^{-1}\boldsymbol{y}_0\end{aligned} \tag{13}$$

パラメトリック射影フィルタの表現(6)より，パラメータの初期値に関する次の関係式を得る.

$$\gamma_0\tilde{z}_{0/-1} = \boldsymbol{b}_0 \tag{14}$$

ただし，

$$\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{M}_0^T\boldsymbol{Q}_0^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{y}_0 \tag{15}$$

以上より，γ_0 は $\tilde{z}_{0/-1}$ と $\boldsymbol{b}_0$ との内積と $\tilde{z}_{0/-1}$ のノルムとを用いて次式で与えられる.

$$\gamma_0 = \frac{\tilde{z}_{0/-1}\cdot \boldsymbol{b}_0}{\left\|\tilde{z}_{0/-1}\right\|^2} \tag{16}$$

このように求められた γ_0 を含んだパラメトリック射影フィ

ルタを構成し，フィルタ方程式より $\tilde{z}'_{0/-1}$ を求める．これらの計算をγの値が収束するまで繰り返し，その収束値をフィルタリング 1 回目の値とする．同様にして各フィルタリングのステップにおいて収束値のγを決定することになる．

3. 構造損傷同定問題への適用

3.1 解析モデル

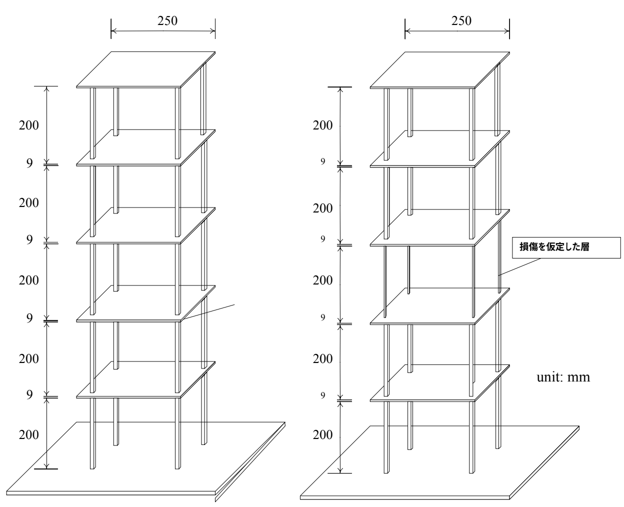
曲げおよびせん断応力による応力伝達機構を有する構造物として鋼製フレーム構造物モデルを例に可変的パラメトリック射影フィルタによる構造損傷同定解析を行う．本モデルは文献[5), 6)]において観測値に実測値を用いてウィナーフィルタ，射影フィルタおよび既存のパラメトリック射影フィルタによって損傷同定解析が報告されており，本解析でも同様のモデルを用いることにし，正常モデルと損傷モデルの例を Fig.1 に，またモデルの諸元を Table 1 示す．

本研究で採用したモデルにおいて，観測データと観測誤差は実験モード解析により測定されている．ここで実験モード解析について概説しておく．

実験モード解析は，固有振動数，固有モードおよび減衰比を求めるための実用的な実験解析手法であり，一般に加振実験から得られる周波数応答関数の測定と，モーダルパラメータの同定の２つのカテゴリーから成り立っている．加振実験では簡単な手法とされているインパクトハンマによる方法が用いられており，インパクトハンマに内蔵されているロードセルによる加振力と各層に設置された圧電型の加速度計からの応答によって周波数応答関数を求めモーダルパラメータを同定している．カーブフィットされた周波数応答関数のグラフを Fig.2 に示す．また Table 2(a)に本研究で採用した非減衰せん断型質点系とした数理モデルによる解析値を示す．また Table 2(b)に実験モード解析より得られた固有振動数の実測値，Table 3 に観測誤差として用いる実測された各モードにおける標準偏差と標本数を転記する．なお標準偏差は加振実験を繰り返したことと，実験モード解析の過程で周波数応答関数に対しカーブフィットを行う必用があるが，最適なカーブフィットを得るまでにはカーブフィットを繰り返すことになる．この過程からも誤差が生じ標本数を求めることが出来る．また，先に述べたフィルタリング過程における数理モデルとして質点系モデルに対する次式の行列式で与えられる非減衰の固有方程式を用いた．

$$\left| \boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} \right| = 0 \tag{17}$$

ここに $\boldsymbol{K}$ は水平剛性行列，$\boldsymbol{M}$ は質量行列，ω^2 は固有値を意味する．



(a)正常モデル　　(b)損傷モデル（第 3 層損傷）

Fig.1　5 層フレームモデル

Table 1 フレームモデルの諸元

柱 (mm)	6.0×6.0
階高 (mm)	200
プレート (mm)	250×250×9.0
E (kg/mm^2)	2.1×10^4
総重量(kg)	29.5

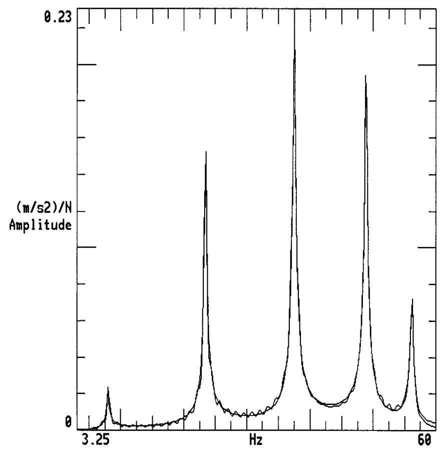


Fig.2　カーブフィットされた周波数応答関数

Table 2 50%剛性低下時の固有振動数 [Hz]

(a) 計算値

損傷	正常	1層	2層	3層	4層	5層
1次	7.707	6.58	6.741	6.99	7.31	7.59
2次	22.48	20.23	22.20	21.33	19.33	20.01
3次	35.40	33.50	33.25	31.68	34.93	30.91
4次	45.42	44.40	40.73	44.79	41.89	42.59
5次	51.75	51.47	50.29	48.15	49.30	50.95

(b) 実測値

損傷	正常	1層	2層	3層	4層	5層
1次	7.97	6.76	6.90	7.18	7.51	7.78
2次	23.45	20.70	22.68	22.09	20.05	20.82
3次	37.53	35.13	34.96	33.17	36.68	32.53
4次	48.85	47.08	42.99	47.56	44.17	45.11
5次	56.15	55.19	53.58	51.67	52.75	54.47

Table 3　観測データに関する標準偏差

モード次数	標準偏差 (Hz)	標本数
1次	0.013893	116
2次	0.004425	140
3次	0.010293	136
4次	0.021281	135
5次	0.014999	126

3.2 同定解析結果

Fig.3(a)〜(c)に逆解析例として1〜5層に損傷として50%の剛性低下を仮定した場合の同定結果と可変的に決定された各フィルタリングステップにおけるγの推移を示す.

なお，損傷位置の同定については評価値の概念を文献6)の手法に従い導入した．すなわち，評価値J_nが最も大きな値を示す層が損傷位置として同定されることになる.

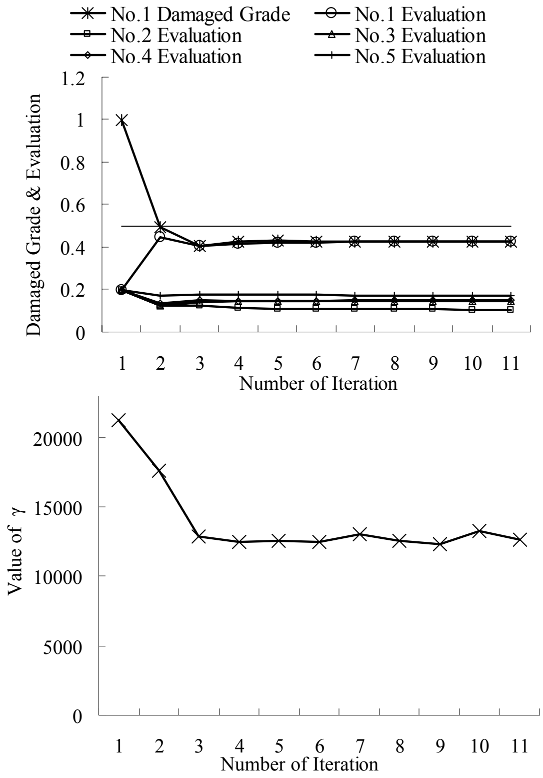
フィルタリングを駆動するための初期値としては正常剛性の5%の剛性低下を与えた．また，逆解析における収束条件は用いる観測値が実測値であることを考慮して，以下の式を満たしたときの推定値を同定値とした.

$$\left|\hat{z}_{t+1} - \hat{z}_t\right| \le 1.0 \times 10^{-4} \qquad (18)$$

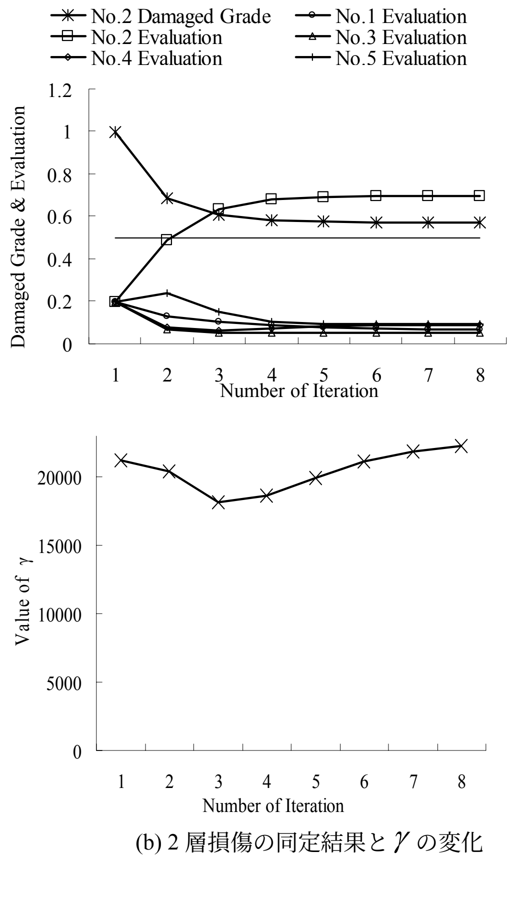
また可変パラメトリック射影フィルタにおいて，正則化パラメータを決定するための繰り返し計算の収束条件も先と同様の理由から，以下の式を満たしたときの値をフィルタリングステップにおけるγとした.

$$\left|\gamma_{t/t} - \gamma_{t/t-1}\right| \leqq 1.0 \times 10^{-4} \qquad (19)$$

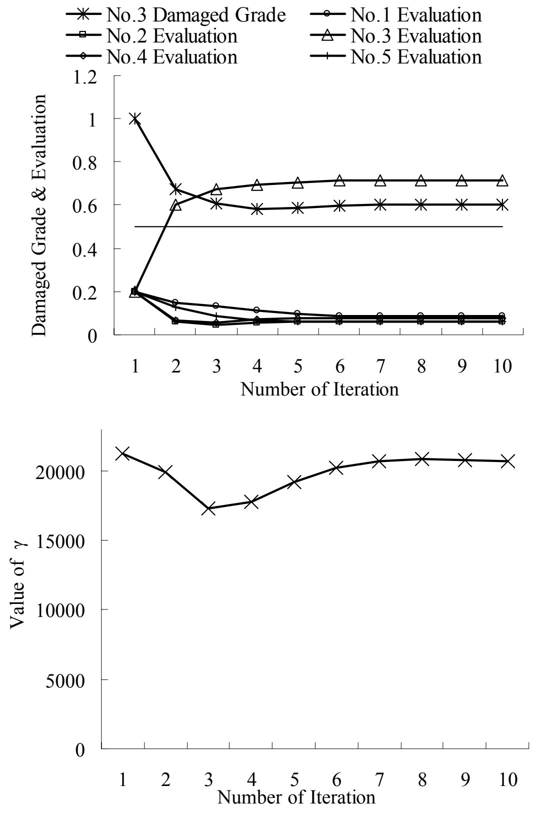
以下に示す結果の横軸はフィルタリング回数を，縦軸は損傷を仮定した状態量の無次元量と損傷位置の可能性を意味する評価値を表している.



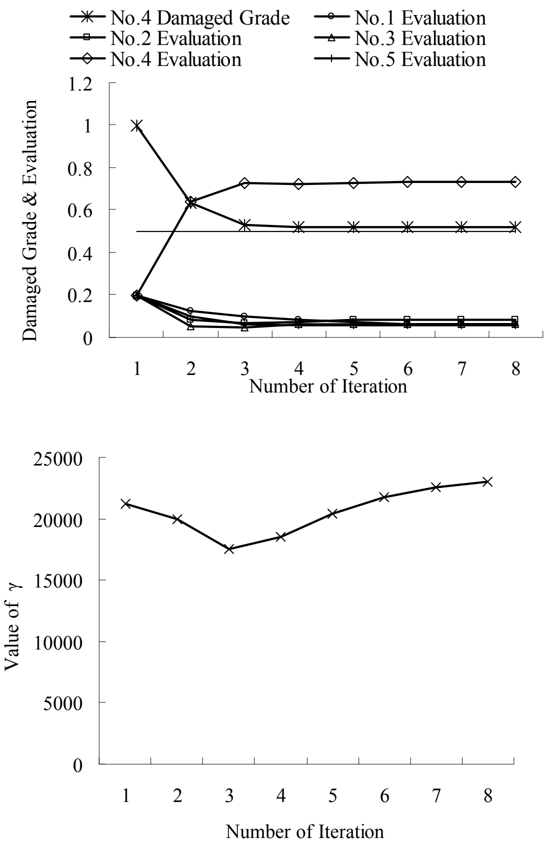
(a) 1層損傷の同定結果とγの変化



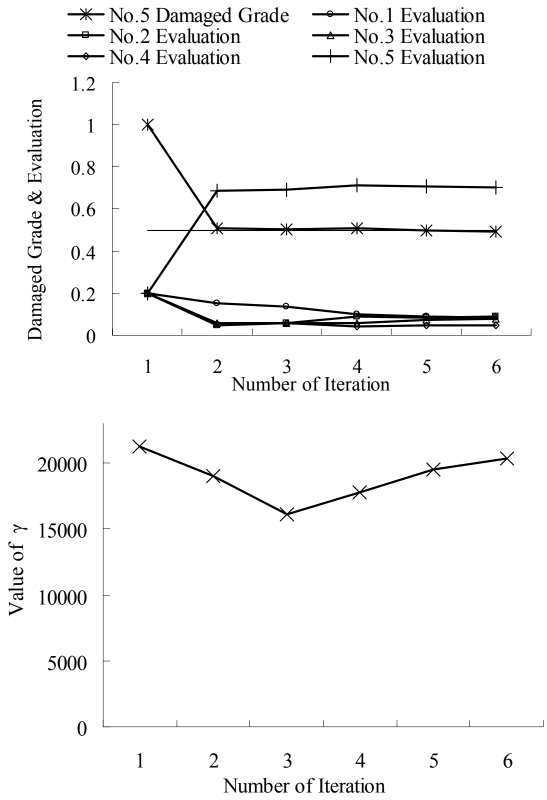
(b) 2層損傷の同定結果とγの変化



(c) 3 層損傷の同定結果と γ の変化



(d) 4 層損傷の同定結果と γ の変化



(e) 5 層損傷の同定結果と γ の変化

Fig.3　実測値を用いた損傷同定解析結果と各フィルタリングステップのパラメータ γ の推移

いずれの層に損傷を仮定した場合でも，損傷を仮定した状態量は仮定した 50%の剛性低下近傍に極めて安定した状態で収束している．仮定した剛性低下と多少の差が生じているのは測定された固有振動数と数理モデルとしての固有方程式から計算された値との誤差に起因するものである．

結果を表す各グラフにおいて各層の評価値(Evaluation)は，仮定した損傷層の各モードの固有振動数が観測データと一致することにより, 損傷層の評価値のみが 1.0 に近づくように設定されている．観測データに実測値を用いた場合には先にも述べたように微少ではあるもののフィルタリングの過程で数理モデルから計算された固有振動数に差が生ずる．これらの差は他の層の評価値を上昇させることになり，損傷を仮定した層の評価値の上昇を妨げる．しかし，損傷を仮定した層以外の層の評価値は損傷層を不明確にするほどの上昇は見られず，実測値を用いた同定解析において剛性低下および損傷層を明確に同定することが可能であった．また，観測データである固有振動数の標準偏差の値は極めて小さいため，観測誤差共分散行列の対角成分である分散値は非常に小さな値となる．そのため計算的に決定される γ は逆に大きな値となり，フィルタリング計算における収束安定性が確保されたものと考えられる．

これらの結果は文献より5),6)で述べた拡張kalmenフィルタ，射影フィルタおよび既存のパラメトリック射影フィルタの結果と比較すると，解の精度および安定性の両面から，本研究で提案した VPPF は構造損傷同定等の逆解析手法として極めて有効であるといえる．

４．おわりに

本論では，これまで逆問題へのフィルタリングアルゴリズムの適用において問題となっていたパラメトリック射影フィルタのパラメータγの決定について，自律的に定められる手法を示した．すなわち，パラメータγを可変的に変化させることによって新しい適応型のフィルタリングアルゴリズムが構成できた．本論ではそのアルゴリズムの適用例として比較的シンプルではあるが，実測されたデータを用いた構造損傷同定解析を示した．この程度の同定問題では正則化パラメータを各フィルタリングステップで計算しても同定に要する CPU 時間は問題にする必用がないほど極めて短時間であることを付記しておく．また，パラメータγの収束回数に関しては状態量の変化に依存し，本研究の場合は 10 回程度から始まり状態量が収束に近づくと２～3 回程度で収束する．

こうした結果に基づき，今後はさらに複雑な同定問題への適用を通してアルゴリズムの有効性を追求して行きたい.

参考文献

１） 登坂宣好，大西和榮，山本昌宏：逆問題の数理と解法, 東京大学出版会，1999

２） Oja,E.,H.Ogawa: Parametric Projection Filter for Image and Signal Restoration, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, ASSP-34, pp.1643-1653, 1986

３） 登坂宣好，遠藤龍司，川上善嗣：離散的逆問題における射影フィルタと適切化法，日本大学生産工学部第 32 回学術講演会講演梗概集，pp.73-76，1999

４） 遠藤龍司，登坂宣好，川上善嗣，塩田寿美子：パラメトリック射影フィルタに基づくアルゴリズムを用いた大型浮遊式海洋建築模型の損傷同定解析, 日本建築学会構造系論文集，第 559 号，pp.237－244，2002

５） R.Endo, N.Tosaka: Structural Damage Analysis of a Frame Structure Model using Filtering Algorithms, Proceedings 7th Civil-Comp. Paper 241,2004

６） 塩田寿美子，遠藤龍司，登坂宣好：フィルタ理論に基づくフレーム構造物の損傷同定解析, 日本建築学会構造系論文集，第 605 号，pp.95-102，2006

７） 登坂宣好：フィルタ理論による計算力学の逆問題，機械の研究，第 49 巻，第 1 号，pp.118-126，1997