

新しい感度解析を用いた境界要素法による音場形状の最適化 (2次元音場での検討)

A SHAPE OPTIMIZATION OF ACOUSTIC FIELDS VIA BEM WITH NEW SENSITIVITY ANALYSIS (STUDY ON 2-D ACOUSTIC FIELDS)

荒井 雄理¹⁾, 田中 正隆²⁾, 松本 敏郎³⁾

Youri ARAI, Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO

- 1) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: youri@artist.shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

This paper is concerned with a shape optimization of 2-dimensional acoustic fields with applying a new sensitivity analysis based on BEM, excluding influence of the fictitious eigenfrequency issue. In solving the external acoustic problem by the usual boundary integral equation, the accuracy of the numerical solution is violated at fictitious eigenfrequencies of the interior regions, which are included and do not violate. Present paper proposes a new sensitivity analysis to avoid this fictitious eigenfrequency problem by a dual use of boundary integral equations. The effectiveness of the proposed method to avoid the fictitious eigenfrequency issue is demonstrated in comparison with analytical solution. Furthermore, the validity of the proposed method is demonstrated through a shape optimization problem. Emphasis is placed on treatment of 2-D acoustic fields.

Key Words: Computational Mechanics, Boundary Integral Equation, Fictitious Eigenfrequency Problem, Sensitivity Analysis, Acoustics, Noise

1. はじめに

最適設計や逆問題の解析においては、設計変数に対する感度係数を精度よく効率的に計算することが必要となる⁽¹⁾。しかしながら、Helmholtz 方程式に支配され、無限の広がりをもつ外部音響問題を境界積分方程式を用いて解く際に、見かけの固有振動数問題が生じ、数値解の精度が低下する⁽²⁾⁽³⁾。境界要素法に基づいた直接微分法により感度係数を求める場合、境界積分方程式を解くことで得られる境界上の音圧、粒子速度を用いるため、これらの諸量の数値解精度が感度係数の精度に影響を及ぼす⁽⁴⁾。従って、見かけの固有振動数問題を回避した境界積分方程式を用いることが、高精度の感度係数を求めるのに必要である。

本報では、著者ら⁽⁵⁾が提案した見かけの固有振動数問題を回避する方法において用いられる2つの境界積分方程式を用いる。これを設計変数で微分した境界積分方程式を用いることで、設計変数の感度係数を高精度に計算する方法を提案する。2次元問題に対する提案手法の有効性を、解析解を求めることができる呼吸円筒の問題に本手法を適用して解くこ

とで確認する。次に、本手法による感度係数を用いて、最急降下法と境界要素法による音場の最適設計問題の例題を解析した結果を報告する。

2. 理論的背景

2.1. 境界積分表示

音場の支配微分方程式が以下の Helmholtz 方程式 (1) で与えられる2次元音響問題に対する境界要素法による定式化について簡単に説明する。

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) + f(x) = 0 \quad (1)$$

ここで、 $p(x)$ は音圧、 $f(x)$ は内部音場の集中音源等を表すソース項である。また、 k は波数であり c を音速、 ω を角振動数とすれば次式で表される。

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (2)$$

支配方程式 (1) に対して本研究では以下に示す結合境界積分方程式 (3) と、その結合係数を法線方向導関数境界積分方

程式に乗じた方程式 (4) の 2 つの境界積分方程式を境界要素解析に対して準備する。導出の詳細については文献 (5) を参照していただきたい。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - Q^*(x, y)) + \alpha (\bar{q}^*(x, y) - \bar{Q}^*(x, y)) \right\} \\ & \times p(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \bar{Q}^*(x, y)) \right. \\ & \times (p(x) - p(y)) - \alpha \bar{Q}^*(x, y) r_m(x, y) p_{,m}(y) \left. \right\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \left[\int_{\Gamma} \{ p^*(x, y) + \alpha (\bar{p}^*(x, y) - \bar{u}^*(x, y)) \} \right. \\ & \times v(x) d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \bar{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) \\ & \times d\Gamma(x) \left. \right] + I(p^*(x^s, y) + \alpha \bar{p}^*(x^s, y)) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Gamma} (\bar{q}^*(x, y) - \bar{Q}^*(x, y)) p(x) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \bar{Q}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho\alpha \left[\int_{\Gamma} (\bar{p}^*(x, y) - \bar{u}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \bar{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \right] \\ & + \alpha I\bar{p}^*(x^s, y) \quad (4) \end{aligned}$$

ここで x は観測点, y はソース点, ρ は媒質密度, $v(x)$ は境界節点の粒子速度, I は集中音源の強さであり, $(\bar{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial n(y)$, $p_{,m}$ は音圧の勾配, $r_m = x_m - y_m$, α は複素数の結合係数, n_m は外向き単位法線ベクトルの成分である。また, 基本解の各成分は以下のようになる。

$$p^*(x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (5)$$

$$q^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (6)$$

$$Q^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (7)$$

$$\bar{p}^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}^*(x, y) &= \frac{i}{4} k \left[k H_0^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \\ & \left. - H_1^{(2)}(kr) \frac{1}{r} \left\{ n_j(x) n_j(y) + 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right\} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\bar{u}^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (10)$$

$$\bar{Q}^*(x, y) = \frac{1}{2\pi r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) + n_j(x) n_j(y) \right\} \quad (11)$$

ここで H は Hankel 関数, i は虚数単位である。

以上導出された 2 つの境界積分方程式を併用して見かけの固有振動数問題を回避した音場の境界要素解析を行うことができる。

2.2. 感度係数の境界積分表示

本研究では, 感度係数の計算法として境界積分方程式を設計変数で微分して感度係数に関する境界積分方程式を導出し, それを境界要素で離散化して解く手法を採用する⁽⁵⁾。

音響問題の場合, 設計変数として物体の形状を規定するパラメータ, 周波数, 媒質密度, 境界上の音圧, 粒子速度, 集中音源の強さなどが考えられる。このような設計変数で境界積分方程式 (3), (4) を微分することにより, それぞれ感度係数に関する次式の積分方程式を得る。ただし, $(\dot{\cdot})$ は設計変数に関する微分を表す。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - Q^*(x, y)) + \alpha (\bar{q}^*(x, y) - \bar{Q}^*(x, y)) \right\} \\ & \times \dot{p}(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (\dot{q}^*(x, y) - \dot{Q}^*(x, y)) \right. \\ & \left. + \alpha (\dot{\bar{q}}^*(x, y) - \dot{\bar{Q}}^*(x, y)) \right\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - Q^*(x, y)) \right. \\ & \left. + \alpha (\bar{q}^*(x, y) - \bar{Q}^*(x, y)) \right\} p(x) d\dot{\Gamma}(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \bar{Q}^*(x, y)) (\dot{p}(x) - \dot{p}(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \bar{Q}^*(x, y) (r_{,m}(x, y) p_{,m}(y) + r_m(x, y) \dot{p}_{,k}(y)) \right\} \\ & \times d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (\dot{Q}^*(x, y) + \alpha \dot{\bar{Q}}^*(x, y)) (p(x) - p(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \dot{\bar{Q}}^*(x, y) r_m(x, y) p_{,m}(y) \right\} d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \bar{Q}^*(x, y)) (p(x) - p(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \bar{Q}^*(x, y) r_m(x, y) p_{,m}(y) \right\} d\dot{\Gamma}(x) \\ & = -i\omega\rho \left[\int_{\Gamma} \{ p^*(x, y) + \alpha (\bar{p}^*(x, y) - \bar{u}^*(x, y)) \} \dot{v}(x) \right. \\ & \times d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \{ \dot{p}^*(x, y) + \alpha (\dot{\bar{p}}^*(x, y) - \dot{\bar{u}}^*(x, y)) \} \\ & \times v(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \{ p^*(x, y) \\ & \left. + \alpha (\bar{p}^*(x, y) - \bar{u}^*(x, y)) \} v(x) d\dot{\Gamma}(x) \right. \\ & \left. + \alpha \int_{\Gamma} \bar{u}^*(x, y) \{ \dot{v}(x) - (\dot{n}_m(x) p_{,m}(y) + n_m(x) \dot{p}_{,m}) \} \right. \\ & \times d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\bar{u}}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\ & \left. + \alpha \int_{\Gamma} \bar{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\dot{\Gamma}(x) \right] \\ & - i(\dot{\omega}\rho + \omega\dot{\rho}) \left[\int_{\Gamma} \{ p^*(x, y) + \alpha (\bar{p}^*(x, y) - \bar{u}^*(x, y)) \} \right. \\ & \times v(x) d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \bar{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) \\ & \times d\Gamma(x) \left. \right] + \dot{I}(p^*(x^s, y) + \alpha \bar{p}^*(x^s, y)) \\ & + I(\dot{p}^*(x^s, y) + \alpha \dot{\bar{p}}^*(x^s, y)) \quad (12) \\ & \alpha \int_{\Gamma} (\dot{\bar{q}}^*(x, y) - \dot{\bar{Q}}^*(x, y)) \dot{p}(x) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} (\dot{q}^*(x, y) - \dot{Q}^*(x, y)) p(x) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} (\dot{\bar{q}}^*(x, y) - \dot{\bar{Q}}^*(x, y)) p(x) d\dot{\Gamma}(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\bar{Q}}^*(x, y) \{ \dot{p}(x) - \dot{p}(y) - (r_{,m}(x, y) p_{,m}(y) \\ & + r_m(x, y) \dot{p}_{,m}) \} d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\bar{Q}}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{Q}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\
& = -i\omega\rho\alpha \left[\int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) \dot{v}(x) d\Gamma(x) \right. \\
& + \int_{\Gamma} (\dot{\tilde{p}}^*(x, y) - \dot{\tilde{u}}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \\
& + \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \\
& + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) \{ \dot{v}(x) - (\dot{n}_m(x) p_{,m}(y) \\
& + n_m(x) \dot{p}_{,m}(y)) \} d\Gamma(x) \\
& + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{u}}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\
& + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\
& \left. - i(\dot{\omega}\rho + \omega\dot{\rho}) \alpha \left[\int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \right. \right. \\
& + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\
& \left. + \alpha \left(\dot{I}\tilde{p}^*(x^s, y) + I\dot{\tilde{p}}^*(x^s, y) \right) \right] \quad (13)
\end{aligned}$$

本研究で取り扱うように、形状を定義するパラメータを設計変数として定義した場合、各基本解のこの変数に関する微分は次式となる。

$$\dot{p}^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial x_i} (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}^*(x, y) & = \frac{i}{4} k \left[k H_0^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{1}{r} H_1^{(2)}(kr) \right. \\
& \times \left. \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j(x) \right\} \right] (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\
& + \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\dot{u}^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_i} (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^*(x, y) & = \frac{1}{2\pi r^2} \left(2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j(x) \right) (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\
& - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{p}}^*(x, y) & = \frac{i}{4} k \left[k H_0^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{1}{r} H_1^{(2)}(kr) \right. \\
& \times \left. \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_j} + n_j(y) \right\} \right] (\dot{x}_j - \dot{y}_j) + \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial y_i} \dot{n}_i(y) \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{q}}^*(x, y) & = -\frac{i}{4} k \left[\frac{k}{r} H_0^{(2)}(kr) \left(4 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial r}{\partial n}(y) n_k(x) + \frac{\partial r}{\partial n}(x) n_k(y) + n_j(x) n_j(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \right. \\
& + \frac{1}{r^2} H_1^{(2)}(kr) \left\{ (k^2 r^2 - 8) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial n}(y) n_k(x) - \frac{\partial r}{\partial n}(x) n_k(y) - n_j(x) n_j(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \right\} \\
& \times (\dot{x}_k - \dot{y}_k) + \frac{i}{4} k \left[k H_0^{(2)}(kr) \left\{ \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \right. \right. \\
& + \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial y_j} \dot{n}_j(y) \left. \left. \right\} - \frac{1}{r} H_1^{(2)}(kr) \left\{ 2 \left(\frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial y_j} \dot{n}_j(y) \right) + (n_i(y) \dot{n}_i(x) + n_j(x) \dot{n}_j(y)) \right\} \right] \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}^*(x, y) & = \frac{1}{2\pi r^2} \left(2 \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_j} + n_j(y) \right) (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\
& - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial y_i} \dot{n}_i(y) \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^*(x, y) & = -\frac{1}{2\pi r^3} \left\{ 8 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} - 2 \left(n_k(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \right. \\
& \left. \left. - n_k(y) \frac{\partial r}{\partial n}(x) - n_j(x) n_j(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \right\} (\dot{x}_k - \dot{y}_k) \\
& + \frac{1}{2\pi r^2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) + \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial y_j} \dot{n}_j(y) \right) \right. \\
& \left. + (n_i(y) \dot{n}_i(x) + n_j(x) \dot{n}_j(y)) \right\} \quad (21)
\end{aligned}$$

以上導出された感度係数に関する2つの境界積分方程式(12), (13)を音場の解析と同様にソース点の位置により使い分けることで境界上の感度係数を計算する。

2.3. 感度係数の計算手順

境界積分方程式を設計変数で直接微分した方程式より境界値の感度係数を求める手順について記す。

離散化には境界要素は2次要素を用いるとして、式(3)と(4)をソース点の位置で使い分けることを考慮すれば、以下の代数方程式に帰着する。

$$[H]\{p\} = [G]\{v\} + \{f\} \quad (22)$$

ただし、 $[H]$, $[G]$ はそれぞれ音圧 p と粒子速度 v に関する係数行列であり、 $\{f\}$ は集中音源に関する項となる。得られた代数方程式にあらかじめ規定されている境界条件を適用し、境界既知量と未知量に分けることで次式を得る。

$$[A]\{X\} = [B]\{Y\} + \{f\} \quad (23)$$

ただし、 $[A]$ は未知の境界節点値に関する行列、 $\{X\}$ は未知境界量を集めたベクトル、 $[B]$ は既知境界量に関する行列、 $\{Y\}$ は既知境界量に関するベクトルである。式(23)を解くことで境界上の全ての音圧、粒子速度が求められる。

式(12)と(13)の2つの境界積分方程式を同様に離散化することで、以下の感度係数に関する代数方程式を得る。

$$[H']\{\dot{p}\} = [G']\{\dot{v}\} + [h']\{p\} + [g']\{v\} + \{f'\} \quad (24)$$

ここで、 $[H']$ および $[G']$ はそれぞれ音圧の感度係数 $\{\dot{p}\}$ 、粒子速度の感度係数 $\{\dot{v}\}$ に関する係数行列であり、 $[h']$, $[g']$ はそれぞれ境界上の音圧 p と粒子速度 v に関する係数行列である。式(12), (13)より音圧および粒子速度の感度係数に関する係数は、これらの式の併用方法を境界未知量を導出する際の使い分けと等しくすることでそれぞれ $[H'] = [H]$, $[G'] = [G]$ となることがわかる。音圧 p または粒子速度 v が境界条件で与えられている境界節点では \dot{p} , \dot{v} もまた既知となることに注意すれば最終的に以下の方程式に帰着し、その式を解くことで境界上の未知の感度係数を導出することが可能である。

$$[A]\{\dot{X}\} = [B]\{\dot{Y}\} + [h']\{p\} + [g']\{v\} + \{f'\} \quad (25)$$

3. 数値解析と考察

提案手法の有効性を2つの数値解析例題より確認する。まず、解析解が得られる呼吸円筒の問題に対して、本手法を適用することで得られる数値解と解析解とを比較することで本手法が見かけの固有振動数問題を回避した解を得ることを確認する。次に、音場の最適形状推定問題に対して境界要素法と最急降下法を適用した数値解析を行う。最急降下法を適用する際に必要とされる勾配量は、本手法により得られる数値を用いるものとした。また、数値解析を行う際の積分方程式の使い分けは、図1に示すような境界2次要素において、要素端点に配置された場合は式(3)、(12)を適用し、中間節点に配置された場合は式(4)、(13)を適用するものとした。結合係数 α はKoopmann⁽⁸⁾らに従って i/k とした。

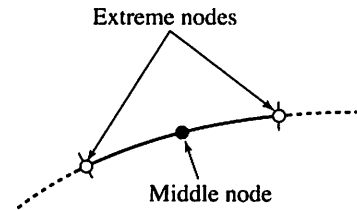


Fig. 1 Boundary element with three nodal points

3.1. 計算例1-感度解析

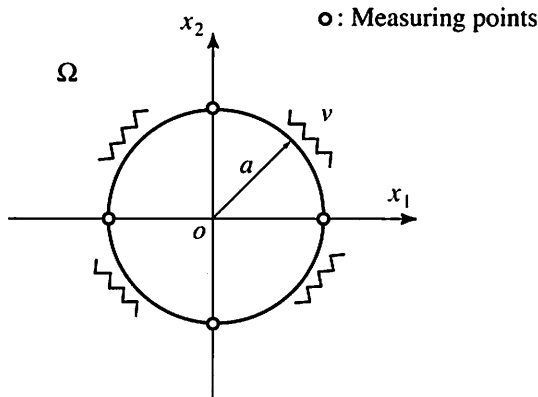


Fig. 2 Analysis model 1

図2に示すように、無限空間内に境界表面が一様な粒子速度 v で振動する呼吸円筒を考える。媒質密度 $\rho = 1.2$ [kg/m³]、伝播速度 $c = 340$ [m/s]、呼吸円筒の半径 $a = 0.2$ [m]とした。呼吸円筒の表面は $v = 1.0$ [m/s]の境界条件を与え、円筒表面を一様に境界2次要素で分割するとし、全要素数は192とした。評価点は境界表面上に4点配置した。設計変数は呼吸円筒の半径 a とし、周波数は1 [Hz] ~ 2 [kHz]を1 [Hz]刻みで解析を行った。ここで設計変数を呼吸円筒の半径 a とした場合の音圧の感度係数の解析解は式(26)で与えられる。

$$\dot{p}(r) = \frac{iv\rho c}{H_1^{(2)}(ka)^2 a} \left\{ ka \left(H_0^{(2)}(kr) H_0^{(2)}(ka) + H_1^{(2)}(kr) H_1^{(2)}(ka) \right) - H_0^{(2)}(kr) H_1^{(2)}(ka) \right\} \quad (26)$$

数値解析結果として示すのは、各手法を適用して得られた

各評価点における音圧の感度係数の絶対値の平均値と解析解との相対誤差を計算した結果である。

図3に、通常の境界積分方程式(式(12)において $\alpha = 0$ とした式)を適用した結果(図中OBIE)および差分により得られる音圧の感度係数の結果を解析解との相対誤差をとったものを比較して示す。ここで、差分による感度係数の導出は、境界積表示分の結果を用い、半径 a を実際に1[%]動かして計算を行った。数値解析結果の比較より、通常の境界積分方程式を適用する方法と差分による方法では、 $ka = 2.5$ および $ka = 5.5$ 付近において見かけの固有振動数問題の影響により、数値解の精度が極端に低下していることがわかる。

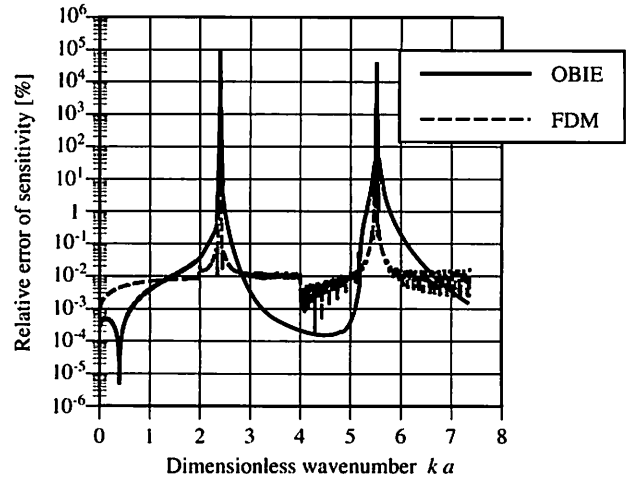


Fig. 3 Numerical results obtained by applying OBIE and FDM

図4に提案手法により境界上の音圧の感度係数を計算した結果と解析解との相対誤差をとったものを比較して示す。数値解析結果より本手法は見かけの固有振動数問題を回避した精度の良い数値解を得ていることがわかる。

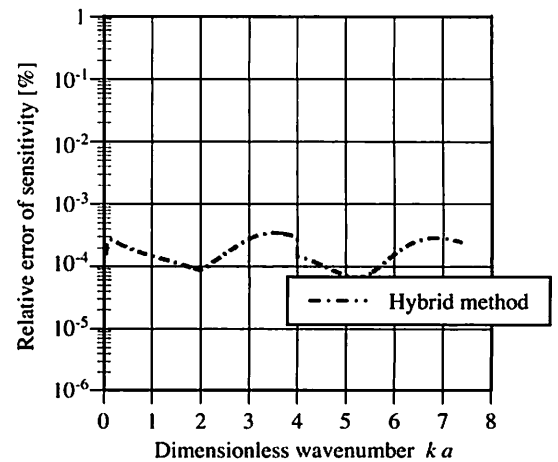


Fig. 4 Numerical result obtained by applying Hybrid method

3.2. 計算例2-最適形状

解析対象として図5に示すように、半無限空間内に直壁

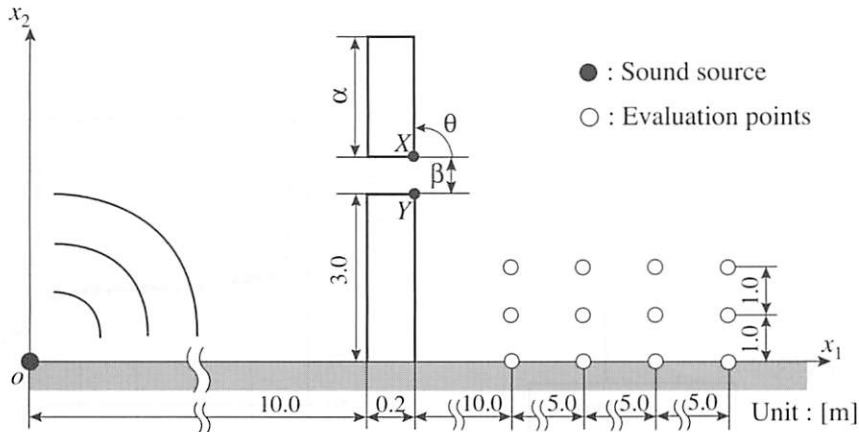


Fig. 5 Analysis model 2

が1つとそれとは別に剛体が1つ存在するような数値モデルを想定した。図に示すように剛体の長辺の長さ α , X 点と Y 点との距離 β , 地表面となす角度 θ を変化させることで目的関数値を下げるような最適あるいは好適なパラメータの値を見つけることを目的とした。媒質密度 $\rho = 1.2[\text{kg}/\text{m}^3]$, 伝播速度 $c = 340[\text{m}/\text{s}]$, 点音源 A の音圧を $(2.0, 0.0)[\text{Pa}]$ として与えた。周波数は $200[\text{Hz}]$ の純音とした。評価点は図5に示すように地表面に12点設置した。解析モデルは x_1 軸に対して対称であると仮定した。数値解析するにあたって境界2次要素を用い, 1つの要素の長さを $0.04[\text{m}]$ とし, 直壁は要素数155, 剛体は要素数60で離散化し, 境界条件は完全反射の条件を与えた。パラメータの変化に伴い剛体の要素数は変化するが, 常に1つの要素の長さは $0.04[\text{m}]$ で固定して数値解析を行った。以下に適用した最適形状推定手法の概略を説明する。

3.2.1 最急降下法の適用

本報では最適化の手法として最急降下法を適用した。この手法は周知のように, 勾配の値から判断して, 目的関数が減少するようにパラメータを更新する方法である⁽¹⁾⁽⁹⁾。最急降下法の詳細はここでは割愛するが, 本研究に関係する部分だけを以下に説明する。

本研究では, 目的関数として評価点の音圧絶対値の平均値をとる。すなわち,

$$W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |p_i| \quad (27)$$

ここで N は評価点の総数であり, p_i は i 番目の評価点における音圧値である。また, 勾配ベクトル ∇W は以下のように定義される。

$$\nabla W = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial W}{\partial b_1} \\ \frac{\partial W}{\partial b_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial W}{\partial b_L} \end{array} \right\} \quad (28)$$

ここで $b_j, j = 1 \sim L$ は設計変数を表す。 $d_j = -\nabla W$ とすると, パラメータ b_j は次のように更新される。

$$b_j^{k+1} = b_j^k + \gamma d_j^k \quad (29)$$

ただし, k は反復計算数であり, γ はステップ幅を表す。ステップ幅は次の1次元変数の直線探索問題を解くことで決定される。

$$\text{minimize} : \Phi(\gamma), \gamma > 0 \quad (30)$$

ただし, $\Phi(\gamma) = W(b_j + \gamma d_j)$ とした。

本研究では直線探索問題(30)を, 2次補間法を適用して解くことでステップ幅を決定する⁽¹⁰⁾。 $\Phi(\gamma)$ を以下に示すように2次関数であると仮定する。

$$\Phi(\gamma) = A\gamma^2 + B\gamma + C \quad (31)$$

2次補間法とは, 式(31)は $\gamma = -B/2A$ において極値となることを利用してステップ幅を決定する方法である。 $\gamma_1 > \gamma_2, \gamma_2 < \gamma_3$ であつ, $\Phi(\gamma_1) > \Phi(\gamma_2), \Phi(\gamma_2) < \Phi(\gamma_3)$ であるような3点を探索できたならば以下の式より係数 A, B および C を決定することができ, ステップ幅 γ を決定することができる。

$$\begin{bmatrix} \gamma_1^2 & \gamma_1 & 1 \\ \gamma_2^2 & \gamma_2 & 1 \\ \gamma_3^2 & \gamma_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi(\gamma_1) \\ \Phi(\gamma_2) \\ \Phi(\gamma_3) \end{Bmatrix} \quad (32)$$

以上のように適切なステップ幅を決定してパラメータの値を式(29)により更新して, 次式で定義する収束判定を満足するまで計算を繰り返す。

$$\|W^{k+1} - W^k\| \leq 10^{-6} \quad (33)$$

3.2.2 計算結果

図6に初期のパラメータにおける形状および最適あるいは好適と思われるパラメータの値における形状を示す。図7には各パラメータの反復計算ごとの値を示してある。図8には各計算ごとの目的関数の推移を示す。ここで比較のために

解析対象の図5において高さ5.0[m]の直壁が存在する場合の目的関数との値を同時に示してある。

数値解析結果より、目的関数値が最小値に収束する各パラメータの値を同定しており、最適な防音壁形状を推定している。直壁が1つだけ存在する場合よりも防音効果がより大きい形状を推定していることがわかる。当然ながら、各パラメータの初期値の与え方でこの収束特性が変わる。

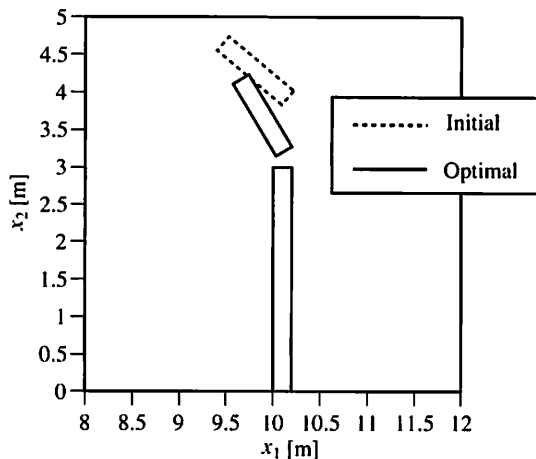


Fig. 6 Initial and optimal wall shapes

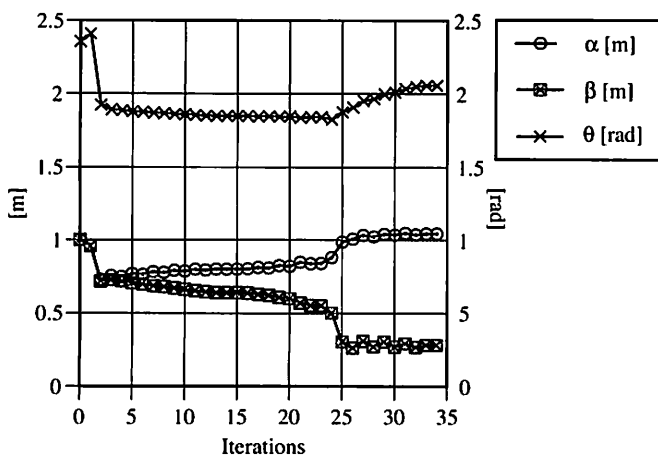


Fig. 7 Change in design variables

4. あとがき

音場の形状最適化問題に対して、新しい感度解析手法と境界要素法を適用し、その有効性を2つの例題解析より確認した。新しい感度解析手法の有効性は、呼吸円筒の問題に対して適用して解析解と比較することで、見かけの固有振動数問題を回避した数値解が得られることを確認した。次にこの応用例として、最適形状推定問題への適用を取り上げた。解法としては、目的関数の設計変数に関する勾配ベクトルを求める最急降下法を取り入れた。計算例から、境界要素法により防音効果が認められる最適あるいは好適な形状を推定することができた。今後、この手法を種々の最適形状推定問題に応用する予定である。

本研究について、ご支援いただいた関係各位に感謝する。

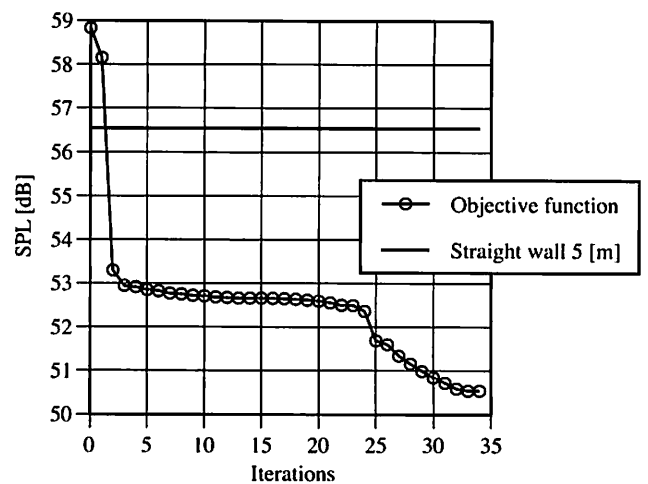


Fig. 8 Change in objective function

参考文献

- (1) 山川宏：最適化デザイン，培風館，(1993)。
- (2) 田中正隆，松本敏郎，中村正行：境界要素法，培風館，(1991)。
- (3) 小林昭一（編）：波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，(2000)。
- (4) 松本敏郎，田中正隆，山田泰永：境界要素法による音響問題の設計感度解析法，日本機械学会論文集，59-558，C(1993) pp. 122-127。
- (5) 荒井雄理，田中正隆，松本敏郎：境界要素法による音場の新しい感度解析法（3次元音場に関する検討），計算数理工学論文集，6-2 (2006)，pp. 97-102。
- (6) 田中正隆，荒井雄理，松本敏郎：音場の見かけの固有振動数問題を回避するための境界要素解析法（第2報，改訂版），日本機械学会論文集，72-719，C(2006) pp. 2088-2093。
- (7) A. J. Burton, and G. F. Miller： The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **323**, (1971), pp. 201-210。
- (8) K. A. Cunefare, and Gary Koopmann： A Boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers, *J. Acoust. Soc. Am.*, **85**, (1989), pp. 39-48。
- (9) 田村明久，村松正和：最適化法，共立出版株式会社，(2002)。
- (10) R. L. Fox： *Optimization Methods for Engineering Design*, Addison - Wesley Publishing Company, (1971), pp. 38-116。
- (11) 一宮亮一：機械系の音響工学，コロナ社，(1992)。
- (12) 日本音響学会（編）：基礎音響工学，コロナ社，(1990)。