

分布関数の空間微分に対する格子ボルツマン法

LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR SPATIAL DERIVATIVE OF THE DISTRIBUTION FUNCTION

瀬田 剛¹⁾, 嶋田 寛哲²⁾

Takeshi SETA and Hironori SHIMADA

1) 富山大学大学院理工学研究部 (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)
 2) (株) 日立国際電気 (〒 101-8980 東京都千代田区外神田 4-14-1)

Spatial derivative of the distribution function follows the lattice Boltzmann equation, because the convection term of the kinetic equation is linear in the lattice Boltzmann method. Partial differentiation of the equilibrium distribution function gives the equilibrium distribution function for the spatial derivative in BGK collision operator. A simple arithmetic calculation of the spatial derivative of the distribution function derives the density derivatives and the fluid velocity ones. The standard lattice Boltzmann equation is able to be employed to discretize the kinetic equation. We verify the approximation accuracy of the present LB method with simulations of the Taylor vortex flow, of the Poiseuille flow, of the unsteady Couette flow, and of the backstep flow.

Key Words : Computational Fluid Dynamics, Lattice Boltzmann Method, Spatial Derivative, Distribution Function

1. 緒言

格子ボルツマン法⁽¹⁾ (Lattice Boltzmann Method, LBM) は, 1) 線形な対流過程からナビエ・ストークス方程式の非線形な対流過程が導出でき, 2) 時間と空間に対し2次精度を有し, 3) ボアソン方程式の反復計算が不要であり, 4) 並列処理計算機への適用性が高く, 5) 境界条件の設定が容易であることなどから, 非圧縮性流体解析のみならず, 圧縮性流体, 混相流, 乱流など様々な流体解析に適用されている^(1, 2, 3).

LBMでは, 差分近似を用いるか, テイラー展開とテンソルの性質を用いることで密度や流速の微分が近似計算された⁽⁴⁾. 本研究では, 分布関数に対する空間微分から, 密度と流速の微分が導出できることを示す. LBMの動力学方程式は対流過程が線形であるため, 分布関数に対する導関数も, 格子ボルツマン方程式に従って運動する. この分布関数に対する空間微分に代数演算を施すことにより, 簡単に, 流速, 密度の微分情報が得られる. LBMで用いられる動力学方程式は, 微分型の格子ボルツマン方程式に対する離散化近似式の一つと考えられる^(5, 6). 分布関数の導関数に対する動力学方程式を, 一般的な格子ボルツマン法で解析し, テイラー渦流れ等の数値計算によって, 分布関数に対する空間微分から導出される微分値の計算精度について検証する.

2. 格子ボルツマン法

正方格子9速度格子ボルツマンモデルでは, Fig.1に示されるように, 各格子点上に, 9方向の離散速度 c_k ($k=0-8$) が定義されており, 各離散速度に対応した9つの分布関数 f_k が存在する. ここで, 離散速度は, $c_0 = 0$, $c_k = c[\cos((k-1)\pi/2), \sin((k-1)\pi/2)]$ ($k=1-4$), $c_k = \sqrt{2}c[\cos((k-5)\pi/2 + \pi/4), \sin((k-5)\pi/2 + \pi/4)]$ ($k=5-8$) である. c は格子間距離を表す. LBMでは分布関数 f_k に対する格子ボルツマン方程式,

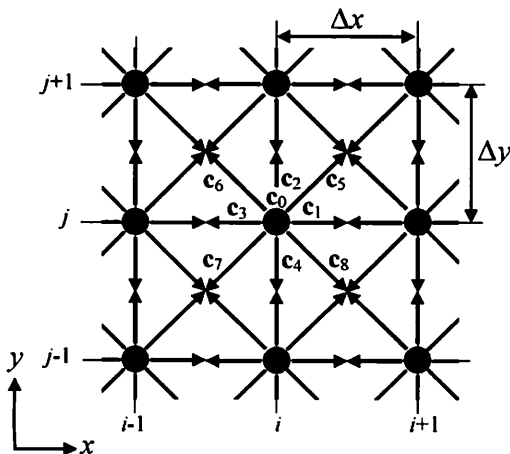


Fig. 1 Schematic of lattice nodes.

$$\partial_t f_k + c_{k,\alpha} \partial_{x_\alpha} f_k = -\frac{f_k - f_k^0}{\tau}, \quad (1)$$

が解かれることで、系全体の流体運動が再現される⁽¹⁾。ここで、 τ は緩和時間、 f_k^0 は平衡分布関数、 α はガウス座標系の座標軸に対するインデックスであり、2次元座標系では $x = x_1, y = x_2$ に相当する。ただし、 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ 、 $\partial_{x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ とする。Fig.1のD2Q9モデルに対する平衡分布関数 f_k^0 は、

$$f_k^0 = \omega_k \rho \left[1 + \frac{3\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right], \quad (2)$$

で定義される。ここで、 ω_k は重みであり、 $\omega_0 = 4/9$ 、 $\omega_k = 1/9$ ($k = 1-4$)、 $\omega_k = 1/36$ ($k = 5-8$)で与えられる。時間項を1次の前進で、対流項を1次の風上で、陰解法を用い、式(1)を離散化すると、

$$\frac{f_k(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f_k(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} + \frac{f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) - f_k(\mathbf{x}, t + \Delta t)}{\Delta x} = -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^0(\mathbf{x}, t)}{\tau}, \quad (3)$$

となり、 $\Delta t = \Delta x$ とすることで、標準的な格子ボルツマン法で用いられる動力学方程式、

$$f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) - f_k(\mathbf{x}, t) = -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^0(\mathbf{x}, t)}{\tau}, \quad (4)$$

が得られる。

式(4)から、低マッハ数領域において、連続の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

とナビエ・ストークス方程式、

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (6)$$

が導出される⁽¹⁾。動粘性係数 ν は、チャップマン・エンスコグ展開により

$$\nu = \frac{c^2(2\tau - 1)\Delta t}{6}, \quad (7)$$

となる。密度 ρ および流速 \mathbf{u} は、分布関数 f_k により導出される。

$$\rho = \sum_{k=0}^8 f_k, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^8 \mathbf{c}_k f_k. \quad (8)$$

ここで、分布関数の非平衡部分 f_k^n ($n = 1, 2, \dots$)は次式のように定義され、

$$f_k = f_k^0 + f_k^1 + f_k^2 + f_k^3 + \dots, \quad (9)$$

$$\sum_{k=0}^8 f_k^n = 0, \quad \sum_{k=1}^8 f_k^n \mathbf{c}_k = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

式(8)より、

$$\sum_{k=0}^8 f_k^0 = \rho, \quad \sum_{k=1}^8 f_k^0 \mathbf{c}_k = \rho \mathbf{u}, \quad (11)$$

が得られる。

式(1)を x_α で偏微分すると、 \mathbf{c}_k が定数であることから、

$$\partial_t (\partial_{x_\alpha} f_k) + c_{k,\beta} \partial_{x_\beta} (\partial_{x_\alpha} f_k) = -\frac{\partial_{x_\alpha} f_k - \partial_{x_\alpha} f_k^0}{\tau}, \quad (12)$$

となり、分布関数 f_k の空間微分に関するボルツマン方程式が得られる。

式(4)の導出と同様に、式(12)を離散化することにより、分布関数の空間微分 $\partial_{x_\alpha} f_k$ に対する標準的な格子ボルツマン方程式、

$$\begin{aligned} & \partial_{x_\alpha} f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) - \partial_{x_\alpha} f_k(\mathbf{x}, t) \\ &= -\frac{\partial_{x_\alpha} f_k(\mathbf{x}, t) - \partial_{x_\alpha} f_k^0(\mathbf{x}, t)}{\tau}, \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる。本研究では、式(13)に従って運動する $\partial_{x_\alpha} f_k$ の挙動を調べる。微分演算子は線形であることから、分布関数 f_k の空間微分に、式(8)と同様の代数演算を施すことで、密度および運動量に関する微分情報が得られる。

$$\sum_{k=0}^8 \partial_{x_\alpha} f_k = \partial_{x_\alpha} \rho, \quad \sum_{k=1}^8 \partial_{x_\alpha} f_k \mathbf{c}_k = \partial_{x_\alpha} (\rho \mathbf{u}). \quad (14)$$

式(13)の平衡分布関数 $\partial_{x_\alpha} f_k^0$ は、式(2)を x_α で偏微分することにより簡単に得られる。

$$\begin{aligned} \partial_{x_\alpha} f_k^0 &= \omega_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\rho \left(1 + \frac{3\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right) \right] \\ &= \omega_k \left[\frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \left(1 + \frac{3\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \rho \left(\frac{3\mathbf{c}_k \cdot \partial_{x_\alpha} \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})(\mathbf{c}_k \cdot \partial_{x_\alpha} \mathbf{u})}{c^4} - \frac{3\mathbf{u} \cdot \partial_{x_\alpha} \mathbf{u}}{c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

式 (15) は、密度 ρ 、流速 \mathbf{u} および、その空間微分 $\partial_{x_\alpha}\rho$ 、 $\partial_{x_\alpha}\mathbf{u}$ の関数である。よって、式 (15) の計算には、式 (8) から算出された ρ と \mathbf{u} 、式 (14) から導出される $\partial_{x_\alpha}\rho$ と $\partial_{x_\alpha}\mathbf{u}$ が用いられる。ここで、非平衡部分の微分値の総和も無視されると定義され、

$$\partial_{x_\alpha} f_k = \partial_{x_\alpha} f_k^0 + \partial_{x_\alpha} f_k^1 + \partial_{x_\alpha} f_k^2 + \partial_{x_\alpha} f_k^3 + \dots, \quad (16)$$

$$\sum_{k=0}^8 \partial_{x_\alpha} f_k^n = 0, \quad \sum_{k=1}^8 \partial_{x_\alpha} f_k^n c_k = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

式 (15), (17) を式 (14) に代入すると、

$$\sum_{k=0}^8 \partial_{x_\alpha} f_k^0 = \partial_{x_\alpha} \rho, \quad \sum_{k=1}^8 \partial_{x_\alpha} f_k^0 c_k = \partial_{x_\alpha} (\rho \mathbf{u}), \quad (18)$$

となる。式 (11) と (18) との比較から、微分演算子の線形性が確認される。

本研究では、式 (13)-(15) を解析することで、流速に対する微分演算が正しく実施されるか検証する。

3. 計算結果

まず、最初に、周期境界条件を用いた 2 次元テラー渦流れの計算により、式 (13)-(15) による微分計算の精度検証を行う。テラー渦流れの解析解は、ナビエ・ストークス方程式 (6) に従い、

$$\hat{u} = -\bar{u} \exp[-\nu t(k_1^2 + k_2^2)] \cos(k_1 x) \sin(k_2 y), \quad (19)$$

$$\hat{v} = \bar{v} \exp[-\nu t(k_1^2 + k_2^2)] \sin(k_1 x) \cos(k_2 y), \quad (20)$$

となる。計算条件は、 $\rho = 1.0$ 、 $\tau = 1.1$ 、 $k_1 = 4\pi/W$ 、 $k_2 = 4\pi/W$ 、 $\bar{u} = \bar{v} = 0.001$ とした。グリッドサイズは、 $W \times W$ 、計算時間は $t = W^2/16$ である。数値解 (u, v) と解析解 (\hat{u}, \hat{v}) との誤差は、

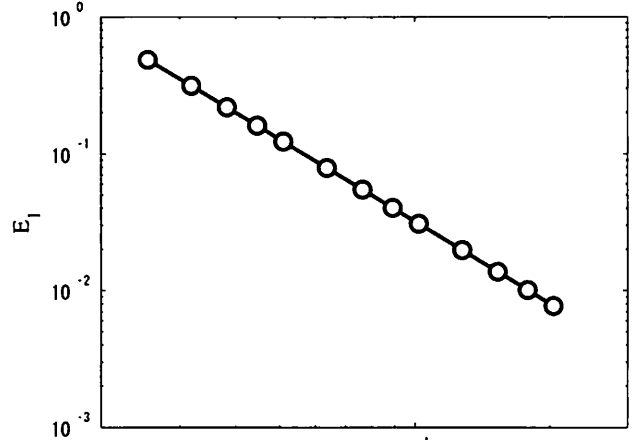
$$E_1 = \sum_{x,y} |u - \hat{u}| / \sum_{x,y} |\hat{u}| + \sum_{x,y} |v - \hat{v}| / \sum_{x,y} |\hat{v}|, \quad (21)$$

によって定義される。Fig.2 (a) に、誤差 E_1 を示す。従来の研究どおり、LBM によって計算された流速は 2 次の空間精度を有している^(1, 4)。速度の空間微分に対するテラー渦流れの解析解は、式 (19) を y で偏微分することにより、

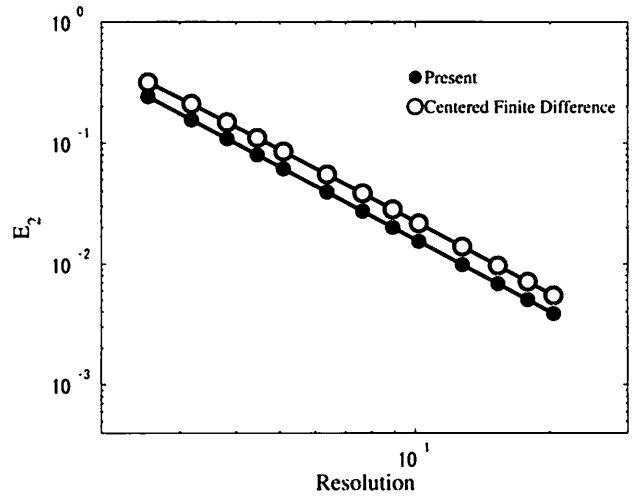
$$\partial_y \hat{u} = -\bar{u} k_2 \exp[-\nu t(k_1^2 + k_2^2)] \cos(k_1 x) \cos(k_2 y), \quad (22)$$

と求まる。空間微分に対する誤差を、

$$E_2 = \sum_{x,y} |\partial_y u - \partial_y \hat{u}| / \sum_{x,y} |\partial_y \hat{u}|, \quad (23)$$



(a) u



(b) $\partial u / \partial y$

Fig. 2 Taylor vortex flow.

のように定義する。Fig.2(b) に $\partial_y u$ に対する誤差 E_2 と解像度との関係を示す。式 (4), (8) を用いる LBM から得られた x 方向の流速成分 u を 2 次の中心差分近似、

$$\frac{\partial u}{\partial y} \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2), \quad (24)$$

によって計算された誤差 E_2 を (o) で、式 (13)-(15) から得られた計算結果を (●) で示す。分布関数の空間微分の運動方程式から計算された流速の微分値は、2 次の空間精度を有することが、Fig.2(b) から分る。Fig.2(b) に示された中心差分による近似解 (o) は、テンソルの性質を用いる微分の近似方法より、打ち切り誤差が小さいことが分かっている⁽⁴⁾。本手法で得られた解は、中心差分による近似解よりも、更に誤差が小さくなることが示された。これは、式 (13) の計算において、式 (22) から得られる時間 $t = 0$ における解析解を初期条件として用いたためと、差分近似によって発生する打ち切り誤差

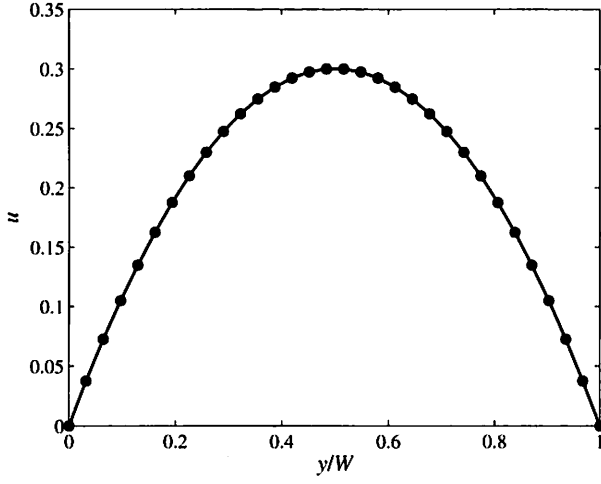
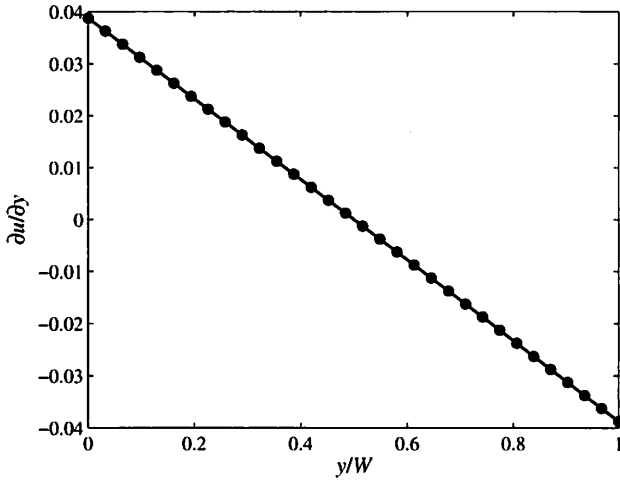
(a) u (b) $\partial u/\partial y$

Fig. 3 Poiseuille flow.

が生じないためである。つまり、式 (19) の \hat{u} に中心差分近似を施して得られる近似解を初期条件として用いる場合と異なり、初期条件に打ち切り誤差が含まれないためである。ただし、本手法では、式 (13) の計算に 2 次精度の時間に関する打ち切り誤差 ($O(\Delta t^2)$)⁽¹⁾ が含まれる。しかしながら、中心差分によって得られた近似解に対しても、同様に、式 (4) の計算に打ち切り誤差 ($O(\Delta t^2)$) が含まれるため、 $t = W^2/16$ から計算時間を変更しても、Fig.2 の関係は変わらない。

次に、ポアズイユ流れの計算を行い、本手法の壁面境界条件に対する有効性を検証する。x 軸方向に周期境界条件を、y 軸方向に静止壁を設定し、一定の外力 g を x 軸方向に加えることにより、流れが発達する。定常状態におけるポアズイユ流れの解析解は、

$$\hat{u} = \frac{g}{2\nu}[Wy - y^2], \quad (25)$$

$$\partial_y \hat{u} = \frac{g}{2\nu}[W - 2y], \quad (26)$$

である。ここで、 W はチャンネル幅である。チャップマン・エンスコグ展開から、外力項 $\rho g c_{k,\alpha}/6c^2$ を式 (4) に加えることにより、外力 g がナビエ・ストークス方程式 (6) に付加されることが示されている (7)。

$$\begin{aligned} & f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) - f_k(\mathbf{x}, t) \\ &= -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^0(\mathbf{x}, t)}{\tau} + \frac{\rho(\mathbf{x}, t) g c_{k,\alpha}}{6c^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

本計算では、 $\partial \rho/\partial x_\alpha \simeq 0$ と仮定できることから、分布関数の空間微分に対するボルツマン方程式 (13) への外力項による影響は無視できる。つまり、外力が存在すれば、外力の空間微分が式 (13) に付加されなければならないが、外力が定数の場合、

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\rho g c_{k,\alpha}}{6c^2} = \frac{g c_{k,\alpha}}{6c^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \simeq 0, \quad (28)$$

となり、式 (13) は特に修正する必要はない。

分布関数 f_k に対する境界条件として、分布関数およびその微分値共に、Zou⁽⁸⁾ らによって提案された非平衡分布関数に対するバウンズバック・スキームを用いる。Zou らによって提案されたスキームを $\partial_{x_\alpha} f_k$ に適用した場合の境界条件の設定方法を以下に示す。例として、下壁の $j = 1$ において、 $\partial_{x_\alpha} f_2$ 、 $\partial_{x_\alpha} f_5$ 、 $\partial_{x_\alpha} f_6$ が未定の境界条件を考える。式 (14) の定義式と、分布関数の非平衡部分に対するバウンズバック・ルール、

$$\partial_{x_\alpha} f_2 - \partial_{x_\alpha} f_2^0 = \partial_{x_\alpha} f_4 - \partial_{x_\alpha} f_4^0, \quad (29)$$

を組み合わせることにより、

$$\begin{aligned} \partial_{x_\alpha} \rho &= \frac{1}{1-v} [\rho \partial_{x_\alpha} v + \partial_{x_\alpha} f_0 + \partial_{x_\alpha} f_1 + \partial_{x_\alpha} f_3 \\ &\quad + 2(\partial_{x_\alpha} f_4 + \partial_{x_\alpha} f_7 + \partial_{x_\alpha} f_8)], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\partial_{x_\alpha} f_2 = \partial_{x_\alpha} f_4 + \frac{2\partial_{x_\alpha}(\rho v)}{3c}, \quad (31)$$

$$\partial_{x_\alpha} f_5 = \partial_{x_\alpha} f_7 + \frac{\partial_{x_\alpha}(\rho(u+v))}{2} - \frac{\partial_{x_\alpha}(\rho v)}{3c} - \frac{\partial_{x_\alpha} f_1 - \partial_{x_\alpha} f_3}{2}, \quad (32)$$

$$\partial_{x_\alpha} f_6 = \partial_{x_\alpha} f_8 - \frac{\partial_{x_\alpha}(\rho(u-v))}{2} - \frac{\partial_{x_\alpha}(\rho v)}{3c} + \frac{\partial_{x_\alpha} f_1 - \partial_{x_\alpha} f_3}{2}, \quad (33)$$

のように未知量が求まる。式 (30)-(33) により、流速の微分値 ($\partial_{x_\alpha} u, \partial_{x_\alpha} v$) を境界上に設定できる。ポアズイユ流れの計算では、境界上の流速の微分情報は与えられないため、2 次精度の片側差分近似、

$$\frac{\partial u}{\partial y} \simeq \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2), \quad (34)$$

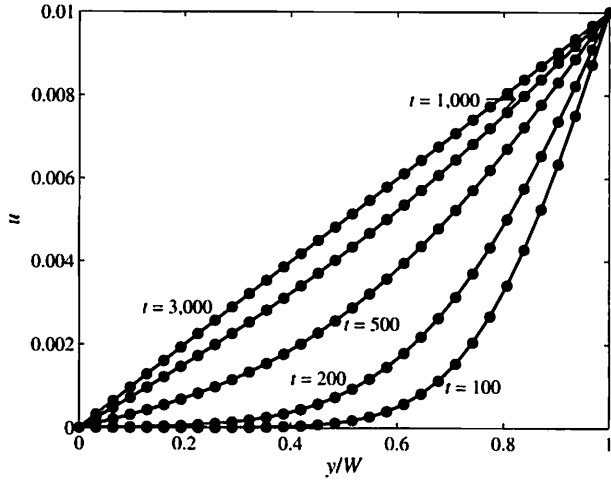
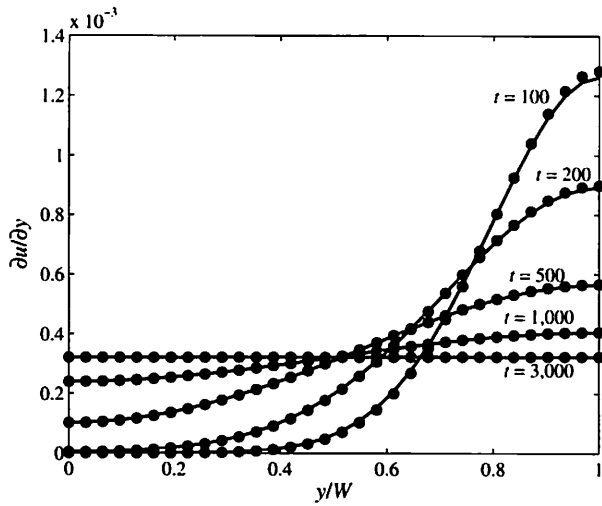
(a) u (b) $\partial u / \partial y$

Fig. 4 Unsteady Couette flow.

により求める。格子点数は 4×32 , $\rho = 1.0$, $\tau = 1.1$, $g = 0.0005$ とし, 式 (13)-(15) から得られた 30,000 ステップ後の計算結果を (●) で, 解析解を実線で, Fig.3 に示す。 u , $\partial_y u$ とも, 理論解とよく一致しており, 境界条件が存在した場合も, 本手法により高精度に解析可能であることが分る。

非定常流に対する計算精度を検証するため, 非定常クエット流れの計算を行う。上壁は一定速度 U で動き, 下壁は静止壁である。 x 軸方向に周期境界条件を設定する。非定常クエット流れの解析解は,

$$\hat{u} = \frac{Uy}{W} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U(-1)^n}{\lambda_n W} e^{-\nu \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n y), \quad (35)$$

で与えられる。ここで, $\lambda_n = n\pi/W$, $n = 1, 2, 3, \dots$ である。空間微分に対する解析解は, 式 (35) から,

$$\partial_y \hat{u} = \frac{U}{W} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U(-1)^n}{\lambda_n W} e^{-\nu \lambda_n^2 t} \lambda_n \cos(\lambda_n y), \quad (36)$$

と求められる。計算条件は $\rho = 1.0$, $U = 0.01$, $\tau = 1.1$ とする。 Fig.4 に, 非定常クエット流れに対する, 本手法による計算結果と, 式 (35), (36) の解析解を, それぞれ, (●) と実線で示す。 u , $\partial_y u$ とも, 解析解とよく一致しており, 非定常問題に対しても式 (13)-(15) によって流速の空間微分を高精度に計算されることが示された。

最後に, バックステップ流れの計算を行い, 2次元の温度分布を検証する。レイノルズ数は $Re = 100$, 格子点数は 801×81 , $\rho = 2.7$, $\tau = 0.8$, 計算領域の高さ $H = 80$, 幅 $W = 800$ とする。 Armaly⁽⁹⁾ らの実験に用いられた実験装置の形状と一致させるため, 本計算において, ステップ高さは $H/2 = 40$, ステップ幅は, $H/5 = 160$ とする。上下壁は静止壁 $(u, v)|_{j=1} = (0, 0)$, $(u, v)|_{j=81} = (0, 0)$, 流出境界はノイマン条件 $\partial_x u|_{i=801} = 0$, 流入境界はポアソユ流れの解析解,

$$u|_{i=1} = -\frac{u_{max}}{8} [2y^2 - 3Hy + H^2], \quad (37)$$

によって流速を与える。レイノルズ数は,

$$Re = \frac{2u_{max}H}{3\nu}, \quad (38)$$

によって定義される。 Fig.5(a) に u/u_{max} を示す。 LBM による計算結果を実線で, Armaly⁽⁹⁾ らによる実験結果を (●) で示す。 $Re=100$ において, LBM によって解析された計算結果は, 実験結果とよく一致することが分る。 LBM から得られた速度に中心差分, 境界上のみ片側差分を適用し, 計算された温度 $\partial_x v - \partial_y u$ を Fig.5(b) に, 式 (13)-(15) から得られた温度を Fig.5(c) に, それぞれ示す。 Fig.5(c) は Fig.5(b) とほぼ等しい温度分布を示しており, バックステップ流れの計算においても, 分布関数の空間微分に対する格子ボルツマン法により, 適切に温度が計算されている。

4. 結言

LBM では分布関数に対する導関数が, 格子ボルツマン法で用いられる動力学方程式に従って運動することが示された。この分布関数に対する導関数から 2 次精度に速度の空間微分が導出できることがテーラー渦流れの計算から示された。テーラー渦流れの計算において, 差分近似によって生じる打ち切り誤差がないため, 本手法で得られた解は, 中心差分による近似解よりも誤差が小さかった。ポアソユ流れおよび非定常クエット流れの計算から, Zou の境界条件を用いることで, 定常ならびに非定常問題に対しても, 速度の空間微分が精度良く計算されることが示された。バックステップ流れの計算から, 流入境界条件, ノイマン境界条件が用いられた場合も温度分布が, 適切に計算されることが分った。

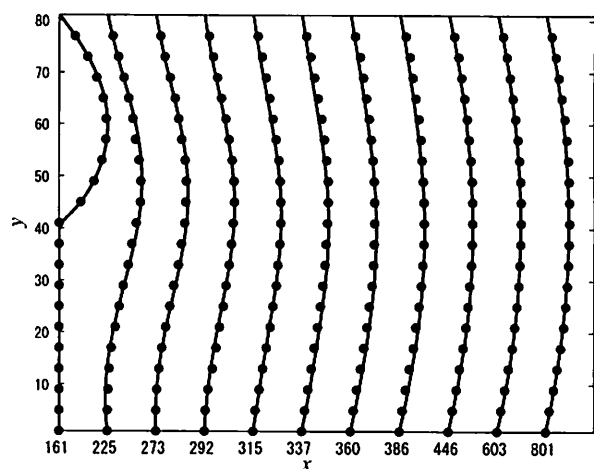
格子点数 128×128 のテラー渦流れの計算を、CPU 速度が 2.8GHz の PC 上で行ったところ、LBM の計算時間は 22.82s、メモリ使用量は 4.4MB、本手法の計算時間は 90.89s、メモリ使用量は 11MB であった。本手法では、分布関数の空間微分を表す別の分布変数を導入し、その時間発展も計算しなければならないため、LBM と比較し計算機負荷が増大してしまう。本手法の計算機負荷の問題と空間微分の計算の簡便さとの間のトレードオフについて考察する必要がある。

謝辞

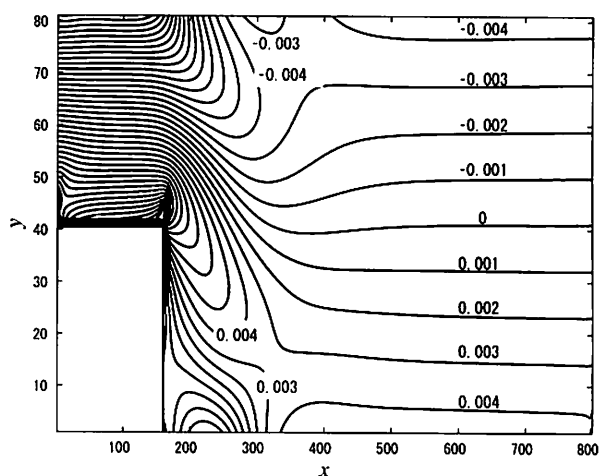
本研究の実施に当たり、大変貴重なご意見を頂いた東京工業大学高橋亮一名誉教授、富山大学竹越栄俊名誉教授、富山大学奥井健一名誉教授に深謝する。

参考文献

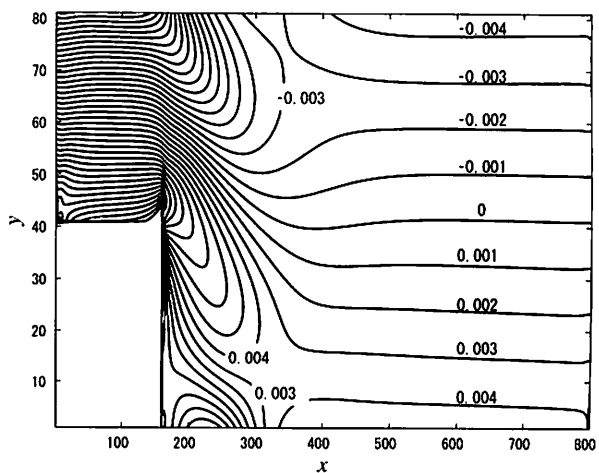
- (1) Chen, S. and Doolen, G. D.: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 329-364.
- (2) Yoshino, M. and Mizutani, Y.: Lattice Boltzmann Simulation of Liquid-Gas Flows through Solid Bodies in a Square Duct, *Mathematics and Computers in Simulation*, **72**(2006), pp. 264-269.
- (3) Seta, T., Takegoshi, E., Kitano, K., and Okui, K.: Thermal Lattice Boltzmann Model for Incompressible Flows through Porous Media, *J. Thermal Science and Technology*, **1**(2006), pp. 90-100.
- (4) Seta, T. and Okui, K.: Effects of Truncation Error of Derivative Approximation for Two-Phase Lattice Boltzmann Method, *J. Fluid Science and Technology*, **2**(2007), pp. 139-151.
- (5) Cao, N., Chen, S., Jin, S., and Martínez, D.: Physical Symmetry and Lattice Symmetry in the Lattice Boltzmann Method, *Phys. Rev. E*, **55**(1997), pp. R21-R24.
- (6) Seta, T., Kono, K., Martinez, D., and Chen, S.: Lattice Boltzmann Scheme for Simulating Two-Phase Flows, *JSME International Journal B*, **43**(2000), pp. 305-313.
- (7) Guo, Z., Zheng, C., and Shi, B.: Discrete Lattice Effects on the Forcing Term in the Lattice Boltzmann Method, *Phys. Rev. E*, **65**(2002), pp. 046308-1-046308-6.
- (8) Zou, Q. and He, X.: On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model, *Phys. Fluids*, **9**(1997), pp. 1591-1598.
- (9) Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. F., and Schonung, B.: Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow, *J. Fluid Mech.*, **127** (1983), pp. 473-496.



(a) u/u_{max}



(b) $\partial_x v - \partial_y u$ (Finite difference approximation)



(c) $\partial_x v - \partial_y u$ (present)

Fig. 5 Backstep flow.